BOA COLOCAÇÃO E ESTABILIDADE EXPONENCIAL PARA UMA EQUAÇÃO DE VIGAS PIEZOELÉTRICAS COM DISSIPAÇÃO DO TIPO DERIVADA FRACIONÁRIA NO DOMÍNIO

Rafael Oliveira de Jesus

VIII ENCONTRO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UFBA

(Universidade Federal da Bahia)

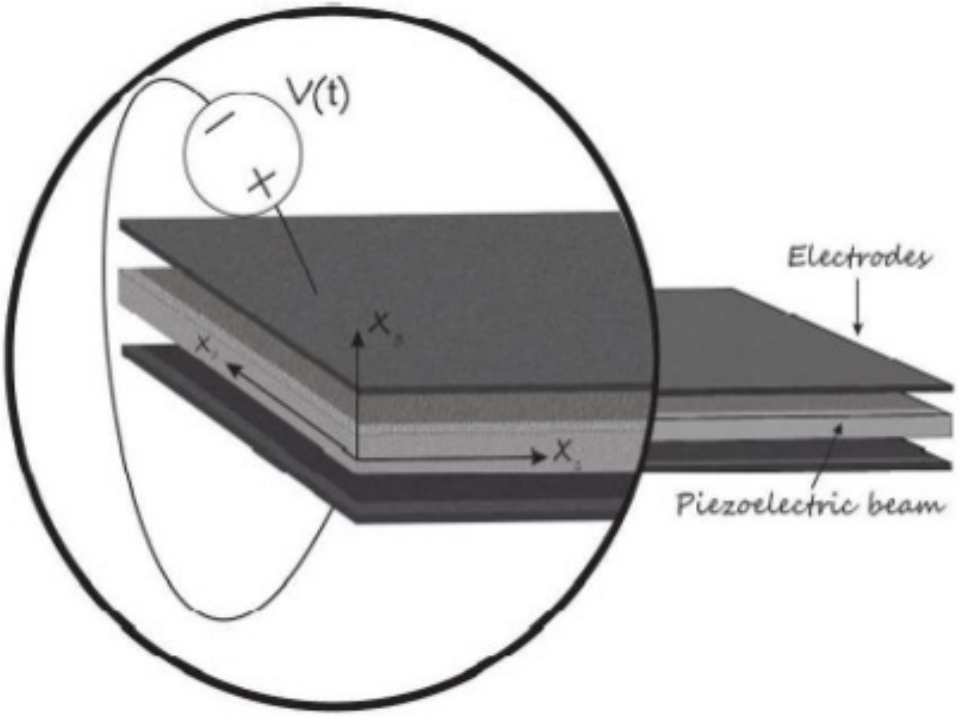
23/11/2023

Introdução

Materiais piezoelétricos têm a capacidade de converter energia mecânica em elétrica e vice-versa. Devido a esta habilidade especial, estes materiais têm sido amplamente utilizados como sensores e atuadores na área de estruturas e sistemas inteligentes.

Introdução

Materiais piezoelétricos têm a capacidade de converter energia mecânica em elétrica e vice-versa. Devido a esta habilidade especial, estes materiais têm sido amplamente utilizados como sensores e atuadores na área de estruturas e sistemas inteligentes.



Introdução

Problema modelado:

$$\begin{cases} \rho\, u_{tt} - \chi u_{xx} + \gamma\beta v_{xx} = 0, \quad x \in [0,\, L], \quad t \geq 0, \\ \mu\, v_{tt} - \beta v_{xx} + \gamma\beta u_{xx} = 0, \quad x \in [0,\, L], \quad t \geq 0 \\ u(x,\, 0) = u_0(x), \quad u_t(x,\, 0) = u_1(x) \\ v(x,\, 0) = v_0(x), \quad v_t(x,\, 0) = v_1(x), \\ u(0,\, t) = u(L,\, t) = 0, \quad v(0,\, t) = v(L,\, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $u = u(x,\, t)$ representa o deslocamento transversal da viga e $v = v(x,\, t)$, a carga total do deslocamento elétrico ao longo da direção transversal.

Introdução

Problema modelado:

$$\begin{cases} \rho\, u_{tt} - \chi u_{xx} + \gamma\beta v_{xx} = 0, \quad x \in [0,\, L], \quad t \geq 0, \\ \mu\, v_{tt} - \beta v_{xx} + \gamma\beta u_{xx} = 0, \quad x \in [0,\, L], \quad t \geq 0 \\ u(x,\, 0) = u_0(x), \quad u_t(x,\, 0) = u_1(x) \\ v(x,\, 0) = v_0(x), \quad v_t(x,\, 0) = v_1(x), \\ u(0,\, t) = u(L,\, t) = 0, \quad v(0,\, t) = v(L,\, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $u = u(x,\, t)$ representa o deslocamento transversal da viga e $v = v(x,\, t)$, a carga total do deslocamento elétrico ao longo da direção transversal. ρ denota a densidade de massa por unidade de volume, χ a rigidez elástica, γ o coeficiente piezoelétrico, μ a permeabilidade magnética e β o coeficiente de resistência à água da viga.

Modelo com dissipação não-local proposto

$$
\begin{cases}
u_{tt} - \chi u_{xx} + \gamma\beta v_{xx} + \partial_t^{\alpha,\eta} u = 0, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\
v_{tt} - \beta v_{xx} + \gamma\beta u_{xx} = 0, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\
u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in [0, L], \\
v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad x \in [0, L], \\
u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad t \geq 0,
\end{cases}
\tag{2}
$$

Modelo com dissipação não-local proposto

$$\begin{cases} u_{tt} - \chi u_{xx} + \gamma\beta v_{xx} + \partial_t^{\alpha,\eta} u = 0, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ v_{tt} - \beta v_{xx} + \gamma\beta u_{xx} = 0, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in [0, L], \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

onde $\partial_t^{\alpha,\eta}$ é o operador integro-diferencial fracionário de Caputo exponencialmente modificado de ordem α e peso η, definido por:

$$\partial_t^{\alpha,\eta} u(t) = \mathcal{I}^{1-\alpha,\eta} u'(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t e^{-\eta(t-s)} (t-s)^{-\alpha} u'(s) ds,$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $\eta \geq 0$.

Modelo Ampliado

Lema 1

Sejam $\mathfrak{C} = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi} = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$ *e* $\mu(\xi) = |\xi|^{(2\alpha-1)/2}$ *(* $\xi \in \mathbb{R}$ *e* $0 < \alpha < 1$*).*

A relação entre a entrada U *e a saída* $\mathcal{O}$ *do seguinte sistema*

$$\begin{aligned}
&\varphi_t(t,\xi) + |\xi|^2\varphi(t,\xi) = \mu(\xi)U(t), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 0,\\
&\varphi(0,\xi) = 0,\\
&\mathcal{O}(t) = \mathfrak{C}\int_{\mathbb{R}} \mu(\xi)\varphi(t,\xi)d\xi,
\end{aligned}$$

é dada por $\mathcal{O}(t) = \mathcal{I}^{1-\alpha,\eta}U(t)$*, onde* $U \in C([0,+\infty))$*.*

Modelo Ampliado

$$
\begin{cases}
u_{tt}(x,\,t) - \chi u_{xx}(x,\,t) + \gamma\beta v_{xx}(x,\,t) + \mathfrak{C}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mu(\xi)\varphi(x,\,t,\,\xi)d\xi = 0, \\
v_{tt}(x,\,t) - \beta v_{xx}(x,\,t) + \gamma\beta u_{xx}(x,\,t) = 0, \\
\varphi_t(x,\,t,\,\xi) + (|\xi|^2 + \eta)\varphi(x,\,t,\,\xi) = \mu(\xi)u_t(x,\,t), \\
u(x,\,0) = u_0(x), \quad u_t(x,\,0) = u_1(x), \\
v(x,\,0) = v_0(x), \quad v_t(x,\,0) = v_1(x), \\
u(0,\,t) = u(L,\,t) = 0,\ v(0,\,t) = v(L,\,t) = 0, \\
\varphi(x,\,0,\,\xi) = 0,
\end{cases}
\tag{3}
$$

Energia do Modelo Ampliado

A *energia* do sistema ampliado é dada por:

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\left[\|u_t(t)\|^2_{L^2(0,L)} + \|v_t(t)\|^2_{L^2(0,L)} + \int_0^L X^T A X \, dx\right] \\
&+ \frac{\mathfrak{C}}{2}\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, L^2(0,L))},
\end{aligned}
$$

$$
X^T A X = \begin{pmatrix} u_x & v_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \chi u_x^2 + \beta v_x^2 - 2\gamma\beta u_x v_x \geq 0.
$$

Energia do Modelo Ampliado

A *energia* do sistema ampliado é dada por:

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\left[\|u_t(t)\|^2_{L^2(0,L)} + \|v_t(t)\|^2_{L^2(0,L)} + \int_0^L X^T A X \, dx\right] \\
&+ \frac{\mathfrak{C}}{2}\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, L^2(0,L))},
\end{aligned}
$$

$$
X^T A X = \begin{pmatrix} u_x & v_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \chi u_x^2 + \beta v_x^2 - 2\gamma\beta u_x v_x \geq 0.
$$

A energia E satisfaz

$$
\frac{d}{dt}E(t) = -\mathfrak{C}\int_{\mathbb{R}} (|\xi|^2 + \eta)\|\varphi(t,\xi)\|^2_{L^2(0,L)} d\xi
$$

Lemas Técnicos

Lema 2

Se $0 < \alpha < 1$ *e* $\eta \geq 0$, *então*

(i) $C(\alpha, \eta) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^{2\alpha-1}}{|\xi|^2 + \eta + 1} d\xi < +\infty;$

(ii) $D(\alpha, \eta) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^{2\alpha-1}}{(|\xi|^2 + \eta + 1)^2} d\xi < +\infty.$

Se $\eta > 0$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *ou se* $\eta = 0$ *e* $\lambda > 0$, *então*

(iii) $E(\lambda, \alpha, \eta) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^{2\alpha-1}}{|\xi|^2 + \eta + i\lambda} d\xi < +\infty.$

Além disso, dada $h \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$ *tem-se*

(iv) $H(x, \lambda, \alpha, \eta) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^{\frac{2\alpha-1}{2}} h(x, \xi)}{|\xi|^2 + \eta + i\lambda} d\xi \in L^2(0, L)$

Formulação do Semigrupo Associado

$$\mathcal{H} = \left[H_0^1(0,\, L)\right]^2 \times \left[L^2(0,\, L)\right]^2 \times L^2(\mathbb{R};\, L^2(0,\, L)),$$

munido do seguinte produto interno

$$\begin{aligned}\langle U,\, \widetilde{U}\rangle_{\mathcal{H}} \;=\;& \chi\langle u,\, \tilde{u}\rangle_{H_0^1(0,\,L)} + \beta\langle v,\, \tilde{v}\rangle_{H_0^1(0,\,L)} - \gamma\beta\langle u,\, \tilde{v}\rangle_{H_0^1(0,\,L)} \\ & - \gamma\beta\langle v,\, \tilde{u}\rangle_{H_0^1(0,\,L)} + \langle \phi,\, \tilde{\phi}\rangle_{L^2(0,\,L)} + \langle \psi,\, \tilde{\psi}\rangle_{L^2(0,\,L)} \\ & + \mathfrak{C}\langle \varphi,\, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\mathbb{R};\, L^2(0,\,L))},\end{aligned}$$

onde $U = (u,\, v,\, \phi,\, \psi,\, \varphi)^T$ e $\widetilde{U} = (\tilde{u},\, \tilde{v},\, \tilde{\phi},\, \tilde{\psi},\, \tilde{\varphi})^T$.

Formulação do Semigrupo Associado

A norma proveniente é dada por

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L X^T A X \, dx + \|\phi\|_{L^2(0,L)}^2 + \|\psi\|_{L^2(0,L)}^2 + \mathfrak{C}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}:L^2(0,L))}^2,$$

onde $A = \begin{pmatrix} \chi & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \beta \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$.

Formulação do Semigrupo Associado

A norma proveniente é dada por

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L X^T A X \, dx + \|\phi\|_{L^2(0,L)}^2 + \|\psi\|_{L^2(0,L)}^2 + \mathfrak{C}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}:L^2(0,L))}^2,$$

onde $A = \begin{pmatrix} \chi & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \beta \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$.

Observe que

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{[H_0^1(0,L)]^2}^2 &:= \int_0^L X^T A X dx \\ &= \chi \|u\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \beta \|v\|_{H_0^1(0,L)}^2 - 2\gamma\beta \langle u, v \rangle_{H_0^1(0,L)} \end{aligned}$$

define uma norma em $\left[H_0^1(0, L)\right]^2$.

Formulação do Semigrupo Associado

Fazendo $u_t = \phi$ e $v_t = \psi$, podemos reescrever o problema ampliado (3) na forma de Cauchy:

$$U_t(t) = \mathcal{A}U(t), \quad U(0) = U_0, \quad \forall\ t > 0, \tag{4}$$

onde $U = (u, v, \phi, \psi, \varphi)^T$, $U_0 = (u_0, v_0, u_1, v_1, 0)^T$, e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é o operador

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \\ \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \\ \chi u_{xx} - \gamma\beta v_{xx} - \mathfrak{C}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mu(\xi)\varphi(\xi)d\xi \\ \beta v_{xx} - \gamma\beta u_{xx} \\ -(|\xi|^2 + \eta)\varphi(\xi) + \mu(\xi)\phi \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Formulação do Semigrupo Associado

com domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{(u,\, v,\, \phi,\, \psi,\, \varphi)^T \in \mathcal{H} : \, u,\, v \in H_0^1(0,\, L) \cap H^2(0,\, L),\;\; \phi,\, \psi \in H_0^1(0,\, L),$$
$$|\xi|\varphi \in L^2(\mathbb{R};\, L^2(0,\, L)),\; -(|\xi|^2 + \eta)\varphi + \mu(\xi)\phi \in L^2\Big(\mathbb{R};\, L^2(0,\, L)\Big)\Big\}.$$

Boa-Colocação

Theorem 1 (Existência e Unicidade de Solução)

Se $U_0 \in \mathcal{H}$, o prolema de Cauchy (4) admite uma única solução fraca $U \in C([0, +\infty); \mathcal{H})$, dada por $U(t) = e^{t\mathcal{A}} U_0$.

Para $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, a solução encontrada é uma solução forte com a seguinte regularidade

$$U \in C([0, +\infty); \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty); \mathcal{H}).$$

Esboço da Demonstração

Utilizar o Teorema de Lumer-Phillips para provar que o operador $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração.

Esboço da Demonstração

Utilizar o Teorema de Lumer-Phillips para provar que o operador $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração.

(i) $Re\,\langle \mathcal{A}U,\, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\mathfrak{C}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (|\xi|^2 + \eta)\|\varphi(\xi)\|^2_{L^2(0,\,L)}\, d\xi \leq 0.$

(ii) $(I - \mathcal{A})$ é sobrejetivo.

Esboço da Demonstração

A condição (ii) equivale a encontrar um vetor $(u, v) \in \left[H_0^1(0, L)\right]^2$ tal que

$$\mathcal{B}((u, v), (\tilde{u}, \tilde{v})) = \mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{v}), \tag{6}$$

onde $\mathcal{B} : [H_0^1(0, L)]^2 \times [H_0^1(0, L)]^2 \to \mathbb{R}$ é a forma bilinear definida por

$$\mathcal{B}((u, v), (\tilde{u}, \tilde{v})) = C_1 \int_0^L u\tilde{u}dx + \int_0^L v\tilde{v}dx + \int_0^L X^T A\tilde{X}dx,$$

with $A = \begin{pmatrix} \chi & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \beta \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$ and $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{v}_x \end{pmatrix}$, and
$\mathcal{L} : [H_0^1(0, L)]^2 \to \mathbb{R}$ is the linear form defined by

$$\mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_0^L F_1\tilde{u}dx + \int_0^L F_2\tilde{v}dx - \mathfrak{C}\int_0^L \tilde{u}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(\xi)h(\xi)d\xi}{|\xi|^2 + \eta + 1}dx.$$

Estabilidade Exponencial

Para obter a Estabilidade Exponencial utilizamos o seguinte resultado:

Theorem 2 (Gearhart-Prüss-Huang)

Seja $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo de contração sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ é gerado pelo operador $\mathcal{A}$, então $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se

$$\varrho(\mathcal{A}) \supset i\mathbb{R} \quad e \quad \limsup_{|\lambda|\to+\infty} \|(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty, \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Estabilidade Exponencial

Proposição 1

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$ *é injetivo.*

Estabilidade Exponencial

Proposição 1

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$ *é injetivo.*

Proposição 2

Se $\eta = 0$, *então o operador* $\mathcal{A}$ *não é invertível e consequentemente* $0 \in \sigma(\mathcal{A})$.

Estabilidade Exponencial

Proposição 1

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, então $i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$ é injetivo.

Proposição 2

Se $\eta = 0$, então o operador $\mathcal{A}$ não é invertível e consequentemente $0 \in \sigma(\mathcal{A})$.

Demonstração. Seja $W_0 = (\mathrm{sen}(\pi x/L), 0, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}$ e suponha que existe $U_0 = (u_0, v_0, \phi_0, \psi_0, \varphi_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U_0 = W_0$. Nesse caso, $\varphi_0(\xi) = |\xi|^{\frac{2\alpha-5}{2}} \mathrm{sen}(\pi x/L)$. Contudo, $\varphi_0 \notin L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$ para $0 < \alpha < 1$. $\square$

Estabilidade Exponencial

Proposição 3

(a) *Se* $\eta = 0$, *então* $i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$ *é sobrejetivo, para* $\lambda \neq 0$.

(b) *Se* $\eta > 0$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$ *é sobrejetivo.*

Estabilidade Exponencial

Proposição 3

(a) *Se* $\eta = 0$, *então* $i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$ *é sobrejetivo, para* $\lambda \neq 0$.

(b) *Se* $\eta > 0$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$ *é sobrejetivo.*

Observe que, como mostrado na Proposição 2, para $\eta = 0$, temos $0 \in \sigma(\mathcal{A})$, e portanto, $i\mathbb{R} \not\subset \varrho(\mathcal{A})$. Portanto, de acordo com o Teorema de Gearhart-Prüss-Huang acima, segue-se que o semigrupo $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t\geq 0}$ gerado pelo operador $\mathcal{A}$ não é exponencialmente estável e, portanto, a solução $U(t) = e^{t\mathcal{A}}U_0$ o problema (4) não decai exponencialmente.

Estabilidade Exponencial

Por outro lado, tomando $\eta > 0$, a Proposição 1 e o item (b) da Proposição 3 garantem que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$, e Portanto, de acordo com o Teorema de Gearhart-Prüss-Huang, a estabilidade exponencial é equivalente à seguinte condição

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < +\infty.$$

Estabilidade Exponencial

Por outro lado, tomando $\eta > 0$, a Proposição 1 e o item (b) da Proposição 3 garantem que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$, e Portanto, de acordo com o Teorema de Gearhart-Prüss-Huang, a estabilidade exponencial é equivalente à seguinte condição

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < +\infty.$$

Theorem 3

Se $\eta > 0$, então o C_0-semigrupo de contração $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t\geq 0}$ gerado por $\mathcal{A}$ é exponencialmente estável em $\mathcal{H}$, isto é, existem constantes C e $\omega > 0$ tais que

$$\left\|e^{t\mathcal{A}}U_0\right\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{-\omega t}, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Esboço da prova

Argumentar por contradição!

Esboço da prova

Argumentar por contradição! Nesse caso existe uma sequência de números reais $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma sequência de vetores $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_{1n}, f_{2n}, g_{1n}, g_{2n}, h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{H}$ tais que $\lambda_n \to +\infty$ e

$$\|(\tilde{\lambda}_n\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} W_n\| \geq n\|W_n\|,$$

onde $\tilde{\lambda}_n = i\lambda_n$.

Esboço da prova

Argumentar por contradição! Nesse caso existe uma sequência de números reais $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma sequência de vetores $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_{1n}, f_{2n}, g_{1n}, g_{2n}, h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{H}$ tais que $\lambda_n \to +\infty$ e

$$\|(\tilde{\lambda}_n\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} W_n\| \geq n\|W_n\|,$$

onde $\tilde{\lambda}_n = i\lambda_n$.

Como $\tilde{\lambda}_n \in \varrho(\mathcal{A})$, existe uma sequência de vetores $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\phi_n, \psi_n, u_n, v_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $\|U_n\| = 1$ e $(\tilde{\lambda}_n\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} W_n = U_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Bibliografia

- A. Benaissa, K. Abderrahmane. **Well-posedness and energy decay of solutions to a Bresse system with a boundary dissipation of fractional derivative type.** Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. Vol. 23. 10(2018)4361-4395.
- K. Ammari, H. Fathi, L. Robbiano. **Fractional-Feedback stabilization for a class of evolution systems.** J. Differential Equations. 268(2020)5751-5791.
- K. A. Morris and A. O. Ozer **Strong stabilization of piezoeletric beams with magnetic**, in Proc, of 52nd IEEE Conference on Decision and Control. (2013) 3014-3019.