VIII ENCONTRO DA PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UFBA

# Estabilidade do sistema von Kármán com amortecimento interno


**Roseane da Silva Martins**

Orientador: Carlos Raposo
Co-orientador: Joilson Ribeiro
Colaborador: Octavio Vera


Novembro/ 2023

## Introdução

Theodor Von Kármán em 1910 apresentou o seguinte sistema não linear de equações diferenciais parciais para grandes deflexões de uma placa elástica fina

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta^2 w - [w, u] = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0, T), \\ \Delta^2 u + [w, w] = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0, T), \\ w(0) = w_0, \ \ w_t(0) = w_1 \ \text{ em } \ \Omega, \\ w = \dfrac{\partial w}{\partial \eta} = u = \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ \text{ em } \ \Gamma \times (0, T), \end{cases}$$

$$[w, u] = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
- $w(x, y, t)$ denota o deslocamento transversal
- $u(x, y, t)$ é a função de estresse de Airy
- $\eta$ é o vetor unitário normal externo em $\Gamma$.

[1] C.A.Raposo, M.L.Santos. General decay to a von Kármán system with memory. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 74 (2011) 937–945.
Foi considerado o modelo com memória de longo alcance e mostrado o decaimento geral da solução. Esse resultado incluiu certas funções de relaxamento que não são necessariamente do tipo exponencial ou polinomial.

[1] C.A.Raposo, M.L.Santos. General decay to a von Kármán system with memory. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 74 (2011) 937–945.
Foi considerado o modelo com memória de longo alcance e mostrado o decaimento geral da solução. Esse resultado incluiu certas funções de relaxamento que não são necessariamente do tipo exponencial ou polinomial.

[2] I. Lasiecka, T. F. Ma, R. N. Monteiro. Long-time dynamics of vectorial von Kármán system with nonlinear thermal effects and free boundary conditions. 23 (2018) 1037-1072
Foi levado em conta o acoplamento térmico não linear e condições de contorno livre e obtido um atrator global.

J. E. Lagnese e J. L. Lions [3] propuseram o seguinte sistema de Von Kármán

$$\begin{cases} \rho A w_{tt} - EA\left[\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)w_x\right]_x + EIw_{xxxx} = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,T), \\ \rho A u_{tt} - EA\left[u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right]_x = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,T). \end{cases} \tag{1}$$

onde $w(x,t)$ é o deslocamento transversal, $u(x,t)$ o deslocamento longitudinal, $(0,L)$ é o segmento ocupado pela viga e $T$ é um determinado tempo positivo. Os parâmetros físicos representam as propriedades do material: $E$ o módulo de Young, $A$ a área da seção transversal da viga, $L$ o comprimento da viga, $\rho A$ o peso por unidade de comprimento e $EI$ é a rigidez da viga ou, rigidez à flexão.

Em relação à esta formulação, em [4], o modelo de vigas de Timoshenko foi obtido como um limite do sistema von Kármán.


- [3] J. E. Lagnese and J. L. Lions, Modelling Analysis and Control of Thin Plates. Recherches en Mathématiques Appliquées 6, Masson, Paris, 1988.
- [4] G.P. Menzala, E. Zuazua. The beam equation as a limit of $1-D$ nonlinear von Kármán model. Appl. Math. Lett. 12 (1999) 47–52.

## Introdução

Estamos interessados em estudar a existência de solução e comportamento assintótico, considerando o amortecimento por atrito, o que é um problema natural, dado por

$$\begin{cases} w_{tt} - b_1 \left[ \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x + b_2 w_{xxxx} + a_1 w_t = 0, \\ u_{tt} - b_1 \left[ u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x + a_2 u_t = 0, \end{cases} \tag{2}$$

com condições iniciais

$$\begin{cases} w(x,0) = w_0(x), \ w_t(x,0) = w_1(x), \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases} \tag{3}$$

e condições de fronteira tipo Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, \\ w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

# EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

## Existência e unicidade de solução

Nosso ponto de partida é a propriedade dissipativa da energia.

**Proposição**

*A energia total do sistema* (2) *é definida por*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[|w_t|^2 + |u_t|^2 + b_1|u_x + \frac{1}{2}w_x^2|^2 + b_2|w_{xx}|^2\right] dx,$$

*e satisfaz*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = -a_1\int_0^L |w_t|^2 dx - a_2\int_0^L |u_t|^2 dx.$$

## Existência e unicidade de solução

Agora, introduzimos o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^2(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L),$$

equipado com o seguinte produto interno

$$\begin{aligned} \langle U, \widetilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} &= b_2 \int_0^L w_{xx} \overline{\widetilde{w}}_{xx} dx + \int_0^L \varphi \overline{\widetilde{\varphi}} dx \\ &+ b_1 \int_0^L u_x \overline{\widetilde{u}}_x dx + \int_0^L \psi \overline{\widetilde{\psi}} dx, \end{aligned}$$

onde

$$U = (w, \varphi, u, \psi)^T, \text{ com } \varphi = w_t, \, \psi = u_t.$$

## Existência e unicidade de solução

Vamos transformar o sistema (2)-(4) em problema de evolução no espaço de fase $\mathcal{H}$.
Note que,

$$U_t = \begin{pmatrix} w_t \\ \varphi_t \\ u_t \\ \psi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ b_1 \left[ \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x - b_2 w_{xxxx} - a_1 \varphi \\ \psi \\ b_1 \left[ u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x - a_2 \psi \end{pmatrix}$$

## Existência e unicidade de solução

A representação matricial anterior pode ser escrita como segue:

$$U_t = \begin{pmatrix} \varphi \\ -b_2 w_{xxxx} - a_1 \varphi \\ \psi \\ b_1 u_{xx} - a_2 \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \left[ \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x \\ 0 \\ \frac{b_1}{2} \left[ w_x^2 \right]_x \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{A} U + \mathcal{F}(U)$$

## Existência e unicidade de solução

Então, (2)-(4) foi escrito como um problema de evolução de primeira ordem

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U + \mathcal{F}(U), \\ U(0) = (w_0, \varphi_0, u_0, \psi_0)^T, \ \ \forall\, t > 0, \end{cases} \tag{5}$$

O domínio do operador linear $\mathcal{A}$ é definido da seguinte maneira:

$$D(\mathcal{A}) = \left( (w, \varphi, u, \psi)^T \in \mathcal{H} \ \middle| \ \begin{array}{l} w \in H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L), \\ \varphi \in H_0^2(0, L), \\ u \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \\ \psi \in H_0^1(0, L). \end{array} \right).$$

## Existência e unicidade de solução

A ideia principal é considerar o sistema de evolução não linear $U_t = \mathcal{A}U + \mathcal{F}(U)$ como uma perturbação $\mathcal{F}(U)$ do semigrupo linear de contração $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ em $\mathcal{H}$. Se o termo não linear $\mathcal{F}$ for localmente Lipschitz, então, resultados abstratos (consulte [7, Cap. 6] e também [8, Teorema 7.1]) sobre a geração de semigrupos não lineares pode ser aplicado a fim de concluir a existência de semigrupos não lineares em $\mathcal{H}$.


- [7] A., Pazy: Semigroups of Linear Operators and Applications to PDE's. Springer, New York (1986).
- [8] I., Chueshov, M., Eller, I.,Lasiecka: On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation. Commun. Partial Differ. Equ. 27, 1901-1951 (2002).

## Existência e unicidade de solução

A teoria de semigrupos não lineares também implica que para dados iniciais no domínio do gerador infinitesimal, as soluções correspondentes são contínuas no tempo com os valores em $\overline{D(\mathcal{A})}$. Para um esboço da prova, veja [8, Apêndice]. Se o domínio $D(\mathcal{A})$ for denso em $\mathcal{H}$, então as soluções fortes possuem a propriedade $U \in C([0, T), \mathcal{H})$.

[8] I., Chueshov, I., Lasiecka: Attractors and Long Time Behavior of von Káarmáan Thermoelastic Plates. Appl Math Optim 58, (2008) 195-241.

## Existência e unicidade de solução

**Teorema**

*O operator $\mathcal{A}$ gera um $C_0$-semigrupo de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ em $\mathcal{H}$.*

## Existência e unicidade de solução

**Teorema**

*O operator $\mathcal{A}$ gera um $C_0$-semigrupo de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ em $\mathcal{H}$.*

**Lemma**

*O operador $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é localmente Lipschitz.*

**Definição**

*Seja $S(t)$ um $C_0$-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$. Uma função contínua $U : (0, T] \to \mathcal{H}$ é denominada "mild solution" para o problem $U_t = \mathcal{A}U + \mathcal{F}(U)$ quando $U$ satisfaz a seguinte expressão*

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)\mathcal{F}(U(s))ds, \;\; 0 < t \leq T,$$

*onde $\mathcal{F}$ é localmente Lipschitz em $\mathcal{H}$.*

## Existência e unicidade de solução

**Teorema**

*Se* $U_0 \in \mathcal{H}$*, então o problema*

$$U_t = \mathcal{A}U + \mathcal{F}(U)$$

*possui uma única "mild solution"*

$$U \in C([0,\infty), \mathcal{H}) \text{ com } U(0) = U_0.$$

*Além disto, se* $U_0 \in D(\mathcal{A})$ *a "mild solution" é uma solução forte globalmente definida.*

## Existência e unicidade de solução

*Demonstração*

Desde que $\mathcal{A}$ gera um $C_0$-semigrupo de contrações e $\mathcal{F}$ é localmente Lipschitz, segue de [Pazy, Teorema 6.1.4] que $U_t = \mathcal{A}U + \mathcal{F}(U)$ possui uma única "*mild solution*"

$$U(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0 + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)}\mathcal{F}(U(s))ds,$$

definida em um intervalo $[0, t_{max})$, onde $t_{max}$ depende de $U_0$. Além disto, se $t_{max} < \infty$, então

$$\lim_{t \to t_{\max}} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty.$$

## Existência e unicidade de solução

Acontece que, da propriedade de dissipação da energia obtemos que

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0).$$

Sendo $u_x \leq u_x + \frac{1}{2} w_x^2$ temos que $\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2\mathcal{E}(t)$, então

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2\mathcal{E}(0) \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

Assim sendo, $t_{max} = +\infty$, e portanto, a solução é globalmente definida.

Finalmente, como consequência de [ Pazy, Teorema 6.1.5 ], deduzimos que quaisquer "*mild solution*" com dados iniciais em $D(\mathcal{A})$ são soluções fortes. $\square$

# COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Nosso resultado de estabilidade é o seguinte teorema:

**Teorema**

*Seja* $(w, u)$ *a solução de* (2)-(4) *dada pelo teorema anterior, com os dados iniciais em* $D(\mathcal{A})$*. Então, a energia total*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[|w_t|^2 + |u_t|^2 + b_1|u_x + \frac{1}{2}w_x^2|^2 + b_2|w_{xx}|^2\right] dx,$$

*satisfaz*

$$\mathcal{E}(t) \leq C\mathcal{E}(0)e^{-\alpha t}, \;\; \alpha, C > 0, \;\; \textit{para todo} \;\; t > 0.$$

C. A. Raposo, R. Martins, J. O. Ribeiro, O. Vera. Exponential stability of the von Kármán system with internal damping. Georgian Math. J. (2023) 2023-2026.

OBRIGADA!