Princípio de Grandes Desvios Para a Medida Empírica

Joedson de Jesus Santana
(IME – UFBA)

Orientador: Dirk Erhard
(IME – UFBA)

Salvador – Bahia

23 de Dezembro de 2023

Resultados Conhecidos

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d. com $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ e $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$.

Resultados Conhecidos

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d. com $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ e $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$.

1. Lei Fraca dos Grandes Números: Para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right| > \varepsilon\right) = 0 \tag{1}$$

Resultados Conhecidos

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d. com $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ e $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$.

1. Lei Fraca dos Grandes Números: Para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right| > \varepsilon\right) = 0 \tag{1}$$

2. Lei Forte dos Grandes Números:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1] = 0\right) = 1 \tag{2}$$

Resultados Conhecidos

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d. com $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ e $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$.

1. Lei Fraca dos Grandes Números: Para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right| > \varepsilon\right) = 0 \tag{1}$$

2. Lei Forte dos Grandes Números:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1] = 0\right) = 1 \tag{2}$$

3. Teorema Central do Limite: Para todo $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq c\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{c} e^{\frac{x^2}{2}}\,dx. \tag{3}$$

Questionamento

O que acontece com o comportamento atípico, ou seja, para $x > 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > x\right) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} < x\right)? \tag{4}$$

Questionamento

O que acontece com o comportamento atípico, ou seja, para $x > 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > x\right) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} < x\right)? \tag{4}$$

A Lei Fraca dos Grandes Números diz que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > x\right) = 0$$

Questionamento

O que acontece com o comportamento atípico, ou seja, para $x > 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > x\right) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} < x\right)? \tag{4}$$

A Lei Fraca dos Grandes Números diz que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > x\right) = 0$$

Muito frequentemente nós temos que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > x\right) \approx e^{-nI(x)} \quad \text{and} \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} < x\right) \approx e^{-nI(-x)}$$

para alguma função I que é chamada **função taxa**.

Definição

Considere que

1. (E, d) é espaço métrico;
2. β_E é a σ-algebra de Borel;
3. $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de medidas de probabilidade em (E, β_E);
4. $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequêmcia de números positivos tais que $\gamma_n \to \infty$;
5. $I : E \to [0, \infty]$ é uma função tal que $I \not\equiv \infty$ e $\phi(s) = \{x \in E : I(x) \leq s\}$ é o conjunto de nível de I.

Definição

Dizemos que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz um Princípio de Grnades Desvios (LDP) com função taxa I escala γ_n se

1. A função taxa I é semicontínua inferiormente;
2. Para qualquer aberto $G \in E$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} \log \mu_n(G) \geq -\inf_{x\in G} I(x); \tag{5}$$

3. Para qualquer fechado $F \in E$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} \log \mu_n(F) \leq -\inf_{x\in F} I(x). \tag{6}$$

Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ uma cadeia de Markov em $\mathbb{Z}^d$ com gerador $\mathcal{L}$ atuando em funções locais $f : \mathbb{Z}^d x \to \mathbb{R}$ via

$$(\mathcal{L}f)(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} a_{x,y}[f(y) - f(x)] \tag{7}$$

com domínio $\mathcal{D}$ e defina a medida de ocupação normalizada $(\mathcal{L}_t)_{t\geq 0}$ via

$$L_t(A) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(X(s))ds, \quad A \subseteq \mathbb{Z}^d \tag{8}$$

a qual é uma medida de probabilidade em $\mathbb{Z}^d$ chamada de **Medida Empírica**.

Definição

Definindo o espaço métrico $\widetilde{X}$ por

$$\widetilde{X} = \left\{ \xi : \xi = \{\tilde{\alpha}_i\}_{i \in I},\ \alpha_i \in \mathcal{M}_{\leq 1},\ \sum_{i \in I} \alpha_i(\mathbb{R}^d) \leq 1 \right\}, \qquad (9)$$

onde $\tilde{\alpha}$ são as classes de equivalência de α

Definição

Definindo o espaço métrico $\widetilde{X}$ por

$$\widetilde{X} = \left\{ \xi : \xi = \{\tilde{\alpha}_i\}_{i \in I},\ \alpha_i \in \mathcal{M}_{\leq 1},\ \sum_{i \in I} \alpha_i(\mathbb{R}^d) \leq 1 \right\}, \tag{9}$$

onde $\tilde{\alpha}$ são as classes de equivalência de α
e a função taxa I por

$$I(\mu) = -\inf_{u>0} \int \left(\frac{\mathcal{L}u}{u} \right)(x)\mu(dx). \tag{10}$$

com

$$\tilde{I}(\xi) = \sum_{\tilde{\alpha} \in \xi} I(\tilde{\alpha}) \tag{11}$$

onde

$$I(\tilde{\alpha}) = I(\alpha).$$

Teorema

A família de medidas $(L_t)_{t\geq 0}$ definida no espaço métrico $\tilde{X}$ satisfaz um Princípio de Grandes Desvios com a função taxa $\tilde{I}(\xi)$ definida em (11).

Referências Bibliográficas

- DONSKER, M.D.and VARADHAN, S. R. S. (1975). Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. I–IV. Comm. Pure Appl. Math. 28 1–47; 28 279–301 (1975); 29 389–461 (1979); 36 183–212 (1983).
- Chiranjib Mukherjee and S. R. S. Varadhan. Brownian occupation measures, compactness and large deviations.Ann. Probab. 44 (6) : 3934-3964, 2016 .

OBRIGADO!