Fundamentos de Geometria Finsler

Benigno Oliveira Alves e Patrícia Marçal

VIII EPGMAT

24 de Novembro de 2023.

Relembrando: pré-geodésica e Geodésica

Seja F uma métrica pré-Finsler.

Uma curva suave $\gamma : (a, b) \to M$ é uma pré-geodésica se for ponto crítico do funcional comprimento, que é dado por

$$L(\beta) = \int_a^b F(\beta')dt$$

para curvas suaves por partes $\beta : (a, b) \to M$.
Se adicionalmente $F(\gamma') = cte$, γ é uma geodésica.

Geodésica Magnética

Seja B um campo magnético em $\mathbb{R}^3$ ($divB = 0$). Em particular, existe campo J tal que

$$B = rot\ J.$$

Chamaremos o par $(\langle , \rangle, B)$ de estrutura magnética.

Geodésica Magnética

Seja B um campo magnético em $\mathbb{R}^3$ ($divB = 0$). Em particular, existe campo J tal que

$$B = rot\ J.$$

Chamaremos o par $(\langle , \rangle, B)$ de estrutura magnética. Seja $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ uma partícula carregada de massa m e carga e.

Geodésica Magnética

Seja B um campo magnético em $\mathbb{R}^3$ ($divB = 0$). Em particular, existe campo J tal que

$$B = rot\ J.$$

Chamaremos o par $(\langle , \rangle, B)$ de estrutura magnética. Seja $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ uma partícula carregada de massa m e carga e. A força de Lorentz é o campo anisotrópico

$$Y(v_p) = e(v \times B(p)).$$

Geodésica Magnética

Seja B um campo magnético em $\mathbb{R}^3$ ($divB = 0$). Em particular, existe campo J tal que

$$B = rot\ J.$$

Chamaremos o par $(\langle , \rangle, B)$ de estrutura magnética. Seja $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ uma partícula carregada de massa m e carga e. A força de Lorentz é o campo anisotrópico

$$Y(v_p) = e(v \times B(p)).$$

Pela 2° Lei de Newton,

$$m\gamma''(t) = Y(\gamma'(t))$$

Geodésica Magnética

Seja B um campo magnético em $\mathbb{R}^3$ ($divB = 0$). Em particular, existe campo J tal que

$$B = rot\ J.$$

Chamaremos o par $(\langle , \rangle, B)$ de estrutura magnética. Seja $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ uma partícula carregada de massa m e carga e. A força de Lorentz é o campo anisotrópico

$$Y(v_p) = e(v \times B(p)).$$

Pela 2° Lei de Newton,

$$m\gamma''(t) = Y(\gamma'(t))$$

Nesse caso, γ é uma Geodésica magnética de $(\langle , \rangle, B)$.

Geodésica Magnética e Geometria Finsler

Theorem

Uma curva $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ é geodésica magnética da estrutrua magnética $(\langle , \rangle, B)$ com energia c se, e somente se, γ é uma pré-geodésica da métrica pré-Randers

$$R(v) = \sqrt{\langle v, v \rangle} + \frac{e}{\sqrt{2c}} \langle v, J \rangle.$$

onde e é a carga e $c = \langle \gamma', \gamma' \rangle$.

Geodésica Magnética e Geometria Finsler

Theorem

Uma curva $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ é geodésica magnética da estrutrua magnética $(\langle , \rangle, B)$ com energia c se, e somente se, γ é uma pré-geodésica da métrica pré-Randers

$$R(v) = \sqrt{\langle v, v \rangle} + \frac{e}{\sqrt{2c}} \langle v, J \rangle.$$

onde e é a carga e $c = \langle \gamma', \gamma' \rangle$.

Demonstração.

Argumento de Cálculo Variacional... $\square$

Ortogonalidade

Sejam (V, F) espaço de Minkowski e g seu tensor fundamental. Dado L subespaço vetorial de V.

$$v \text{ é ortogonal a } L \iff g_v(v, u) = 0 \ \forall u \in L$$

O cone ortogonal a L é o conjunto dos vetores ortogonais a L.

Ortogonalidade

Sejam (V, F) espaço de Minkowski e g seu tensor fundamental. Dado L subespaço vetorial de V.

$$v \text{ é ortogonal a } L \quad \Longleftrightarrow \quad g_v(v, u) = 0 \ \forall u \in L$$

O cone ortogonal a L é o conjunto dos vetores ortogonais a L.

Proposição

Se R é métrica Randers com data $(\langle , \rangle, W)$, então

$$g_v(v, u) = \langle v - W, u \rangle$$

$\forall v \in \mathcal{I}_R$.

Ortogonalidade

Sejam (V, F) espaço de Minkowski e g seu tensor fundamental. Dado L subespaço vetorial de V.

$$v \text{ é ortogonal a } L \iff g_v(v, u) = 0 \ \forall u \in L$$

O cone ortogonal a L é o conjunto dos vetores ortogonais a L.

Proposição

Se R é métrica Randers com data $(\langle , \rangle, W)$, então

$$g_v(v, u) = \langle v - W, u \rangle$$

$\forall v \in \mathcal{I}_R$. Em particular, $v \in \mathcal{I}_R$ é F-ortogonal a L sse $v - W$ é $\|.\|$-ortogonal a L.

Gradiente

O gradiente de uma função suave f é um campo vetorial dado implicitamente por

$$g_{\nabla f(p)}(\nabla f(p), u) = df_p(u), \ \forall u \in T_p V.$$

Gradiente

O gradiente de uma função suave f é um campo vetorial dado implicitamente por

$$g_{\nabla f(p)}(\nabla f(p), u) = df_p(u), \ \forall u \in T_pV.$$

Risco de confusão: $\nabla^F f$

Gradiente

O gradiente de uma função suave f é um campo vetorial dado implicitamente por

$$g_{\nabla f(p)}(\nabla f(p), u) = df_p(u), \ \forall u \in T_pV.$$

Risco de confusão: $\nabla^F f$

Propriedades:

1. ∇f é F-ortogonal aos níveis regulares;
2. f cresce na direção de ∇f; e
3. ∇f é a direção que f mais cresce.

Gradiente

Proposição

Se R é norma Randers com data de navegação $(\langle , \rangle, W)$, então

Gradiente

Proposição

Se R é norma Randers com data de navegação $(\langle , \rangle, W)$, então

(a) $$\frac{\nabla^R f}{R(\nabla^R f)} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} + W$$

Gradiente

Proposição

Se R é norma Randers com data de navegação $(\langle , \rangle, W)$, então

(a) $\dfrac{\nabla^R f}{R(\nabla^R f)} = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|} + W$

(b) $R(\nabla^R f) = \|\nabla f\| + df(W)$.

onde ∇f e $\widetilde{\nabla} f$ são o R-gradiente e o $\|.\|$-grandiete de f resp.

Forma Volume Finsleriana

Uma forma volume Finsleriana é uma aplicação que associa a cada métrica Finsler F uma forma volume ν^F tal que

Forma Volume Finsleriana

Uma forma volume Finsleriana é uma aplicação que associa a cada métrica Finsler F uma forma volume ν^F tal que

1. F é a norma euclidiana $\implies \nu^F = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

Forma Volume Finsleriana

Uma forma volume Finsleriana é uma aplicação que associa a cada métrica Finsler F uma forma volume ν^F tal que

1. F é a norma euclidiana $\implies \nu^F = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$
2. $\varphi : (M, F) \to (N, \tilde{F})$ com $F \leq \varphi^* \tilde{F} \implies \int_A \nu^F \leq \int_{\varphi(A)} \nu^{\tilde{F}}$

Forma Volume Finsleriana

Uma forma volume Finsleriana é uma aplicação que associa a cada métrica Finsler F uma forma volume ν^F tal que

1. F é a norma euclidiana $\implies \nu^F = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$
2. $\varphi : (M, F) \to (N, \tilde{F})$ com $F \leq \varphi^* \tilde{F} \implies \int_A \nu^F \leq \int_{\varphi(A)} \nu^{\tilde{F}}$
3. φ é isometria $\implies \int_A \nu^F = \int_{\varphi(A)} \nu^{\tilde{F}}$

Forma Volume Finsleriana

Uma forma volume Finsleriana é uma aplicação que associa a cada métrica Finsler F uma forma volume ν^F tal que

1. F é a norma euclidiana $\implies \nu^F = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$
2. $\varphi : (M, F) \to (N, \tilde{F})$ com $F \leq \varphi^* \tilde{F} \implies \int_A \nu^F \leq \int_{\varphi(A)} \nu^{\tilde{F}}$
3. φ é isometria $\implies \int_A \nu^F = \int_{\varphi(A)} \nu^{\tilde{F}}$

Teorema

Existe uma única forma volume Riemanniana.

Forma Volume Finsleriana

Uma forma volume Finsleriana é uma aplicação que associa a cada métrica Finsler F uma forma volume ν^F tal que

1. F é a norma euclidiana $\implies \nu^F = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$
2. $\varphi : (M, F) \to (N, \tilde{F})$ com $F \leq \varphi^* \tilde{F} \implies \int_A \nu^F \leq \int_{\varphi(A)} \nu^{\tilde{F}}$
3. φ é isometria $\implies \int_A \nu^F = \int_{\varphi(A)} \nu^{\tilde{F}}$

Teorema

Existe uma única forma volume Riemanniana.

Cuidado! Em geral, não existe uma única forma volume Finsleriana.

Laplaciano

Seja (M, F, ν) uma espaço m - Finsler, onde ν é uma forma volume Finsleriana.

Laplaciano

Seja (M, F, ν) uma espaço m - Finsler, onde ν é uma forma volume Finsleriana. O laplaciano (não-Linear) de uma função suave f é a função

$$\triangle f := div \nabla f$$

Laplaciano

Seja (M, F, ν) uma espaço m - Finsler, onde ν é uma forma volume Finsleriana. O laplaciano (não-Linear) de uma função suave f é a função

$$\triangle f := div \nabla f$$

Proposição Se R é uma métrica Randers com data de navegação $(\langle , \rangle, W)$ e ν é uma forma volume Finsler, então

Laplaciano

Seja (M, F, ν) uma espaço m - Finsler, onde ν é uma forma volume Finsleriana. O laplaciano (não-Linear) de uma função suave f é a função

$$\triangle f := div \nabla f$$

Proposição Se R é uma métrica Randers com data de navegação $(\langle , \rangle, W)$ e ν é uma forma volume Finsler, então

$$\frac{1}{R(\nabla^R f)}\left[\triangle^R f - Hess^R f\left(\frac{\nabla^R f}{R(\nabla^R f)}, \frac{\nabla^R f}{R(\nabla^R f)}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{\|\nabla f\|}\left[\triangle f - Hess\ f\left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}, \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right)\right] + div\ W.$$

Obrigado!