

Viga de Bresse com amortecimento e fonte Logaritmica.

Sebastião Martins Siqueira Cordero Universidade Federal
do Pará -Campus de Abaetetuba - Pa

VIII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA

23 de novembro de 2023

Outline

- 1 Introdução
- 2 O Modelo
- 3 Preliminares
- 4 Existência de Solução
- 5 Decaimento exponencial
- 6 References

Uma linha do tempo de contribuições para o Trabalho

- Em 2018, S. Messaoudi e Mohammad M. Al-Gharabli. "Existência e resultado de decaimento geral para uma equação de placa com amortecimento não linear e um termo de fonte logarítmico. (Journal of Evolution Equations.)
- Em 2019 D. C. Pereira; H. H. Hguyen; C. A. Raposo; C. H. Maranhão;. "Sobre as soluções para um equação de feixe extensível com amortecimento interno e termos de fonte". (Differ. Equ. Appl.).
- In 2021, D. C. Pereira; S. M. S. Cordeiro; C. A. Raposo; C. H. Maranhão;. "Soluções de equações de placa de Kirchhoff com damping interno e não linearidade Logaritmica". Electronic Journal of Differential Equations.

$$u_{tt} - \Delta^2 u + M(||\nabla u||^2)(-\Delta u) + u_t = u \ln|u|^2 \quad \text{em } \Omega \times (0, T); \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad x \in \Omega; \quad (2)$$

$$u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3)$$

Uma linha do tempo de contribuições para o Trabalho

- Em 2021, S. M. S. Cordeiro; D. C. Pereira; J. Ferreira e C. A. Raposo;
* "Soluções globais e decaimento exponencial para uma equação de Klein-Gordon do tipo Kirchhoff-Carrier com damping e termo de fonte logarítmica não linear." (Part. Diff. Eq. in Appl. Mathematics).

$$u_{tt} + M(||\nabla u||^2)(-\Delta u) + M_1(|u|^2)u + \Delta u_t = u \ln|u|^2 \quad \text{em } \Omega \times (0, T); \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega; \quad (5)$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \forall t \geq 0. \quad (6)$$

Onde, Ω é um domínio limitado do \mathbb{R}^n , com fronteira suave $\partial\Omega$, $T \leq 0$, $M_1(s)$ e $M(s)$ são funções contínuas em $[0, \infty)$

Uma linha do tempo de contribuições para o Trabalho

- Em 2022 ,S. M. S. Cordeiro; D. C. Pereira; C. A. C. Baldez e C. A. Raposo; "Existência de solução global e comportamento assintótico para um sistema Timoshenko com damping interno e fonte logaritmica " (ArabianJournal of Mathematics).

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x - \psi)_x + \gamma_1 \varphi_t = \mu_1 \varphi \ln|\varphi|_{\mathbb{R}}^2 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L) \quad (7)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \gamma_2 \psi_t = \mu_2 \psi \ln|\psi|_{\mathbb{R}}^2 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L) \quad (8)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (9)$$

Onde as constantes $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2$; $\mu_1 > 0, j = 1, 2$, $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $\kappa = KAG$ e $|.|_{\mathbb{R}}$ é o módulo de número real, ρ é a densidade de massa, A é a área da seção Transversal, I o momento de inercia da área da seção Transversal; E é o módulo de Elasticidade de Yong, G o módulo de rigidez do cortante, K o fator de correção do Cortante.

As Equações Constitutivas

- Considerando o seguinte sistema de equações diferenciais parciais que representam respectivamente, o deslocamento vertical, cisalhamento e o movimento longitudinal, dado por

$$\begin{cases} \rho A \varphi_{tt} - Q_x - \ell N = \mathcal{F}_1, \\ \rho I \psi_{tt} - M_x + Q = \mathcal{F}_2, \\ \rho A \omega_{tt} - N_x + \ell Q = \mathcal{F}_3, \end{cases} \quad (10)$$

Onde M é o momento fletor, N é a força axial e Q é a força cortante, $F_i \quad i = 1, 2, 3.$ são funções externas. O coeficiente ρ é a densidade da viga, e $\ell = \frac{1}{R}$, onde R é o raio do arco. As funções φ , ψ e ω dependendo de $(x, t) \in (0, L) \times (0, T)$ descreve, respectivamente, o deslocamento vertical, o ângulo de cisalhamento e os deslocamentos longitudinais.

As Equações Constitutivas

- Temos também:

$$Q(x, t) = kAG(\varphi_x + \psi + \ell\omega),$$

$$M(x, t) = EI\psi_x,$$

$$N(x, t) = EA(\omega_x - \ell\varphi),$$

tomando,

$$\mathcal{F}_1(x, t) = \mu_1 \varphi \ln |\varphi|_{\mathbb{R}}^2,$$

$$\mathcal{F}_2(x, t) = \mu_2 \psi \ln |\psi|_{\mathbb{R}}^2,$$

$$\mathcal{F}_3(x, t) = \mu_3 \omega \ln |\omega|_{\mathbb{R}}^2,$$

onde, $\mu_j > 0$, $j = 1, 2, 3.$, são constantes positivas e $|\cdot|_{\mathbb{R}}$, é o valor absoluto.

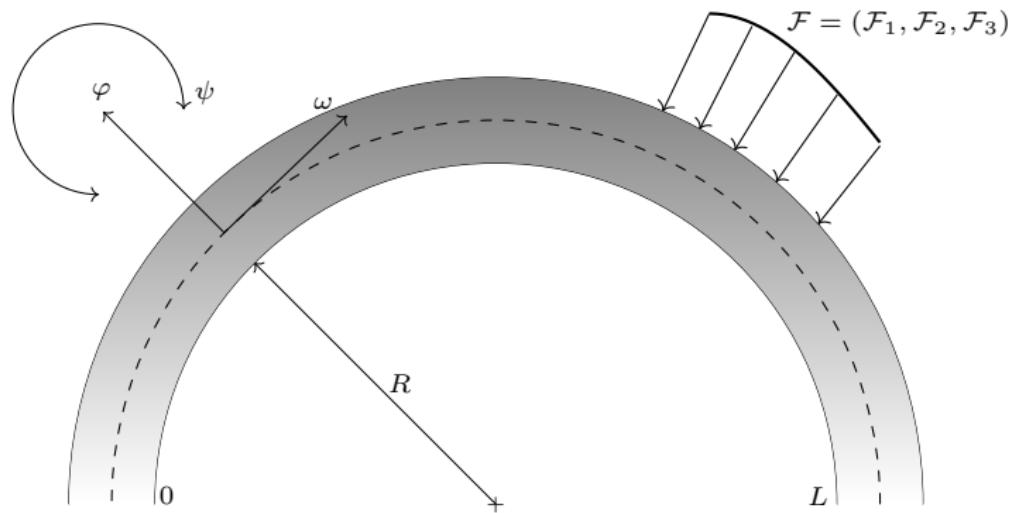


Figura: A viga do arco circular.

- Estamos interessados em estudar a competição entre o amortecimento interno e a fonte logarítmica. Para simplificar a notação, vamos denotar por $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $\kappa = kAG$, $b = EI$ e $\kappa_0 = EA$. Sob essas condições, obtemos o seguinte problema de limite inicial:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + \ell\omega)_x - \ell(\omega_x - \ell\varphi) + \gamma_1 \varphi_t = \mu_1 \varphi \ln |\varphi|_{\mathbb{R}}^2 \quad \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \quad (11)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + \ell\omega) + \gamma_2 \psi_t = \mu_2 \psi \ln |\psi|_{\mathbb{R}}^2 \quad \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \quad (12)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - (\omega_x - \ell\varphi)_x + \ell\kappa(\varphi_x + \psi + \ell\omega) + \gamma_3 \omega_t = \mu_3 \omega \ln |\omega|_{\mathbb{R}}^2 \quad \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \quad (13)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0, L), \quad (14)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad x \in (0, L), \quad (15)$$

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad \omega_t(x, 0) = \omega_1(x), \quad x \in (0, L), \quad (16)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \omega(0, t) = \omega(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (17)$$

Preliminares

- Denotamos $L^2(0, L)$ o Espaço de Hilbert de função de quadrado integrável no intervalo $(0, L)$, com o produto interno

$$(u, v) = \int_0^L uv \, dx, \quad \forall u, v \in L^2(0, L)$$

e norma

$$|u|^2 = (u, u) \quad \forall u \in L^2(0, L).$$

- Usamos notação do Espaço de Sobolev e propriedades como em [Adams]. Denotamos

$$H^1(0, L) = \{u \mid u \in L^2(0, L), u_x \in L^2(0, L)\}$$

e

$$H_0^1(0, L) = \{u \in H^1(0, L) \mid u(0) = u(L) = 0\}.$$

A energia do Sistema

- Definimos o seguinte funcional energia

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{2} \left(\rho_1 |\varphi_t(t)|^2 + \rho_2 |\psi_t(t)|^2 + \rho_3 |\omega_t(t)|^2 + \kappa |\varphi_x(t) + \psi(t) + \ell \omega(t)|^2 \right. \\ & + b |\psi_x(t)|^2 + \kappa_0 |\omega_x - \ell \varphi|^2 + \mu_1 |\varphi(t)|^2 + \mu_2 |\psi(t)|^2 + \mu_3 |\omega(t)|^2 \\ & - \mu_1 \int_0^L \varphi^2(t) \ln |\varphi(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx - \mu_2 \int_0^L \psi^2(t) \ln |\psi(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx \\ & \left. - \mu_3 \int_0^L \omega^2(t) \ln |\omega(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx \right). \end{aligned} \quad (18)$$

A diferenciação direta da equação (18) nos dá:

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma_1 |\varphi_t(t)|^2 - \gamma_2 |\psi_t(t)|^2 - \gamma_3 |\omega_t(t)|^2. \quad (19)$$

Lemas Auxiliares

- Considere os Seguintes Lemas

Lemma (Desigualdade de Sobolev-Poincaré)

Seja p um número com $2 < p < \infty$ se $n = 1, 2$ ou $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$ se $n \geq 3$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_p \leq C|u_x|, \quad \forall u \in H_0^1(0, L). \quad (20)$$

Lemma (Teorema da compacidade de Aubin-Lions)

Seja $T > 0$, $1 < p_0, p_1 < \infty$. Considere $B_0 \subset B \subset B_1$ um Espaço de Banach, B_0, B_1 reflexivo, B_0 imerso compactamente em B . Definimos

$W = \{u \mid u \in L^{p_0}(0, T; B_0), u_t \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$ munido com a norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u_t\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}$. Então, W tem imersão compacta em $L^{p_0}(0, T; B)$.

Lemas Auxiliares

- Lema de Lions

Lemma (Lions)

Let $Q = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$ um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e $g_m, g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ funções de $L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^p(Q)$, $1 < p < \infty$ tal que $\|g_m\|_{L^p(Q)} \leq C$, $g_m \rightarrow g$ pontualmente, em Q . Então $g_m \rightharpoonup g$ in $L^p(Q)$ as $m \rightarrow \infty$.

Lemas Auxiliares

● Lema de Nakao

Lemma (Nakao's Lemma)

Suponhamos que $\phi(t)$ é uma função limitada e não negativa em \mathbb{R}^+ , satisfazendo

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} \text{ess } \phi(s) \leq C_0[\phi(t) - \phi(t+1)],$$

para qualquer $t \geq 0$, onde C_0 é uma constante positiva. Então,

$$\phi(t) \leq Ce^{-\alpha t}, \forall t \geq 0,$$

onde C e α são constantes positivas.

O poço potencial

- Apresentamos o poço de potencial correspondente à equação (11)-(13). Nós definimos o operador $J : \left(H_0^1(0, L)\right)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\begin{aligned} J(\varphi, \psi, \omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left[\kappa |\varphi_x + \psi + \ell\omega|^2 + b|\psi_x|^2 + \kappa_0 |\omega_x - \ell\varphi|^2 + \mu_1 |\varphi|^2 \right. \\ &+ \mu_2 |\psi|^2 + \mu_3 |\omega|^2 - \mu_1 \int_0^L \varphi^2 \ln |\varphi|_{\mathbb{R}}^2 dx \\ &- \left. \mu_2 \int_0^L \psi^2 \ln |\psi|_{\mathbb{R}}^2 dx - \mu_3 \int_0^L \omega^2 \ln |\omega|_{\mathbb{R}}^2 dx \right]. \end{aligned}$$

O poço potencial

- Para $(\varphi, \psi, \omega) \in \left(H_0^1(0, L)\right)^3$ e $\lambda > 0$ temos

$$\begin{aligned} J(\lambda\varphi, \lambda\psi, \lambda\omega) \stackrel{\text{def}}{=} & \frac{\lambda^2}{2} \left[\kappa|\varphi_x + \psi + \ell\omega|^2 + b|\psi_x|^2 + \kappa_0|\omega_x - \ell\varphi|^2 + \mu_1|\varphi|^2 \right. \\ & + \mu_2|\psi|^2 + \mu_3|\omega|^2 - 2\mu_1 \ln \lambda \int_0^L \varphi^2 dx - \mu_1 \int_0^L \varphi^2 \ln |\varphi|_{\mathbb{R}}^2 dx \\ & - 2\mu_2 \ln \lambda \int_0^L \psi^2 dx - \mu_2 \int_0^L \psi^2 \ln |\psi|_{\mathbb{R}}^2 dx - 2\mu_3 \ln \lambda \int_0^L \omega^2 dx \\ & \left. - \mu_3 \int_0^L \omega^2 \ln |\omega|_{\mathbb{R}}^2 dx \right]. \end{aligned}$$

O poço potencial

- Associado a J , definimos a Variedade de Nehari

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (\varphi, \psi, \omega) \in (H_0^1(0, L))^3 / \{0\}; \quad \left[\frac{d}{d\lambda} J(\lambda\varphi, \lambda\psi, \lambda\omega) \right]_{\lambda=1} = 0 \right\}.$$

- Equivalentemente,

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \left\{ (\varphi, \psi, \omega) \in (H_0^1(0, L))^3; \kappa|\varphi_x + \psi + \ell\omega|^2 + b|\psi_x|^2 + \kappa_0|\omega_x - \ell\varphi|^2 \right. \\ &\quad \left. = \mu_1 \int_0^L \varphi^2 \ln |\varphi|_{\mathbb{R}}^2 dx + \mu_2 \int_0^L \psi^2 \ln |\psi|_{\mathbb{R}}^2 dx + \mu_3 \int_0^L \omega^2 \ln |\omega|_{\mathbb{R}}^2 dx \right\}.\end{aligned}$$

O poço potencial

- Definimos, como no teorema do Passo da Mantanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{(\varphi, \psi, \omega) \in (H_0^1(0, L))^3 / \{0\}} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda u).$$

Segundo Willem (Teorema MiniMax), a profundidade do poço d é uma constante estritamente positiva dada por

$$0 < d = \inf_{\varphi, \psi, \omega \in \mathcal{N}} J(\lambda u).$$

Introduzimos o seguinte conjunto:

$$W = \left\{ (\varphi, \psi, \omega) \in (H_0^1(0, L))^3; \ J(\varphi, \psi, \omega) < d \right\} \cup \{0\}$$

O poço potencial

- Particionando W , temos o seguintes conjuntos:

$$W_1 = \{(\varphi, \psi, \omega) \in W; \kappa|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + b|\psi_x|^2 + \kappa_0|\omega_x - l\varphi|^2 \\ > \mu_1 \int_0^l \varphi^2 \ln |\varphi|_{\mathbb{R}}^2 dx + \mu_2 \int_0^l \psi^2 \ln |\psi|_{\mathbb{R}}^2 dx + \mu_3 \int_0^l \omega^2 \ln |\omega|_{\mathbb{R}}^2 dx\} \cup \{0\}$$

- e

$$W_2 = \{(\varphi, \psi) \in W; \kappa|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + b|\psi_x|^2 + \kappa_0|\omega_x - l\varphi|^2 \\ < \mu_1 \int_0^l \varphi^2 \ln |\varphi|_{\mathbb{R}}^2 dx + \mu_2 \int_0^l \psi^2 \ln |\psi|_{\mathbb{R}}^2 dx + \mu_3 \int_0^l \omega^2 \ln |\omega|_{\mathbb{R}}^2 dx\}$$

Então, definimos por W_1 o conjunto de estabilidade para o problema (11) – (13)

Existência de solução global fraca

- Provamos a existência de soluções globais fracas.

Theorem

Seja $(\varphi_0, \psi_0, \omega_0) \in W_1$, $J(\varphi_0, \psi_0, \omega_0) < d$ e $(\varphi_1, \psi_1, \omega_1) \in (L^2(0, L))^3$. Então o problema (11)-(17) admite uma solução fraca (φ, ψ, ω) nas classes

$$(\varphi, \psi, \omega) \in (L_{loc}^\infty(0, \infty; H_0^1(0, L)))^3 \quad (21)$$

$$(\varphi_t, \psi_t, \omega_t) \in (L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(0, L)))^3 \quad (22)$$

onde $u, y, z \in H_0^1(0, L)$.

Existência de solução global fraca



$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} (\rho_1 \varphi_t(t), u) + (\kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)(t), u_x) - (\kappa_0 l(\omega_x - l\varphi)(t), u) + (\gamma_1 \varphi_t(t), u) \\
 & - (\mu_1 \varphi(t) \ln |\varphi(t)|_{\mathbb{R}}^2, u) = 0,
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} (\rho_2 \psi_t(t), y) + (b\psi_x(t), y_x) + (\kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)(t), y) + (\gamma_2 \psi_t(t), y) \\
 & - (\mu_2 \psi(t) \ln |\psi(t)|_{\mathbb{R}}^2, y) = 0,
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} (\rho_1 \omega_t(t), z) + (\kappa_0 (\omega_x - l\varphi)(t), z_x) + (\kappa l(\varphi_x + \psi + l\omega)(t), z) + (\gamma_3 \omega_t(t), z) \\
 & - (\mu_3 \omega(t) \ln |\omega(t)|_{\mathbb{R}}^2, z) = 0,
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$(\varphi, \psi, \omega)(x, 0) = (\varphi_0, \psi_0, \omega_0), \tag{26}$$

$$(\varphi_t, \psi_t, \omega_t)(x, 0) = (\varphi_1, \psi_1, \omega_1), \tag{27}$$

in $\mathcal{D}'(0, T)$.

Problema aproximado

- Prova Para provarmos o teorema usaremos o método Faedo-Galerkin. A prova da existência global de soluções é feita em três etapas: Problema aproximado, estimativas a priori e passagem ao limite.
- Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma base de $H_0^1(0, L)$ dos autovetores do operador $-\Delta$, and

$$V_m = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_m\}.$$

Considere

$$\varphi^m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)u_j, \quad \psi^m(t) = \sum_{j=1}^m h_{jm}(t)u_j \quad \text{and} \quad \omega^m(t) = \sum_{j=1}^m l_{jm}(t)u_j$$

uma solução do problema aproximado

Problema aproximado



$$\begin{aligned}
 & (\rho_1 \varphi_{tt}^m(t), u) + (\kappa(\varphi_x^m(t) + \psi^m(t) + l\omega^m(t)), u_x) - (\kappa_0 l(\omega_x^m - l\varphi^m)(t), u) \\
 & + (\gamma_1 \varphi_t^m(t), u) - (\mu_1 \varphi^m(t) \ln |\varphi^m(t)|^2, u) = 0,
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 & (\rho_2 \psi_{tt}^m(t), y) + (b\psi_x^m(t), y_x) + (\kappa(\varphi_x^m(t) + \psi^m(t) + l\omega^m(t)), y) + (\gamma_2 \psi_t^m(t), y) \\
 & - (\mu_2 \psi^m(t) \ln |\psi^m(t)|^2, y) = 0,
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 & (\rho_1 \omega_{tt}^m(t), z) + (\kappa_0(\omega_x^m - l\varphi^m)(t), z_x) + (\kappa l(\varphi_x^m(t) + \psi^m(t) + l\omega^m(t)), z) \\
 & + (\gamma_3 \omega_t^m(t), z) - (\mu_3 \omega^m(t) \ln |\omega^m(t)|^2, z) = 0,
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 & (\varphi^m(0), \psi^m(0), \omega^m(0)) = \\
 & (\varphi_{0m}, \psi_{0m}, \omega_{0m}) \longrightarrow (\varphi_0, \psi_0, \omega_0) \text{ strongly in } \left(H_0^1(0, l)\right)^3,
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 & (\varphi_t^m(0), \psi_t^m(0), \omega_t^m(0)) = \\
 & (\varphi_{1m}, \psi_{1m}, \omega_{1m}) \longrightarrow (\varphi_1, \psi_1, \omega_1) \text{ strongly in } \left(L^2(0, l)\right)^3,
 \end{aligned} \tag{32}$$

Estimativas a priori

- Em virtude do teorema de Carathéodory, veja [Coddington], o sistema 28 - 32 tem uma solução local em $[0, t_m)$, $0 < t_m \leq T$. A extensão da solução para todo o intervalo $[0, T]$ é consequência das seguintes estimativas a priori.
- Seja $u = \varphi_t^m(t)$, $y = \psi_t^m(t)$ e $z = \omega_t^m(t)$ em (28), (29) e (30) respectivamente, obtemos

$$\frac{d}{dt} E_m(t) + \gamma_1 |\varphi_t^m(t)|^2 + \gamma_2 |\psi_t^m(t)|^2 + \gamma_3 |\omega_t^m(t)|^2 = 0, \quad (33)$$

Estimativas a priori

- Integrando (33) de 0 a t , $0 \leq t \leq t_m$, obtemos

$$\begin{aligned} & E_m(t) + \gamma_1 \int_0^t |\varphi_t^m(s)|^2 ds + \gamma_2 \int_0^t |\psi_t^m(s)|^2 ds + \gamma_3 \int_0^t |\omega_t^m(s)|^2 ds \\ &= \rho_1 |\varphi_{1m}|^2 + \rho_2 |\psi_{1m}|^2 + \rho_1 |\omega_{1m}|^2 + \kappa |\varphi_{0mx} + \psi_{0m} + l\omega_{0m}|^2 + \kappa_0 |\omega_{0mx} - l\varphi_{0m}|^2 \\ &\quad + b |\psi_{0mx}|^2 + \mu_1 |\varphi_{0m}|^2 + \mu_2 |\psi_{0m}|^2 + \mu_3 |\omega_{0m}|^2 - \mu_1 \int_0^L \varphi_{0m}^2 \ln |\varphi_{0m}|_R^2 \\ &\quad - \mu_2 \int_0^L \psi_{0m}^2 \ln |\psi_{0m}|_R^2 dx - \mu_3 \int_0^L \omega_{0m}^2 \ln |\omega_{0m}|_R^2 dx, \end{aligned}$$

Estimativa a priori

- o que nos dá a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} E_m(t) + \gamma_1 \int_0^t |\varphi_t^m(s)|^2 \, ds + \gamma_2 \int_0^t |\psi_t^m(s)|^2 \, ds + \gamma_3 \int_0^t |\omega_t^m(s)|^2 \, ds \\ \leq \rho_1 |\varphi_{1m}|^2 + \rho_2 |\psi_{1m}|^2 + \rho_1 |\omega_{1m}|^2 + J(\varphi_{0m}, \psi_{0m}, \omega_{0m}). \end{aligned}$$

Note que $J(\varphi_{0m}, \psi_{0m}, \omega_{0m}) < d$, logo,

$$E_m(t) + \mu_1 \int_0^t |\varphi_t^m(s)|^2 \, ds + \mu_2 \int_0^t |\psi_t^m(s)|^2 \, ds + \gamma_3 \int_0^t |\omega_t^m(s)|^2 \, ds \leq C_1, \quad (34)$$

onde C_1 é uma constante positiva independente m e t .

Estimativa a priori

- De (34) temos que:

$$(\varphi^m), (\psi^m), (\omega^m) \text{ are bounded in } L_{loc}^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \quad (35)$$

$$(\varphi_t^m), (\psi_t^m), (\omega_t^m) \text{ are bounded in } L_{loc}^\infty(0, T; L^2(0, L)). \quad (36)$$

Agora pela desigualdade logarítmica

$$|t^2 \ln t| \leq C(1 + |t|^3),$$

obtemos

$$\mu_1 \int_0^L |\varphi^m(t) \ln |\varphi^m(t)|_{\mathbb{R}}^2|^2 dx \leq C_2, \quad (37)$$

$$\mu_2 \int_0^L |\varphi^m(t) \ln |\varphi^m(t)|_{\mathbb{R}}^2|^2 dx \leq C_3, \quad (38)$$

e

$$\mu_3 \int_0^L |\omega^m(t) \ln |\omega^m(t)|_{\mathbb{R}}^2|^2 dx \leq C_4, \quad (39)$$

Estimativa a priori

- onde C_2, C_3 e C_4 são constantes positivas independentes de m e t . de (37), (38) e (39) obtemos

$$\varphi^m \ln |\varphi|_{\mathbb{R}}^2 \text{ são limitadas em } L^2_{loc}(0, \infty; L^2(0, L)), \quad (40)$$

$$\psi^m \ln |\psi|_{\mathbb{R}}^2 \text{ são limitadas em } L^2_{loc}(0, \infty; L^2(0, L)), \quad (41)$$

$$\omega^m \ln |\omega|_{\mathbb{R}}^2 \text{ são limitadas em } L^2_{loc}(0, \infty; L^2(0, L)). \quad (42)$$

Passagem ao limite

- Das estimates (35) and (36), there exists a subsequence of (φ^m) , (ψ^m) e (ω^m) que continuaremos adenotar de (φ^m) , (ψ^m) e (ω^m) , tal que

$$(\varphi^m), (\psi^m), (\omega^m) \xrightarrow{*} \varphi, \psi, \omega \text{ fraco estrela } L_{loc}^\infty(0, \infty; H_0^1(0, L)), \quad (43)$$

$$(\varphi_t^m), (\psi_t^m), (\omega_t^m) \xrightarrow{*} \varphi_t, \psi_t, \omega_t \text{ fraco em } L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(0, L)). \quad (44)$$

Aplicando o teorema de compacidade de Aubin-Lions, obtemos de (43) and (44),

$$(\varphi^m), (\psi^m), (\omega^m) \longrightarrow \varphi, \psi, \omega \text{ fortemente em } L_{loc}^2(0, \infty; L^2(0, L)), \quad (45)$$

e , para todo $T > 0$,

Exponential decay



$$(\varphi^m) \longrightarrow \varphi \text{ a.e em } (0, L) \times (0, T), \quad (46)$$

$$(\psi^m) \longrightarrow \psi \text{ a.e em } (0, L) \times (0, T), \quad (47)$$

$$(\omega^m) \longrightarrow \omega \text{ a.e em } (0, L) \times (0, T). \quad (48)$$

Como $f(s) = s \ln|s|^2$ é contínua, temos a seguinte convergência

$$\mu_1 \varphi^m \ln |\varphi^m|_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mu_1 \varphi \ln |\varphi|_{\mathbb{R}}^2 \text{ a.e em } (0, L) \times (0, T), \quad (49)$$

$$\mu_2 \psi^m \ln |\psi^m|_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mu_2 \psi \ln |\psi|_{\mathbb{R}}^2 \text{ a.e em } (0, L) \times (0, T) \quad (50)$$

e

$$\mu_3 \omega^m \ln |\omega^m|_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mu_3 \omega \ln |\omega|_{\mathbb{R}}^2 \text{ a.e em } (0, L) \times (0, T). \quad (51)$$

Passagem ao limite

- das convergencias (35), (36), (49) ,(50) e (51), podemos passar o limite no sistema aproximedo (28) - (30) e obtemos, para todo $u, y, z \in H_0^1(0, L)$,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (\rho_1 \varphi_t(t), u) + (\kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)(t), u_x) - (\kappa_0 l(\omega_x - l\varphi)(t), u) + (\gamma_1 \varphi_t(t), w) \\
 - (\mu_1 \varphi(t) \ln |\varphi(t)|_{\mathbb{R}}^2, w) = 0,
 \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (\rho_2 \psi_t(t), y) + (b\psi_x(t), y_x) + (\kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)(t), y) + (\gamma_2 \psi_t(t), y) \\
 - (\mu_2 \psi(t) \ln |\psi(t)|_{\mathbb{R}}^2, y) = 0,
 \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (\rho_1 \omega_t(t), z) + (\kappa_0 (\omega_x - l\varphi)(t), z_x) + (\kappa l(\varphi_x + \psi + l\omega)(t), z) + (\gamma_3 \omega_t(t), z) \\
 - (\mu_3 \omega(t) \ln |\omega(t)|_{\mathbb{R}}^2, z) = 0,
 \end{aligned} \tag{54}$$

em $\mathcal{D}'(0, T)$. A verificação dos dados iniciais é obtida de forma padronizada.

Decaimento exponencial

- Para o decaimento usaremos o Método de Nacão

Theorem

Sobre as hipóteses do **Theorem 5**. a energia associada ao problema (11)-(17) satisfaz

$$E(t) \leq C_0 e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0,$$

onde C_0 and α são constantes positivas.

- prova:**

Seja $u = \varphi_t(t)$, $y = \psi_t(t)$ e $z = \omega_t(t)$ em (52) e (54) respectivamente e somando o resultado, obtemos

$$\frac{d}{dt} E(t) + \gamma_1 |\varphi_t(t)|^2 + \gamma_2 |\psi_t(t)|^2 + \gamma_3 |\omega_t(t)|^2 \leq 0, \quad (55)$$

Decaimento exponencial

- onde $E(t)$ foi definida em (18). Integrando (??) de t até $t + 1$, obtemos

$$\int_t^{t+1} \left[\gamma_1 |\varphi_t(s)|^2 + \gamma_2 |\psi_t(s)|^2 + \gamma_3 |\omega_t(s)|^2 \right] ds \leq E(t) - E(t+1) \stackrel{\text{def}}{=} F^2(t), \quad (56)$$

portanto, existe $t_1 \in \left[t, t + \frac{1}{4}\right]$ and $t_2 \in \left[t + \frac{3}{4}, t + 1\right]$ tal que

$$\gamma_1 |\varphi_t(t_i)|^2 + \gamma_2 |\psi_t(t_i)|^2 + \gamma_3 |\omega_t(t_i)|^2 \leq 4F(t_i), \quad i = 1, 2. \quad (57)$$

Decaimento exponencial

- Seja $u = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ e $z = \omega(t)$ em (52), (53) e (54) respectivamente. Somando o resultado, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \left[b|\psi_x(t)|^2 + \kappa|\varphi_x(t) + \psi(t) + l\omega(t)|^2 + \kappa_0 l|\omega_x(t) - l\varphi(t)|^2 \right. \\
 & \quad \left. - \mu_1 \int_0^L (\varphi(t))^2 \ln |\varphi(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx \right. \\
 & \quad \left. - \mu_2 \int_0^L (\psi(t))^2 \ln |\psi(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx - \mu_3 \int_0^L (\omega(t))^2 \ln |\omega(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx \right] ds \\
 & \leq C_1 \left[F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} \text{ess } E^{1/2}(s) + \frac{1}{4} \sup_{t \leq s \leq t+1} E(s) + F^2(t) \right] \stackrel{\text{def}}{=} G^2(t), \quad (58)
 \end{aligned}$$

onde $C_1 = C_1(\rho_1, \rho_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) > 0$ é uma constante positiva.

Decaimento exponencial

- De (56) e (58), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[b|\psi_x(t)|^2 + \kappa|\varphi_x(t) + \psi(t) + l\omega(t)|^2 + \kappa_0 l |\omega_x(t) - l\varphi(t)|^2 \right. \\ & - \mu_1 \int_0^L (\varphi(t))^2 \ln |\varphi(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx \mu_2 \int_0^L (\psi(t))^2 \ln |\psi(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx \\ & \left. - \mu_3 \int_0^L (\omega(t))^2 \ln |\omega(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx \right] ds \leq 2[F^2(t) + G^2(t)], \end{aligned} \tag{59}$$

Decaimento exponencial

- portanto, existe $t^* \in [t_1, t_2]$ tal que

$$\begin{aligned}
 & \rho_1|\varphi_t(t^*)|^2 + \rho_2|\psi_t(t^*)|^2 + \rho_1|\omega_t(t^*)|^2 + b|\psi_x(t^*)|^2 \\
 & + \kappa|\varphi_x(t^*) + \psi(t^*) + l\omega(t^*)|^2 + \kappa_0 l|\omega_x(t^*) - l\varphi(t^*)|^2 \\
 & - \mu_1 \int_{\Omega} (\varphi(t^*))^2 \ln |\varphi(t^*)|_R^2 dx - \mu_2 \int_0^L (\psi(t^*))^2 \ln |\psi(t^*)|_R^2 dx \\
 & - \mu_3 \int_0^L (\omega(t^*))^2 \ln |\omega(t^*)|_R^2 dx \leq C_2[F^2(t) + G^2(t)]. \tag{60}
 \end{aligned}$$

Deduzimos,

$$\begin{aligned}
 & |\varphi(t^*)|^2 + |\psi(t^*)|^2 + |\omega(t^*)|^2 \\
 & \leq C_3[|\varphi_x(t^*) + \psi(t^*) + l|\omega(t^*)|^2|^2 + |\psi_x(t^*)|^2 + |\omega_x(t^*) - l\varphi(t^*)|^2]. \tag{61}
 \end{aligned}$$

De (60) e (61), obtemos

$$E(t^*) \leq C_4[F^2(t) + G^2(t)]. \tag{62}$$

Decaimento exponencial

- Desde que $E(t)$ é decrescente, de (56), (61) e (62) obtemos

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \leq s \leq t+1} \text{ess } E(s) &\leq E(t^*) + \int_t^{t+1} [\gamma_1 |\varphi_t(s)|^2 + \gamma_2 |\psi_t(s)|^2 + \gamma_3 |\omega_t(s)|^2] ds \\
 &\leq C_5 [F^2(t) + G^2(t)] \\
 &\leq C_6 \left[F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} E^{1/2}(s) + F^2(t) + \frac{1}{4} \sup_{t \leq s \leq t+1} E(s) \right] \\
 &\leq C_7 F^2(t) + \frac{1}{2} \sup_{t \leq s \leq t+1} E(s).
 \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema de Nakao

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E(s) \leq C_8 F^2(t) = C_9 [E(t) - E(t+1)],$$

onde $C_i = 1, 2, \dots, 9$ são constantes positivas. pelo Lema (4), concluimos

$$E(t) \leq C_0 e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0,$$

onde C_0 e α são constantes positivas.

References

- Bresse, J.A.C.: Cours de mécanique appliquée- résistance des matériaux et stabilité des constructions., *Gauthier-Villars, Paris, 1859.*
- A. E. Green and P. M. Naghdi. *On undamped heat waves in an elastic solid. J. Thermal Stresses, 15 :253–264, 1992.*
- Salim A. Messaoudi and Belkacem Said-Houari. Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III. *J. Math. Anal. Appl,* 2008.
- C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, N. N. O. Castro, Exponential stability for Timoshenko system with two weak dampings. *Appl. Math. Letters, 18:535?541,* (2005).
- Adams, R.A.: Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.
- Willem, M.: Minimax Theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

- A. E. Green, P. M. Naghdi: *Thermoelasticity without energy-dissipation.* *J. Elast.* 31(3), 189–208 (1993).
- M. L. Santos, D. S. Almeida Júnior, J. E. Muñoz Rivera. The stability number of the Timoshenko system with second sound. *J. Differential Equations*, 253(2012), 2715?2733.
- L.H. Fatori, J.E. Munoz Rivera and R. Nunes Monteiro. Energy decay to Timoshenko's system with thermoelasticity of type III. *Asymptotic Analysis* 86 (2014) 227?247
- J.E. Muñoz Rivera and R. Quintanilha. *On the time polynomial decay in elastic solids with voids.* *J. Math. Anal. Appl.*, 338 (2008), 1296-1309.
- J.E. Muñoz Rivera and R. Racke, *Timoshenko systems with indefinite damping,* *J. Math. Anal. Appl.*, 341 (2008), 1068–1083.
- J. Prüss. *On the spectrum of C_0 -semigroups,* *Trans. AMS* 284 (1984), 847–857.
- P. X. Pamplona, J.E. Muñoz Rivera and R. Quintanilha., *Stabilization in elastic solitons with voids.* *J. Math. Anal. Appl.*, 379 (2011), 682–7055.

THANK YOU!