Tempos de mistura em cadeias de Markov: o modelo de Moran

Milton Jara

IMPA

Modelo de Moran:

- n indivíduos $\rightsquigarrow \Lambda_n = \{1, \dots, n\}$
- 2 alelos $\rightsquigarrow Q = \{0, 1\}$
- Cada indivíduo tem um alelo $\rightsquigarrow \Omega_n := Q^{\Lambda_n}$
- Os alelos não oferecem nenhuma vantagem evolutiva
- Pode haver mutações entre os alelos
- $a, b > 0$: taxas de mutação

  $a \rightarrow$ de 0 a 1

  $b \rightarrow$ de 1 a 0

Modelagem estocástica da evolução

- $\eta_x(t)$: valor do alelo do indivíduo x no instante t
- $X(\eta) := \sum_{x \in \Lambda_n} \eta_x$ → número de indivíduos com alelo 1.

a) Escolhe-se um indivíduo $x \in \Lambda_n$. O valor de $\eta_x(t)$ passa a ser 1 com prob. $\frac{X(\eta(t))}{n}$, e 0 com prob. $1 - \frac{X(\eta(t))}{n}$.

b) Com prob. $\frac{a+b}{n}$, o passo a) é substituído por:

a') O valor de $\eta_x(t)$ passa a ser 1 com prob. $\frac{a}{a+b}$ e 0 com prob. $\frac{b}{a+b}$.

→ MUTAÇÃO: o novo indivíduo não herda o alelo de ninguém

o indivíduo x morre e é substituído por um novo, que herda o alelo de um indivíduo escolhido uniformemente ao acaso

- $(\eta(t); t \geq 0)$ é uma cadeia de Markov
- Ela tem uma única medida invariante μ^n_{ab}

$$\mu^n_{ab}(\eta) = \frac{B(a+X(\eta), b+n-X(\eta))}{B(a,b)}$$

$\longrightarrow$ função Beta

- <u>Pergunta</u>: Como depende a convergência de $\eta(t)$ a μ^n_{ab} da condição inicial $\eta(0)$?

Teor. 1: Em tempos de ordem $\Theta(n \log n)$, o modelo esquece a posição inicial dos alelos

Teor. 2: Em tempos de ordem $\Theta(n^2)$, o modelo converge a μ_{ab}^{n}.

→ Parte da tese de doutorado de Yangrui Xiang e Enzo Aljorin