# Teoria geral de Cones com aplicações ao estudo de estados de equilíbrio de transformações de grau variável

Armando Castro Universidade Federal da Bahia

Salvador, 24 de novembro de 2023

Trabalho conjunto com Sávio Santana (UFBA).



## Motivação: Estados de Equilíbrio

Durante essa palestra f denotará um sistema dinâmico discreto  $C^r$  por partes,  $r \geq 1$ , definido em uma variedade compacta M. Pelo **princípio variacional**, a pressão topológica

$$P_{\phi}(f) = \sup\{h_{\mu}(f) + \int \phi d\mu; \mu \in \mathcal{M}^1_f(X)\},$$

onde  $h_{\mu}$  denota a entropia métrica de  $\mu$ .

Nesse caso,  $\mu$  é chamado de **estado de equilíbrio para**  $(f, \phi)$  se realizar o supremo acima.

Seja W= espaço apropriado de funções

O operador de Perron-Frobënius associado a dinâmica f e potencial  $\phi$  é o operador  $L_{f,\phi}:W\to W$  dado por

$$L_{f,\phi}(\varphi)(x) := \sum_{j=1}^{\deg(x)} \varphi(x_j) e^{\phi(x_j)}$$

para  $\varphi \in W$ , onde  $f^{-1}(x) = \{x_1, \dots, x_{\deg(x)}\}$  para todo  $x \in M$ .

Seja W= espaço apropriado de funções

O operador de Perron-Frobënius associado a dinâmica f e potencial  $\phi$  é o operador  $L_{f,\phi}:W\to W$  dado por

$$L_{f,\phi}(\varphi)(x) := \sum_{j=1}^{\deg(x)} \varphi(x_j) e^{\phi(x_j)}$$

para  $\varphi \in W$ , onde  $f^{-1}(x) = \{x_1, \dots, x_{\deg(x)}\}$  para todo  $x \in M$ .

**Obs:** Se  $W = C^0(M)$ , com M espaço métrico compacto:

$$L_{f,\phi}:C^0(M)\to C^0(M)$$

$$(L_{f,\phi})^*:\mathcal{M}(M)\to\mathcal{M}(M)$$

Bowen: Se  $W = C^0(M)$  e f expansora:

•  $(L_{f,\phi})^*: \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(M)$  possui um autovalor dominante associado a uma única automedida de probabilidade boreliana  $\nu$ .

Bowen: Se  $W = C^0(M)$  e f expansora:

- $(L_{f,\phi})^*: \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(M)$  possui um autovalor dominante associado a uma única automedida de probabilidade boreliana  $\nu$ .
- $L_{f,\phi}: C^0(M) \to C^0(M)$  possui um autovalor dominante associada a uma única autofunção normalizada  $\eta$ .

Bowen: Se  $W = C^0(M)$  e f expansora:

- $(L_{f,\phi})^*: \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(M)$  possui um autovalor dominante associado a uma única automedida de probabilidade boreliana  $\nu$ .
- $L_{f,\phi}: C^0(M) \to C^0(M)$  possui um autovalor dominante associada a uma única autofunção normalizada  $\eta$ .
- $\mu = \int \eta d\nu$  é o estado de equilíbrio associado a f e  $\phi$ .

## Condição Markoviana

No trabalho atual, consideraremos aplicações  $f:M\to M$  contínuas por partes, não uniformemente expansoras. Vamos supor adicionalmente que M seja particionada em uma coleção de certas regiões (que chamaremos de retângulos) nos quais ramos inversos de nossa dinâmica estejam bem definidos como difeomorfismo local. A imagem de cada ramo inverso de um retângulo está contida em algum retângulo. Fixado um retângulo, todos os seus pontos possuem o mesmo número de pré-imagens.

# Decaimento Exponencial de Correlações

Dizemos que  $\mu$  exibe decaimento exponencial de correlações para observáveis Hölder contínuas, se existe constante  $0 < \tau < 1$  tal que para toda  $\varphi \in L^1(\nu), \psi \in C^{\alpha}(M)$  existe  $K(\varphi, \psi) > 0$  satisfazendo

$$\left| \int_{M} (\varphi \circ f^{n}) \psi d\mu - \int_{M} \varphi d\mu \int_{M} \psi d\mu \right| \leq K(\varphi, \psi) \cdot \tau^{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

### Teorema Central do Limite

Seja  $\varphi$  uma função Hölder contínua e considere

$$\sigma_{\varphi}^2 := \int v^2 d\mu + 2 \sum_{j=1}^{\infty} v \cdot (v \circ f^j) d\mu, \quad \text{ where } \quad v = \varphi - \int \varphi \, d\mu.$$

Dizemos que vale o Teorema Central do Limite para  $\mu$  se  $\sigma<\infty$  e  $\sigma=0$  se e só se  $\varphi=u\circ f-u$  para algum  $u\in L^1(\mu)$ . E ademais, se  $\sigma_\varphi>0$  então a seguinte convergência em distribuição

$$\mu\left(x\in M:\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\varphi(f^{j}(x))-\int\varphi d\mu\right)\in A\right)\to \frac{1}{\sigma_{\varphi}\sqrt{2\pi}}\int_{A}e^{-\frac{t^{2}}{2\sigma_{\varphi}^{2}}}dt,$$

vale quando  $n \to \infty$  para todo intervalo  $A \subset \mathcal{R}$ .

## Linear response formula

A diferenciabilidade de estados de equilíbrio  $\mu_{f,\phi}$  com respeito a dinâmica f e o potencial  $\phi$ , bem como a fórmula dessas derivadas, chama-se *linear response formula*.

Em sentido mais clássico, e fraco, corresponde à diferenciabilidade de:

$$(f,\phi)\mapsto \int_{\mathcal{M}} \varphi d\mu_{f,\phi}\in\mathbb{R},$$

onde  $\varphi:M\to\mathbb{R}$  é algum observável fixado.

## Gap espectral forte

Seja E um Espaço de Banach.

Um operador  $L \in \mathcal{L}(E)$  é dito ter a propriedade de lacuna (gap) espectral forte se existe um único autovalor  $\lambda$  cujo módulo é igual ao raio espectral (autovalor dominante) com autoespaço associado unidimensional, e todo o resto do espectro de L está contido em uma bola em  $\mathbb C$  cujo raio é estritamente menor que o raio espectral.

## Um pouco de Teoria Espectral

Dado um operador  $L \in \mathcal{L}(E)$  com gap espectral, a projeção espectral sobre o autoespaço do autovalor dominante é dada por:

$$P(\cdot) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - L)^{-1} dz\right)(\cdot),$$

onde  $\Gamma$  é uma curva de Jordan que não intersecta  $\sigma(L)$  e o autovalor dominante é o único elemento do espectro pertencente a região limitada que tem  $\Gamma$  por fronteira.

## Cones convexos projetivos

Seja C um cone convexo em um espaço vetorial topológico. Suponha que  $C\cap\overline{C}=\{0\}$ . Um tal cone convexo é chamado de cone projetivo.

## Métricas projetivas

Dado um cone projetivo C, definimos:

$$\alpha(v,w) := \sup I\{t > 0; w - t \cdot v \in C\}$$

е

$$\beta(v,w) := \inf I\{s > 0; s \cdot v - w \in C\}.$$

A métrica projetiva associada a *C* é dada por:

$$\theta(v, w) := \log \frac{\beta(v, w)}{\alpha(v, w)}.$$

convencionando-se  $\theta = +\infty$  se  $\alpha = 0$  ou  $\beta = +\infty$ .

## Métrica Projetiva

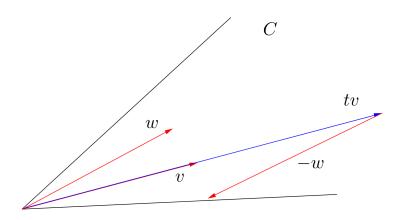


Figure:  $\beta(v, w)$ .

## Métrica Projetiva

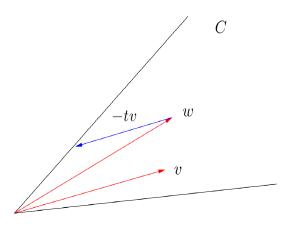


Figure:  $\alpha(v, w)$ .

## Cones Invariantes

#### **Teorema**

Sejam  $E_1$  e  $E_2$  espaços vetoriais spaces e sejam  $C_1 \subset E_1$  e  $C_2 \subset E_2$  cones projetivos. Se  $L: E_1 \to E_2$  é um operador linear tal que  $L(C_1) \subset C_2$  e  $D = \sup I\{\theta_2(L(v), L(w)); v, w \in C_1\} < \infty$  então

$$\theta_2(L(v),L(w)) \leq \left(1-e^{-D}\right)\theta_1(v,w),$$

para todos  $v, w \in C_1$ .

# Alguns Exemplos de Cones e suas Métricas projetivas

- O cone  $C^+ := \{ \varphi : M \to \mathbb{R}, \varphi > 0 \}$ . Nesse caso,  $\Theta_+(v,w) := \log \sup_{x,y} \left( \frac{v(x)w(y)}{v(y)w(x)} \right)$ .
- O cone  $C_{\kappa}:=\Big\{arphi\in C^{lpha}(M,\mathbb{R}): arphi>0 ext{ and } rac{|arphi|_{lpha}}{\inf arphi}\leq \kappa\Big\}.$  Nesse caso  $\Theta_{\kappa}(arphi,\psi)=\log rac{B_{\kappa}(arphi,\psi)}{A_{\kappa}(arphi,\psi)}$ , onde

$$A_{\kappa}(\varphi,\psi) = \inf_{x,y,z \in M} \frac{\kappa |x-y|^{\alpha} \psi(z) - (\psi(x) - \psi(y))}{\kappa |x-y|^{\alpha} \varphi(z) - (\varphi(x) - \varphi(y))},$$

е

$$B_{\kappa}(\varphi,\psi) = \sup_{x,y,z \in M} \frac{\kappa |x-y|^{\alpha} \psi(z) - (\psi(x) - \psi(y))}{\kappa |x-y|^{\alpha} \varphi(z) - (\varphi(x) - \varphi(y))}.$$



# Métricas projetivas e Espaços Anisotrópicos

Um cone projetivo C induz uma relação de ordem  $\prec$  dada por

$$v \prec w \Leftrightarrow w - v \in C$$

Suponha que exista  $e\in C\setminus\partial C$  tal que para toda  $\varphi\in E$ , existe uma constante  $c_{\varphi}$  satisfazendo

$$-c_{\varphi}e \prec \varphi \prec c_{\varphi}e$$
.

Pondo  $\|\varphi\|:=\inf\{c_{\phi};-c_{\varphi}e\prec\varphi\prec c_{\varphi}e\}$ , pode-se checar que isso define uma norma.



## Métricas projetivas e Espaços Anisotrópicos

O espaço anisotrópico associado a C é obtido completando-se E com respeito a essa norma. Nesse caso, dizemos que e é uma unidade (unit) para E.

## A técnica de Métricas de Birkhoff

#### Pros:

- Uma vez que se obtenha um cone com invariância estrita do teorema de Birkhoff, tem-se unicidade. Eventuais hipóteses de mixing são bem fracas, comparada com técnicas alternativas. Nenhuma condição híbrida adicional é necessária para obter um autovalor dominante único com autoespaço unidimensional associado.
- Excelente na obtenção de resultados de estabilidade e *Linear response formula*.

# Cones Invariantes e espaços anisotrópicos

#### Teorema

( Castro, Liverani - Teorema do folclore.) Se um operador L exibe um cone C estritamente invariante (com respeito à métrica projetiva de C), então ele possui um strong spectral gap com respeito a norma anisotrópica.

# Teorema do folclore (Castro-Liverani)

#### **Teorema**

Suponha que  $(E, \prec)$  seja um reticulado completo dotado com uma norma anisotrópica  $\|\cdot\|$  associada a um cone convexo C. Se  $L: E \to E$  é um operador linear tal que  $L(C) \subset C$  e  $\Theta - \operatorname{diam}(L(C)) = D < +\infty$ , então L tem uma lacuna espectral forte (strong spectral gap property) operando em  $(E, \|\cdot\|)$ . Ademais, seu autovalor dominante é positivo.

Teorema do folclore (Castro)

#### Corolário

Se tomarmos como vetor unidade da norma anisotrópica um autovetor dominante, a norma obtida é adaptada ao operador L.

#### Lema

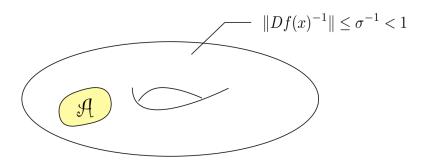
Seja C um cone convexo com unidade e e sejam v, w vetores de C com  $\|v\| = \|w\| = 1$  na norma anisotrópica associada a e. Suponha que v, w, e pertençam a  $\hat{C} \subset C$  tal que  $\Theta_C - diam(\hat{C}) \leq D < +\infty$ . Então

$$\Theta_C(v, w) \le \log((1 - \exp(D) ||v - w||)^{-2})$$

#### Teorema

(Castro-Santana.) Seja  $f:M\to M$  uma transformação não uniformemente expansora contínua por partes com condição Markoviana. Seja  $\phi$  um potencial Hölder contínuo com pequena variação. Então podemos definir um operador de Perron-Frobënius associado a f, o qual terá gap espectral forte. Se a automedida dominante do dual desse operador atribuir algum peso positivo ao interior de algum dos retângulos Markovianos, então tal medida será o único estado de equilíbrio para f. Ademais, tal estado de equilíbrio exibirá decaimento exponencial de correlações e realizará a tese do Teorema Central do Limite.

## Exemplos



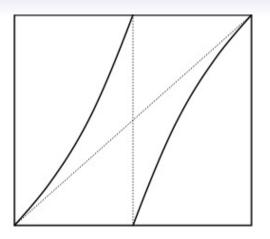


Figure: Manneville-Pomeau-alike

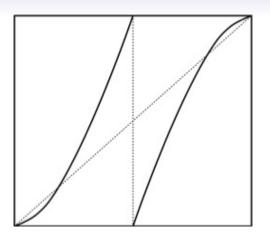


Figure: Manneville-Pomeau-alike - bifurcando.

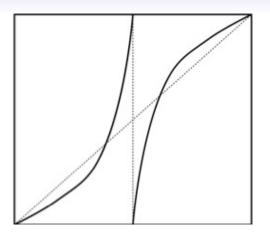


Figure: Manneville-Pomeau-alike - criando um poço

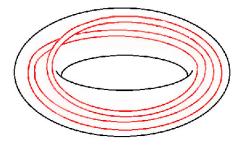
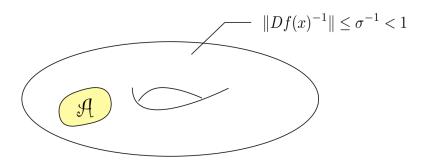


Figure: Solenóide

## Exemplos



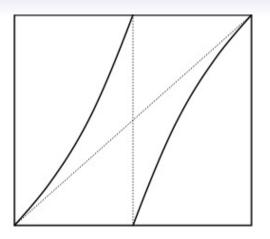


Figure: Manneville-Pomeau-alike

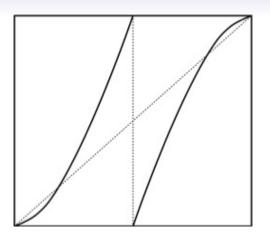


Figure: Manneville-Pomeau-alike - bifurcando.

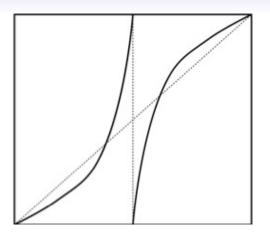


Figure: Manneville-Pomeau-alike - criando um poço

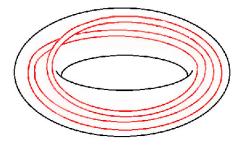


Figure: Solenóide

# Algumas Referências:

A. Castro,

Analytical techniques for linear response formula of equilibrium states.

Chaos, vol. 30, issue 1, (2020).

T. Bomfim, A. Castro, P. Varandas. Differentiability of thermodynamical quantities in non-uniformly expanding dynamics.

Advances in Mathematics, Volume 292, 478-528, 2016.

A. Castro, T. Nascimento. Statistical Properties of the maximal entropy measure for partially hyperbolic attractors. Ergodic Theory and Dynamical Systems -1 2016

A. Castro, P. Varandas. Equilibrium states for non-uniformly expanding maps: decay of correlations and strong stability. Annales de l Institut Henri Poincaré - Analyse non Lineaire, 30:2, 225-249, 2013



Sébastien Gouëzel, Carlangelo Liverani.

Compact Locally Maximal Hyperbolic sets for smooth maps: fine statistical properties.

Arxiv:math/0606722v1, 2006.



C. Liverani.

Decay of correlations,

Annals of Math., 142, 239-301, 1995.

# Obrigado por virem!

### Ideia da prova do Teorema do folclore

Mostremos que L possui um autovalor dominante positivo. Tome  $\varphi_n:=L^n(\varphi)/\|L^n(\varphi)\|$ .  $\varphi_n$  é exponentialmente Cauchy. Mais precisamente:

$$\|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \left(e^{\Theta_C(\varphi_n, \varphi_m)} - 1\right) \leq \left(e^{\lambda^{m-n}D} - 1\right) \leq 2D\lambda^{m-n}$$

Em particular, como E é completo, existe  $v = \lim_{n \to +\infty} \frac{L^n(\varphi)}{\|L^n(\varphi)\|}$ . Devido a continuidade de L, temos:

$$L(v) = \lim_{n \to +\infty} \frac{L^{n+1}(v)}{\|L^n(v)\|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{L^{n+1}(v)}{\|L^{n+1}(v)\|} \cdot \frac{\|L^{n+1}(v)\|}{\|L^n(v)\|}.$$

Como o limite inteiro existe (e é igual a L(v)) e também existe  $\lim_{n\to+\infty} \frac{L^{n+1}(v)}{\|I^{n+1}(v)\|} = v$ , então existe o limite

$$\frac{\|L^{n+1}(v)\|}{\|L^n(v)\|} =: \gamma,$$

e  $\gamma$ é autovalor de L, para o autovetor v.



#### Continuação da Prova do Teorema do folclore

Agora, mostremos que o autovalor  $\gamma$  é dominante. Como todas as normas anisotrópicas são equivalentes tomemos a norma anisotrópica tal que e=v. Como L preserva a ordem  $\prec$ , dado  $\psi \in E$ , temos

$$cv - \psi \in C, c \ge 0$$

$$cv + \psi \in C, c \ge 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L(cv - \psi) = cL(v) - L(\psi) \in C \Rightarrow c\gamma v - L(\psi) \\ L(cv + \psi) = cL(v) + L(\psi) \in C \Rightarrow c\gamma v + L(\psi) \end{cases}$$

Logo,  $\|L(\psi)\| \leq \gamma \|\psi\|$  e vale  $\gamma = \|L\|$  e que  $\gamma$  é o raio espectral de L

#### Prova do Teorema do folclore - Lema chave

Para todo  $\psi \in E$ , temos  $||L^n(\psi)|| \le ||L||^n ||\psi|| = \gamma^n ||\psi||$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . O lema chave aqui é

#### Lema

Para todo  $\psi \in C$ , existe o limite  $\lim_{n \to +\infty} \|L^n(\psi)\|/\gamma^n$ .

#### Prova do lema chave do Teorema do folclore

Note que  $y_n = ||L^n(\psi)||/\gamma^n$  está entre 0 e 1. Tome uma subsequência convergente  $y_{n_i} o y_0$ . Assuma sem perda de generalidade que  $y_0 \neq 0$  (caso contrário nada teríamos a mostrar). Mostremos que outra subsequência qualquer  $(y_{m_l})$  possui o mesmo limite:

$$\left\|v - \frac{L^{n}(\psi)}{\|L^{n}(\psi)\|}\right\| \leq 2D\lambda^{n} \Rightarrow \left\|v - \frac{L^{n_{j}}(\psi)}{\|L^{n_{j}}(\psi)\|} \frac{\gamma^{n_{j}}}{\gamma^{n_{j}}}\right\| \leq 2D\lambda^{n_{j}}$$

Logo, como  $\lim_{j\to+\infty} \frac{L^{n_j}(\psi)}{\gamma^{n_j}} \frac{\gamma^{n_j}}{\|L^{n_j}(\psi)\|}$  existe, também existe

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{L^{n_j}(\psi)}{\gamma^{n_j}}=y_0v$$

Suponha que  $y_{m_l} \to \hat{y}$  quando  $l \to +\infty$ .

Tome  $j_0$  tal que  $\forall j \geq j_0$ ,

$$\|\frac{L^{n_j}(\psi)}{\gamma^{n_j}} - y_0 v\| < |y_0 - \hat{y}|/3$$

Para cada j, tome  $q_i = m_{k_i}$  tal que  $q_i > n_i$  e  $q_{i+1} > q_i$ . Logo



#### Continuação da prova do Teorema do folclore

O último lema nos diz que para  $\psi \in C$ ,  $\frac{L^n(\psi)}{\gamma^n}$  converge a um vetor  $v_{\psi}$  que é múltiplo de v. Isso porque

$$\frac{L^{n}(\psi)}{\gamma^{n}} = \frac{L^{n}(\psi)}{\|L^{n}(\psi)\|} \cdot \frac{\|L^{n}(\psi)\|}{\gamma^{n}}$$

e os limites of fatores acima existem individualmente.

O autoespaço associado a  $\gamma$  possui dimensão 1: De fato, se houvesse outro autovetor  $\hat{v}$  não colinear a v, associado a um autovalor com o mesmo módulo que  $\gamma$ , então para algum c>0 teríamos

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{L^{n}(\hat{v})}{\gamma^{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{L^{n}(\hat{v} + cv - cv)}{\|L^{n}(v)\|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{L^{n}(\hat{v} + cv)}{\gamma^{n}} - \lim_{n \to +\infty} \frac{L^{n}(cv)}{\gamma^{n}}$$
(1)

E o limite acima vive no espaço gerado por v.



# Lema do gap

#### Lema

O raio espectral de  $L|_{E_0}$  é estritamente menor que  $\gamma$ . Ademais,  $\|L|_{E_0}\| \leq (1-\frac{e^{-D}}{8})\gamma$ , onde D é uma cota para o  $\theta_C$ —diâmetro de  $L(C) \subset C$ .

# Demonstração do Lema do gap

Sem perda de generalidade, troque L por  $\hat{L}=L/\gamma$ . Seja  $\psi\in E_0$ , com  $\|\psi\|=1$ . Isso quer dizer que para s>1,  $s\cdot v\pm\psi\in C$ , e ou  $s^{-1}\cdot v+\psi$ , ou  $s^{-1}\cdot v-\psi$  não pertence a C. Isto implica que para s>1, temos  $1\leq \|s\cdot v\pm\hat{L}(\psi)\|\leq 1+s$ . A segunda desigualdade é devida a  $\hat{L}(v)=v$  e  $\|\hat{L}(\varphi)\|\leq \|\varphi\|, \forall \varphi\in E$ , como já provamos. Para a primeira desigualdade, fixe s>1. Então

$$\|\mathbf{s} \cdot \mathbf{v} \pm \hat{\mathbf{L}}(\psi)\| = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} \pm \hat{\mathbf{L}}(\psi))$$

Note que  $s \cdot v - (s \cdot v \pm \hat{L}(\psi)) = \pm \hat{L}(\psi) \notin C$ . Logo,  $\beta(v, s \cdot v \pm \hat{L}(\psi)) \ge s > 1$ .

# Demonstração do Lema do gap (continuação)

Por hipótese,  $\hat{C}:=\hat{L}(C)$  tem  $\theta_C$ -diâmetro finito D. Para acotar a norma de  $\hat{L}(\psi)$ , precisamos analisar

$$\inf\{t, t \cdot v \pm L(\psi) \in C\}$$

Como  $t \cdot v \pm L(\psi) \in \hat{C}$ , para todo t > 1, temos  $v \pm L(\psi) \in \overline{\hat{C}}$ . Por acima,  $1 \le \|v \pm L(\psi)\| \le 2$ . Como  $s \cdot v \pm L(\psi) \in \hat{C}$ ,  $\forall s > 1$ , temos que

$$e^{-D} \le \frac{\beta_C(v, s \cdot v \pm L(\psi))}{\alpha_C(v, s \cdot v \pm L(\psi))} \le e^D \Rightarrow \frac{1}{2}e^{-D} \le \alpha_C(v, s \cdot v \pm L(\psi)) \le 2e^D$$

Isso quer dizer que se  $(s-1) < e^{-D}/8$  então

$$s \cdot v \pm L(\psi) - \frac{e^{-D}}{4}v \in C \Rightarrow (1 - 1/8e^{-D})v \pm L(\psi) \in C \Rightarrow$$
$$||L(\psi)|| \le (1 - \frac{e^{-D}}{8}),$$

implicando que 
$$\|\hat{L}|_{E_0}\| \leq (1 - \frac{e^{-D}}{8}) < 1$$



#### Finalizando o teorema

Vimos que para  $\psi \in C \cup -C \cup \{0\}$ , existe o

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{L^n(\psi)}{\gamma^n}=\nu_\psi\in<\nu>$$

Afirmamos que  $P_{\nu}(\psi) := \nu_{\psi}$  é a projeção espectral associada a  $< \nu >$ .

De fato, a imagem de  $P_v(\cdot)$  é exatamente < v>, no qual ela age como identidade. Seja  $E_0:=\ker(P_v)$ . Então  $E_0$  é um subespaço fechado de codimensão um em soma direta com < v>. Ademais,  $L(E_0)\subset E_0$  e . para toda  $\varphi\in E_0$ , temos  $L^n(\varphi)/\gamma^n$  convergindo exponentialmente rápido para 0, com taxa menor ou igual a  $\gamma\cdot(1-\frac{e^{-D}}{8})$ .