Geometria das equações Darboux integráveis

Luiz Felipe de Jesus Borges
Orientador: Diego Catalano Ferraioli

VIII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA - EPGMAT

22 de Novembro de 2023

Introdução

- Darboux, G., 1870. **Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal**.
- Goursat, E., 1891. **Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre-Tome 2.**
- Anderson, I.M., Kamran, N., 1997. **The variational bicomplex for hyperbolic second-order scalar partial differential equations in the plane**.
- Anderson, I.M., Juráš, M., 1997. **Generalized Laplace invariants and the method of Darboux**.
- Anderson, I.M., Fels, M. E., Vassiliou, P. J., 2009. **Superposition formulas for exterior differential systems**.

Integrabilidade segundo Darboux

Uma equação diferencial parcial escalar da segunda ordem

$$F\big(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\big) = 0$$

para uma função $u = u(x, y)$, define um subconjunto $\mathcal{E}$ do espaço de jatos $J^2(\pi)$, do fibrado trivial $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, em que $\pi(x, y, u) = (x, y)$.

Uma equação diferencial parcial escalar da segunda ordem

$$F\big(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\big) = 0$$

para uma função $u = u(x, y)$, define um subconjunto $\mathcal{E}$ do espaço de jatos $J^2(\pi)$, do fibrado trivial $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, em que $\pi(x, y, u) = (x, y)$.

- Sob hipóteses de regularidade para F, i.e. $F \in \mathcal{F}^2(\pi) = C^\infty(J^2(\pi))$ com $(F_{u_{xx}}, F_{u_{xy}}, F_{u_{yy}}) \neq 0$, temos que $\mathcal{E}$ é uma subvariedade 7-dimensional de $J^2(\pi)$.

Uma equação diferencial parcial escalar da segunda ordem

$$F\big(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\big) = 0$$

para uma função $u = u(x, y)$, define um subconjunto $\mathcal{E}$ do espaço de jatos $J^2(\pi)$, do fibrado trivial $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, em que $\pi(x, y, u) = (x, y)$.

- Sob hipóteses de regularidade para F, i.e. $F \in \mathcal{F}^2(\pi) = C^\infty(J^2(\pi))$ com $(F_{u_{xx}}, F_{u_{xy}}, F_{u_{yy}}) \neq 0$, temos que $\mathcal{E}$ é uma subvariedade 7-dimensional de $J^2(\pi)$.
- Nestas hipóteses, $\mathcal{E}$ é uma subvariedade mergulhada e orientável do espaço $J^2(\pi)$.

Toda escolha de uma forma de volume $\Omega_{\mathcal{E}}$ sobre $\mathcal{E}$ permite definir a forma bilinear simétrica conforme $g_{\mathcal{E}} \colon \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{F}(\mathcal{E})$ sobre o prolongamento infinito $\mathcal{E}^{(\infty)}$, tal que

$$\boxed{g_{\mathcal{E}}(Z_1, Z_2)\Omega_{\mathcal{E}} = L_{Z_1}(d\bar{\omega}) \wedge L_{Z_2}(d\bar{\omega}) \wedge \bar{\omega} \wedge \bar{\omega}_x \wedge \bar{\omega}_y.}$$

Toda escolha de uma forma de volume $\Omega_{\mathcal{E}}$ sobre $\mathcal{E}$ permite definir a forma bilinear simétrica conforme $g_{\mathcal{E}} \colon \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{F}(\mathcal{E})$ sobre o prolongamento infinito $\mathcal{E}^{(\infty)}$, tal que

$$\boxed{g_{\mathcal{E}}(Z_1, Z_2)\Omega_{\mathcal{E}} = L_{Z_1}(d\bar{\omega}) \wedge L_{Z_2}(d\bar{\omega}) \wedge \bar{\omega} \wedge \bar{\omega}_x \wedge \bar{\omega}_y.}$$

Definição

Um campo horizontal $X \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^{(\infty)})$, que é o levantamento de um campo sobre $\mathcal{E}$, é ***característico*** *se e somente se ele é isotrópico com respeito à $g_{\mathcal{E}}$, isto é, $g_{\mathcal{E}}(X, X) = 0$.*

Toda escolha de uma forma de volume $\Omega_{\mathcal{E}}$ sobre $\mathcal{E}$ permite definir a forma bilinear simétrica conforme $g_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{F}(\mathcal{E})$ sobre o prolongamento infinito $\mathcal{E}^{(\infty)}$, tal que

$$\boxed{g_{\mathcal{E}}(Z_1, Z_2)\Omega_{\mathcal{E}} = L_{Z_1}(d\bar{\omega}) \wedge L_{Z_2}(d\bar{\omega}) \wedge \bar{\omega} \wedge \bar{\omega}_x \wedge \bar{\omega}_y.}$$

Definição

Um campo horizontal $X \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^{(\infty)})$, que é o levantamento de um campo sobre $\mathcal{E}$, é ***característico*** *se e somente se ele é isotrópico com respeito à $g_{\mathcal{E}}$, isto é, $g_{\mathcal{E}}(X, X) = 0$.*

A matriz representativa de $g_{\mathcal{E}}$ na base $\{\bar{D}_x, \bar{D}_y\}$ é

$$\begin{pmatrix} F_{u_{yy}} & -\frac{F_{u_{xy}}}{2} \\ -\frac{F_{u_{xy}}}{2} & F_{u_{xx}} \end{pmatrix},$$

a menos de um fator em $C^{\infty}(\mathcal{E})$. Um campo $X = \mu\bar{D}_x + \lambda\bar{D}_y$ é um campo característico se e somente se λ, μ são soluções da ***equação característica***:

$$\boxed{F_{u_{xx}}\lambda^2 - F_{u_{xy}}\lambda\mu + F_{u_{yy}}\mu^2 = 0.}$$

Definição

Uma equação diferencial parcial da segunda ordem

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

para uma função $u = u(x, y)$, *é* ***hiperbólica***, ***parabólica*** *ou* ***elíptica*** *quando*

$$\Delta = F_{u_{xy}}^2 - 4F_{u_{xx}}F_{u_{yy}},$$

satisfaz $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ *ou* $\Delta < 0$, *respectivamente.*

Definição

Uma equação diferencial parcial da segunda ordem

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

para uma função $u = u(x, y)$, *é* ***hiperbólica***, ***parabólica*** *ou* ***elíptica*** *quando*

$$\Delta = F_{u_{xy}}^2 - 4F_{u_{xx}}F_{u_{yy}},$$

satisfaz $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ *ou* $\Delta < 0$, *respectivamente.*

- A equação de Liouville

$$u_{xy} = e^u, \tag{1}$$

é uma equação hiperbólica.

Definição

Uma equação diferencial parcial da segunda ordem

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

para uma função $u = u(x, y)$, *é* ***hiperbólica***, ***parabólica*** *ou* ***elíptica*** *quando*

$$\Delta = F_{u_{xy}}^2 - 4F_{u_{xx}}F_{u_{yy}},$$

satisfaz $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ *ou* $\Delta < 0$, *respectivamente.*

- A equação de Liouville

$$u_{xy} = e^u, \tag{1}$$

  é uma equação hiperbólica.

- A equação do calor

$$u_t = u_{xx}, \tag{2}$$

  é uma equação parabólica.

Das observações feitas na seção anterior, sabemos que uma equação hiperbólica $\mathcal{E}$ possui dois campos característicos

$$X = \mu_1 \bar{D}_x + \lambda_1 \bar{D}_y \quad \text{e} \quad Y = \mu_2 \bar{D}_x + \lambda_2 \bar{D}_y$$

linearmente independentes.

Definição (Integrabilidade segundo Darboux)

*Dizemos que a equação $\mathcal{E}$ é **integrável segundo Darboux** nos níveis $h, k \geqslant 1$ se existem dois invariantes $I, \tilde{I}$ de X, funcionalmente independentes, de ordem menor ou igual à h, e dois invariantes $J, \tilde{J}$ de Y, funcionalmente independentes, de ordem menor ou igual à k.*

Exemplo

Para a equação de Liouville

$$u_{xy} = e^u,$$

as derivadas totais restritas à equação $X = \bar{D}_x$ e $Y = \bar{D}_y$ são campos característicos.

Logo

$$I = y \ \text{ e } \ \tilde{I} = u_{yy} - \frac{u_y^2}{2}$$

são invariantes de $\bar{D}_x$ de ordem menor ou igual à 2, enquanto que

$$J = x \ \text{ e } \ \tilde{J} = u_{xx} - \frac{u_x^2}{2}$$

são invariantes de $\bar{D}_y$ de ordem menor ou igual à 2.

Assim, a equação de Liouville é 2-Darboux integrável. Além disto, considerando Σ a subvariedade 5-dimensional descrita pelo sistema

$$\begin{cases} u_{xy} = e^u, \\ u_{xx} = \varphi(x) + \dfrac{u_x^2}{2}, \\ u_{yy} = \psi(y) + \dfrac{u_y^2}{2}, \end{cases}$$

as restrições à Σ das formas de Cartan resultam ser

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= du - u_x dx - u_y \psi dy, \\ \bar{\omega}_x &= du_x - \left(\varphi(x) + \frac{u_x^2}{2}\right) dx - e^u dy, \\ \bar{\omega}_y &= du_y - e^u dx - \left(\psi(y) + \frac{u_y^2}{2}\right) dy. \end{aligned}$$

A distribuição

$$C^2(\Sigma) = Ann\{\omega, \omega_x, \omega_y\}|_\Sigma = \langle D_x^{(2)}|_\Sigma, D_y^{(2)}|_\Sigma \rangle$$

é 2-dimensional e completamente integrável.

Portanto, a solução geral da equação de Liouville pode ser escrita na forma

$$u = \ln\left(2\frac{U'V'}{(U+V)^2}\right),$$

onde $U(x)$ e $V(y)$ são funções arbitrárias, com $U'V' > 0$.

Linearização universal e invariantes de Laplace generalizados

Sobre prolongamento infinito $\mathcal{E}^{(\infty)}$ as formas de Cartan são relacionadas pela ***linearização universal***

$$\boxed{d_V F = F_{u_{xx}}\bar{\omega}_{xx} + F_{u_{xy}}\bar{\omega}_{xy} + F_{u_{yy}}\bar{\omega}_{yy} + F_{u_x}\bar{\omega}_x + F_{u_y}\bar{\omega}_y + F_u\bar{\omega} = 0.}$$

No caso das equações hiperbólicas, considerando

$$X = \mu_1 \bar{D}_x + \lambda_1 \bar{D}_y, \quad Y = \mu_2 \bar{D}_x + \lambda_2 \bar{D}_y$$

campos característicos satisfazendo

$$\delta := \mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1 \neq 0$$

e

$$[X, Y] = PX + QY,$$

obtemos

$$\boxed{X(Y(\bar{\omega})) + AX(\bar{\omega}) + BY(\bar{\omega}) + C\bar{\omega} = 0,}$$

ou

$$\boxed{Y(X(\bar{\omega})) + DX(\bar{\omega}) + EY(\bar{\omega}) + G\bar{\omega} = 0.}$$

Os primeiros ***invariantes de Laplace generalizados*** são

$$H_0 = X(A) + AB - C, \quad K_0 = Y(E) + DE - G.$$

Proposição

Se $H_i \neq 0$, então os invariantes de Laplace generalizados satisfazem as seguintes recorrências:

$$\begin{aligned} H_{i+1} =& 2H_i - H_{i-1} - X(Y(\ln H_i)) + QY(\ln H_i) + \phi, \\ K_{j+1} =& 2K_j - K_{j-1} - Y(X(\ln K_j)) - PX(\ln K_j) + \phi, \end{aligned}$$

onde

$$\phi := Y(Q) + 2PQ - X(P).$$

Teorema (Anderson, Kamran - 1997)

Se uma equação diferencial hiperbólica da forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

é Darboux integrável, então existem $m, n \geqslant 0$, tais que $H_m = K_n = 0$.

Teorema (Anderson, Juráš - 1997)

Se uma equação hiperbólica

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

admite invariantes de Laplace $H_m = 0$ (resp. $K_n = 0$), então ela é Darboux semi-integrável, e X possui três invariantes funcionalmente independentes de ordem menor ou igual à $m + 2$ (resp. Y possui três invariantes funcionalmente independentes de ordem menor ou igual à $n + 2$).

Sistemas hiperbólicos e distribuições hiperbólicas

Definição

Um ***sistema hiperbólico*** *de classe r é um sistema diferencial exterior $\mathcal{I}$ sobre uma variedade M de dimensão $r+4$, tal que localmente existe um correferencial $\{\theta_1, \ldots, \theta_r, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \check{\omega}_1, \check{\omega}_2\}$, em que $\mathcal{I}$ é algebricamente gerado pelas formas*

$$\mathcal{I} = \{\theta_1, \ldots, \theta_r, \hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2, \check{\omega}_1 \wedge \check{\omega}_2\}.$$

Definição

Um ***sistema hiperbólico*** *de classe r é um sistema diferencial exterior $\mathcal{I}$ sobre uma variedade M de dimensão $r+4$, tal que localmente existe um correferencial $\{\theta_1, \ldots, \theta_r, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \check{\omega}_1, \check{\omega}_2\}$, em que $\mathcal{I}$ é algebricamente gerado pelas formas*

$$\mathcal{I} = \{\theta_1, \ldots, \theta_r, \hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2, \check{\omega}_1 \wedge \check{\omega}_2\}.$$

Definição

Uma distribuição suave Δ completamente não integrável sobre uma variedade M é uma ***distribuição hiperbólica*** *se existem duas subdistribuições suaves $\hat{\Delta}, \check{\Delta} \subset \Delta$ tais que*

$$\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta} \ \ e \ \ [\hat{\Delta}, \check{\Delta}] \subset \Delta.$$

Definição

Um sistema hiperbólico $\mathcal{I}$, localmente, algebricamente gerado por $\{\theta_1, \ldots, \theta_r, \hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2, \check{\omega}_1 \wedge \check{\omega}_2\}$ é ***Darboux integrável*** *se $\{\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2\}$ e $\{\check{\omega}_1, \check{\omega}_2\}$ são completamente integráveis.*

Definição

Um sistema hiperbólico $\mathcal{I}$, localmente, algebricamente gerado por $\{\theta_1, \ldots, \theta_r, \hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2, \check{\omega}_1 \wedge \check{\omega}_2\}$ é ***Darboux integrável*** *se $\{\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2\}$ e $\{\check{\omega}_1, \check{\omega}_2\}$ são completamente integráveis.*

Definição

Uma distribuição hiperbólica $\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta}$ é ***Darboux integrável*** *se*

$$\hat{\Delta}^{(\infty)} \cap \check{\Delta} = \hat{\Delta} \cap \check{\Delta}^{(\infty)} = \{0\}.$$

Definição

Um sistema hiperbólico $\mathcal{I}$, localmente, algebricamente gerado por $\{\theta_1, \ldots, \theta_r, \hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2, \check{\omega}_1 \wedge \check{\omega}_2\}$ é ***Darboux integrável*** *se $\{\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2\}$ e $\{\check{\omega}_1, \check{\omega}_2\}$ são completamente integráveis.*

Definição

Uma distribuição hiperbólica $\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta}$ é ***Darboux integrável*** *se*

$$\hat{\Delta}^{(\infty)} \cap \check{\Delta} = \hat{\Delta} \cap \check{\Delta}^{(\infty)} = \{0\}.$$

Teorema

Sejam Δ uma distribuição suave e $\mathcal{I}$ um sistema diferencial exterior, tais que $\Delta = Ann(\mathcal{I})$. Então, Δ é hiperbólica se e só se $\mathcal{I}$ é hiperbólico. Além disto, Δ é Darboux integrável se e só se $\mathcal{I}$ é Darboux integrável.

Proposição

Em todo prolongamento $\mathcal{E}^h$ de uma equação hiperbólica $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ a distribuição de Cartan $\mathcal{C}^{h+2}(\mathcal{E})$ é uma distribuição hiperbólica, que se decompõe em

$$\mathcal{C}^{h+2}(\mathcal{E}) = \hat{\Delta}^h \oplus \check{\Delta}^h,$$

com $\dim \hat{\Delta}^h = \dim \check{\Delta}^h$.

Proposição

Em todo prolongamento $\mathcal{E}^h$ de uma equação hiperbólica $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ a distribuição de Cartan $\mathcal{C}^{h+2}(\mathcal{E})$ é uma distribuição hiperbólica, que se decompõe em

$$\mathcal{C}^{h+2}(\mathcal{E}) = \hat{\Delta}^h \oplus \check{\Delta}^h,$$

com $\dim \hat{\Delta}^h = \dim \check{\Delta}^h$.

Teorema

Seja $\mathcal{E}$ uma equação hiperbólica. São equivalentes

1. $\mathcal{E}$ é Darboux integrável em algum nível $n \in \mathbb{N}$;
2. $\mathcal{C}^{n+2}(\mathcal{E})$ é Darboux integrável para algum $n \in \mathbb{N}$;
3. Existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $H_m = K_n = 0$.

Teorema (Anderson, Fels, Vassilou - 2009)

Seja $\mathcal{I}$ um sistema Darboux integrável sobre uma variedade M. Então, existem sistemas Pfaffianos W_1 e W_2 sobre variedades suaves M_1 e M_2, respectivamente, e um grupo de Lie G de simetrias finitas agindo sobre M_1 e M_2 tais que, localmente,

1. $M = {}^{M_1 \times M_2}/_{diag(G)}$;
2. $\mathcal{I} = {}^{(q_1^*(\mathcal{W}_1)+q_2^*(\mathcal{W}_2))}/_{diag(G)}$, onde $\mathcal{W}_i = {}^{W_i}/_{G}$;
3. A aplicação quociente $q\colon M_1 \times M_2 \to M$ da ação diagonal $diag(G)$ satisfaz

$$q^*(\mathcal{I}) \subset (\pi_1^*(\mathcal{W}_1) + \pi_2^*(\mathcal{W}_2)),$$

i.e. q é uma **superposição**.

Sobre a equação de Liouville

$$\mathcal{E} = \{u_{xy} = e^u\},$$

a distribuição de Cartan se decompõe em

$$\mathcal{C}^2(\mathcal{E}) = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta},$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{\Delta} =& \langle \partial x + u_x \partial u + u_{xx} \partial u_x + e^u \partial u_y, \partial u_{xx} \rangle,\\ \check{\Delta} =& \langle \partial y + u_y \partial u + e^u \partial u_x + u_{yy} \partial u_y, \partial u_{yy} \rangle,\end{aligned}$$

e é Darboux integrável. De fato

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}^{(\infty)} =& \langle \partial x + u_x \partial u + u_{xx} \partial u_x + e^u \partial u_y, \partial u, \partial u_x, \partial u_{xx} \rangle,\\ \check{\Delta}^{(\infty)} =& \langle \partial y + u_y \partial u + e^u \partial u_x + u_{yy} \partial u_y, \partial u, \partial u_y, \partial u_{yy} \rangle,\end{aligned}$$

e $\hat{\Delta}^{(\infty)} \cap \check{\Delta} = \hat{\Delta} \cap \check{\Delta}^{(\infty)} = \{0\}$.

Além disto, temos que

$$\boxed{\mathcal{E} = {}^{J^3(\pi_1)\times J^3(\pi_2)}\!/_{diag(SL(2))}, \quad \text{e} \quad C^2(\mathcal{E}) = {}^{C^3(\pi_1)\oplus C^3(\pi_2)}\!/_{diag(SL(2))},}$$

onde $\pi_1, \pi_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são dados por $\pi_1(x, U) = x, \quad \pi_2(y, V) = y$. De fato, considerando os terceiros prolongamentos dos geradores infinitesimais da ação diagonal

$$\begin{aligned}
Z_1 = \partial U + \partial V, \qquad Z_2 &= U\partial U + U'\partial U' + U''\partial U'' + U'''\partial U''' \\
&\quad + \partial V + V'\partial V' + V''\partial V'' + V''''\partial V''', \\
Z_3 &= U^2\partial U + 2UU'\partial U' + 2(U'^2 + UU'')\partial U'' \\
&\quad + 2(2U'U'' + U''^2 + UU''')\partial U''' \\
&\quad + V^2\partial V + 2VV'\partial V' + 2(V'^2 + VV'')\partial V'' \\
&\quad + 2(2V'V'' + V''^2 + VV''')\partial V'''
\end{aligned}$$

a aplicação quociente é dada por

$$\begin{aligned}
&q(x, U, U', U'', U''', y, V, V', V'', V''') = \\
&= \left(x, y, u = \ln\left(2\tfrac{U'V'}{(U+V)^2}\right), D_x(u), D_y(u), D_x^2(u), D_y^2(u)\right).
\end{aligned}$$

Classificação de Goursat-Vessiot

Nos trabalhos de Goursat e Vessiot foi provado que, a menos de transformações de contato, toda equação hiperbólica da segunda ordem de tipo f-Gordon é Darboux integrável no nível 2 é equivalente à uma das seguintes:

(i) $(x+y)u_{xy} = 2\sqrt{u_x u_y}$;

(ii) $uu_{xy} = \sqrt{1+u_x^2}\sqrt{1+u_y^2}$;

(iii) $(\sin u)u_{xy} = \sqrt{1+u_x^2}\sqrt{1+u_y^2}$;

(iv) $uu_{xy} = \pm\phi(u_x)\psi(u_y)$,

onde $\phi(t), \psi(t)$ satisfazem a equação $f'(t) \pm \frac{t}{f(t)} = K$ para alguma constante $K \neq 0$;

(v) $(x+y)u_{xy} = \gamma(u_x)\gamma(u_y)$,

onde γ é implicitamente definida por $\gamma(t) - 1 = \exp(t - \gamma(t))$;

(vi) $u_{xy} = e^u \sqrt{1 + u_x^2}$;

(vii) $u_x - yu_{xy} = f(x, u_{xy})$;

(viii) $u_{xy} = e^u$;

(ix) $u_{xy} = u_x e^u$;

(x) $u_{xy} = \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{u+y}\right) u_x u_y$;

(xi) $u_{xy} = \frac{2u}{(x+y)^2}$;

(xii) $u_{xy} = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y - a(x,y)b(x,y)u$,

com invariantes de Laplace $h = -a_x, k = -b_y$ que satisfazem os sistema

$$\begin{cases} (\ln h)_{xy} = 2h - k \\ (\ln k)_{xy} = 2k - h \end{cases}$$

com $h \neq k$, estas equações podem ser divididas em duas classes de equivalência descritas por Vessiot.

Considerações finais

- A generalização da noção de integrabilidade segundo Darboux para distribuições hiperbólicas permite aplicar este método para obter soluções exatas de equações mais gerais.
- Ainda é desconhecida a total extensão da noção de integrabilidade segundo Darboux no sentido geométrico e suas aplicações à integrabilidade de equações diferenciais parciais.

  Exemplo: São equivalente

  1. Uma equação hiperbólica $\mathcal{E}$ é 1-Darboux integrável ;
  2. $H_0 = K_0 = 0$;
  3. $\mathcal{E}$ é equivalente à equação de onda $u_{xy} = 0$.

Bibliografia principal

[1] I. M. Anderson, M. E. Fels, and P. J. Vassiliou. Superposition formulas for exterior differential systems. *Advances in Mathematics*, 2009.

[2] I. M. Anderson and M. Juráš. Generalized laplace invariants and the method of darboux. *Duke Mathematical Journal*, 1997.

[3] I. M. Anderson and N. Kamran. The variational bicomplex for hyperbolic second-order scalar partial differential equations in the plane. *Duke Mathematical Journal*, 1997.

[4] J. N. Clelland and T. A. Ivey. Bäcklund transformations and darboux integrability for nonlinear wave equations. *Asian Journal of Mathematics*, 2009.

[5] G. Darboux. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 1870.

[6] B. P. Ashley. Transformation Groups and the Method of Darboux. Diss. Utah State University, Doctoral dissertation, 2021.

Bibliografia principal

[7] D. C. Ferraioli and A. Vinogradov. Differential invariants of generic parabolic monge-ampère equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2012.

[8] R. B. Gardner. A differential geometric generalization of characteristics. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1969.

[9] E. Goursat. *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre-Tome 2*. A. Hermann, 1891.

[10] N. H. Ibragimov *Laplace type invariants for parabolic equations*. Nonlinear Dynamics, Springer, 2002.

[11] N. Kamran and K. Tenenblat. Laplace transformation in higher dimensions. *Duke Mathematical Journal*, 1996.

[12] V. Sokolov and A. Zhiber. On the darboux integrable hyperbolic equations. *Physics Letters A*, 1995.

Obrigado