

Métricas Assimétricas na Grassmanniana Total

André L. G. Mandolesi
Instituto de Matemática e Estatística, UFBA.
E-mail: andre.mandolesi@ufba.br

23/11/2023

Motivação
●○○○

Ângulos
○○○○○

Grassmannianas
○○○○○○

Métricas Assimétricas
○○○○○

Grassmanniana Total
○○○○○

Geometria
○○○○

Geodésicas
○○○○○○

Epílogo
○○○○○

Refs.
○○○○○

Motivação

Objetivo: medir a abertura entre subespaços via métricas (distâncias) em Grassmannianas (conjuntos de subespaços vetoriais).

Aplicações em: geometria, álgebra linear, análise funcional, estatística, aprendizagem de máquina, análise de imagens, comunicação sem fio, etc.

Para subespaços de mesma dimensão há boas métricas.

Para dimensões diferentes não há, e assimetrias (reta \subset plano, mas plano $\not\subset$ reta) sugerem o uso de métricas assimétricas.

Objetivo: medir a abertura entre subespaços via métricas (distâncias) em Grassmannianas (conjuntos de subespaços vetoriais).

Aplicações em: geometria, álgebra linear, análise funcional, estatística, aprendizagem de máquina, análise de imagens, comunicação sem fio, etc.

Para subespaços de mesma dimensão há boas métricas.

Para dimensões diferentes não há, e assimetrias (reta \subset plano, mas plano $\not\subset$ reta) sugerem o uso de métricas assimétricas.

Mas... o ângulo entre subespaços já não mede a abertura???

Problema resolvido!

Obrigado!

(Hoje o coffee break será mais cedo)

Problema resolvido!

Obrigado!

(Hoje o coffee break será mais cedo)

Calma, não é tão simples assim!

Motivação
○○○○

Ângulos
●○○○

Grassmannianas
○○○○○○

Métricas Assimétricas
○○○○○

Grassmanniana Total
○○○○○

Geometria
○○○○

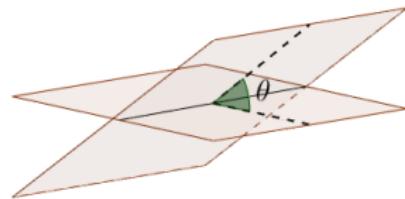
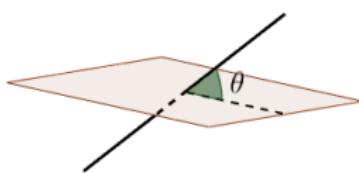
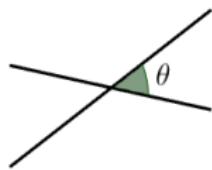
Geodésicas
○○○○○○

Epílogo
○○○○○

Refs.
○○○○○

Ângulos entre Subespaços

Ângulos entre subespaços em \mathbb{R}^3



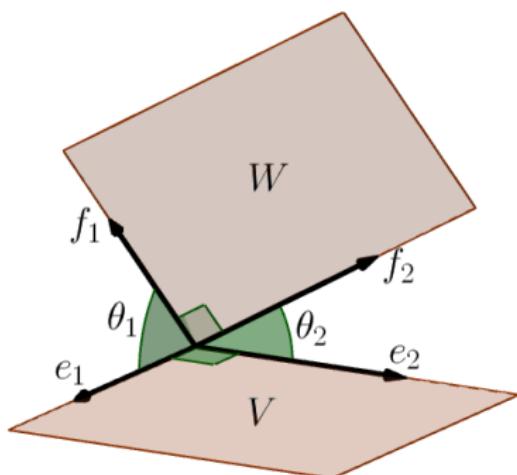
Rotações em \mathbb{R}^3 são dadas por eixo ou plano de rotação, e um ângulo θ .

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ângulos entre subespaços em \mathbb{R}^4

Em \mathbb{R}^4 há espaço para 2 rotações independentes, em planos ortogonais, com ângulos θ_1 e θ_2 .

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$



$$\text{span}\{e_1, f_1\} \perp \text{span}\{e_2, f_2\}$$

Ângulos principais entre subespaços de \mathbb{R}^n

Definição

Bases e ângulos principais de V e W são bases ortonormais

(e_1, \dots, e_p) e (f_1, \dots, f_q) , e ângulos $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_m \leq \frac{\pi}{2}$, com $m = \min\{p, q\}$, tais que:

- $\theta_i = \theta_{e_i, f_i}$ para $1 \leq i \leq m$;
- $e_i \perp f_j$ para $i \neq j$.

Descrição completa da inclinação relativa de V e W requer todos θ_i 's.

Mas em geral se tenta combiná-los numa única medida de distância.

Motivação
○○○○

Ângulos
○○○○

Grassmannianas
●○○○○○

Métricas Assimétricas
○○○○○

Grassmanniana Total
○○○○○

Geometria
○○○○

Geodésicas
○○○○○○

Epílogo
○○○○○

Refs.
○○○○○

Distâncias em Grassmannianas

Tipos de Grassmanniana

- **Grassmanniana**

$G_p^n = \{\text{subespaços de dimensão } p \text{ em } \mathbb{R}^n\}$.

Variedade compacta e conexa de dimensão $p(n - p)$.

- **Grassmanniana Total**

$G^n = \bigcup_{p=0}^n G_p^n = \{\text{todos os subespaços de } \mathbb{R}^n\}$.

Em geral, tem topologia de união disjunta, que não é interessante, e pode ser inconveniente, separando um plano de suas próprias retas.

Veremos que há topologias mais adequadas.

Métricas em Grassmannianas G_p^n

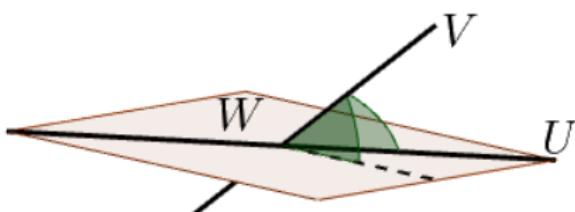
Para $V, W \in G_p^n$, com ângulos principais $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_p$, as seguintes métricas são topologicamente equivalentes:

- $d_g = \sqrt{\sum_{i=1}^p \theta_i^2}$ **(geodésica)**
- $d^2 \begin{cases} d_{cF} = 2\sqrt{\sum_{i=1}^p \sin^2 \frac{\theta_i}{2}} & \text{(cordal Frobenius ou Procrustes)} \\ d_{pF} = \sqrt{\sum_{i=1}^p \sin^2 \theta_i} & \text{(projeção Frobenius ou cordal)} \end{cases}$
- $\wedge \begin{cases} d_{FS} = \cos^{-1}(\prod_{i=1}^p \cos \theta_i) & \text{(Fubini-Study)} \\ d_{c\wedge} = \sqrt{2 - 2 \prod_{i=1}^p \cos \theta_i} & \text{(cordal \wedge)} \\ d_{BC} = \sqrt{1 - \prod_{i=1}^p \cos^2 \theta_i} & \text{(Binet-Cauchy)} \end{cases}$
- $\max \begin{cases} d_A = \theta_p & \text{(Asimov)} \\ d_{c2} = 2 \sin \frac{\theta_p}{2} & \text{(cordal 2-norma)} \\ d_{p2} = \sin \theta_p & \text{(projeção 2-norma ou gap)} \end{cases}$

Distâncias na Grassmanniana Total G^n

Dados $V \in G_p^n$ e $W \in G_q^n$ com $p < q$, parece natural definir

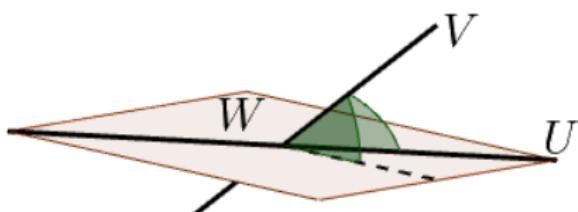
$$d(V, W) = \inf\{d_p(V, U) : U \in G_p^n, U \subset W\}.$$



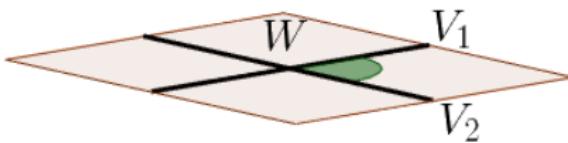
Distâncias na Grassmanniana Total G^n

Dados $V \in G_p^n$ e $W \in G_q^n$ com $p < q$, parece natural definir

$$d(V, W) = \inf\{d_p(V, U) : U \in G_p^n, U \subset W\}.$$



Mas falha desigualdade triangular!



$$d(V_1, W) + d(V_2, W) = 0 < d(V_1, V_2)$$

► não falha

Distâncias na Grassmanniana Total G^n

Para $V \in G_p^n$ e $W \in G_q^n$ com $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_m$, $m = \min\{p, q\}$, temos:

- “Projeção Frobenius” $\check{d}_{pF} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sin^2 \theta_i}$
- Dist. direcional $\vec{d}(V, W) = \sqrt{\max\{0, p - q\} + \sum_{i=1}^m \sin^2 \theta_i}$
- Gap de contenção $\delta(V, W) = \begin{cases} \sin \theta_p & \text{se } p \leq q \\ 1 & \text{se } p > q \end{cases}$
- Gap $\hat{\delta} = \begin{cases} \sin \theta_p & \text{se } p = q \\ 1 & \text{se } p \neq q \end{cases}$
- Fubini-Study $\hat{d}_{FS} = \begin{cases} \cos^{-1}(\prod_{i=1}^p \cos \theta_i) & \text{se } p = q \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } p \neq q \end{cases}$
- Projeção Frobenius $d_{pF} = \sqrt{\frac{|p-q|}{2} + \sum_{i=1}^m \sin^2 \theta_i}$
- Dist. simétrica $d_s = \sqrt{|p - q| + \sum_{i=1}^m \sin^2 \theta_i}$

Problemas

- \check{d}_{pF} e (talvez) \vec{d} não satisfazem a desigualdade triangular.
Logo não são métricas e não geram topologias.
- \vec{d} e δ são assimétricas, $d(V, W) \neq d(W, V)$.
Não é problema, mas requer cuidado. Assimetrias entre subespaços sugerem que isso seja natural.
- δ e $\hat{\delta}$ dão pouca informação, pois só usam θ_p .
- $\hat{\delta}$ e \hat{d}_{FS} não dão nenhuma se $p \neq q$, pois ficam constantes.
- $\hat{\delta}$, \hat{d}_{FS} , d_{pF} e d_s são não nulas mesmo se $V \subset W$.
Algumas aplicações requerem $d(V, W) = 0$ se $V \subset W$, o que métricas usuais não permitem.

Motivação
○○○○

Ângulos
○○○○

Grassmannianas
○○○○○○

Métricas Assimétricas
●○○○○

Grassmanniana Total
○○○○○

Geometria
○○○○

Geodésicas
○○○○○○

Epílogo
○○○○○

Refs.
○○○○○

Métricas Assimétricas

Definição

Métrica assimétrica é $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ tal que:

- ① $d(x, y) = d(y, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*condição de separação T_0*),
- ② $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*desigualdade triangular orientada*).

Não requer simetria $d(x, y) = d(y, x)$ (conveniente, mas restritiva).

Definição

Métrica assimétrica é $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ tal que:

- ① $d(x, y) = d(y, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*condição de separação T_0*),
- ② $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*desigualdade triangular orientada*).

Não requer simetria $d(x, y) = d(y, x)$ (conveniente, mas restritiva).

Alguns autores usam $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (cond. separação T_1).

Definição

Métrica assimétrica é $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ tal que:

- ① $d(x, y) = d(y, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*condição de separação T_0*),
- ② $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*desigualdade triangular orientada*).

Não requer simetria $d(x, y) = d(y, x)$ (conveniente, mas restritiva).

Alguns autores usam $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (cond. separação T_1).

Ocorrem se trajeto, tempo ou custo para ir de um ponto a outro depende do sentido: ruas de mão única, hora do rush, subida x descida, etc.

Usadas em topologia, geometria Finsler, teoria dos grafos, ciência da computação, ciência dos materiais, biologia, etc.

Exigem cuidado, mas são mais ricas que métricas usuais.

Estruturas Induzidas por d

- Ordem parcial: $x \leq y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$.
Assim, $d(x, y)$ mede a falha em termos $x \leq y$.

Estruturas Induzidas por d

- Ordem parcial: $x \leq y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$.
Assim, $d(x, y)$ mede a falha em termos $x \leq y$.
Com T_1 ficaria trivial ($x \leq x$).

Estruturas Induzidas por d

- Ordem parcial: $x \leq y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$.
Assim, $d(x, y)$ mede a falha em termos $x \leq y$.
Com T_1 ficaria trivial ($x \leq x$).
- Métricas usuais via simetrização (mas perdem informação).
Em particular, $\hat{d}(x, y) = \max\{d(x, y), d(y, x)\}$.

Estruturas Induzidas por d

- Ordem parcial: $x \leq y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$.
Assim, $d(x, y)$ mede a falha em termos $x \leq y$.
Com T_1 ficaria trivial ($x \leq x$).
- Métricas usuais via simetrização (mas perdem informação).
Em particular, $\hat{d}(x, y) = \max\{d(x, y), d(y, x)\}$.
- Três topologias:
 - τ^- gerada por $B_r^-(x) = \{y : d(y, x) < r\}$;
 - τ^+ gerada por $B_r^+(x) = \{y : d(x, y) < r\}$;
 - τ gerada por $B_r(x) = B_r^+(x) \cap B_r^-(x) = \{y : \hat{d}(x, y) < r\}$.

Estruturas Induzidas por d

- Ordem parcial: $x \leq y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$.
Assim, $d(x, y)$ mede a falha em termos $x \leq y$.
Com T_1 ficaria trivial ($x \leq x$).
- Métricas usuais via simetrização (mas perdem informação).
Em particular, $\hat{d}(x, y) = \max\{d(x, y), d(y, x)\}$.
- Três topologias:
 - τ^- gerada por $B_r^-(x) = \{y : d(y, x) < r\}$;
 - τ^+ gerada por $B_r^+(x) = \{y : d(x, y) < r\}$;
 - τ gerada por $B_r(x) = B_r^+(x) \cap B_r^-(x) = \{y : \hat{d}(x, y) < r\}$.

τ^\pm são T_0 (de 2 pontos, um tem vizinhança que separa do outro), mas são bem comportadas, se complementam, e combinadas dão τ , que é topologia métrica de \hat{d} .

Exemplo

Em \mathbb{R} , seja $d(x, y) = \max\{0, x - y\}$.

Induz ordem \leq usual, mede o quanto $x \leq y$ falha.

Ex: $d(3, 5) = 0$ e $d(5, 3) = 2$.

Exemplo

Em \mathbb{R} , seja $d(x, y) = \max\{0, x - y\}$.

Induz ordem \leq usual, mede o quanto $x \leq y$ falha.

Ex: $d(3, 5) = 0$ e $d(5, 3) = 2$.

$\hat{d}(x, y) = |x - y|$ mede falha em $x = y$, não detecta qual é maior.

Exemplo

Em \mathbb{R} , seja $d(x, y) = \max\{0, x - y\}$.

Induz ordem \leq usual, mede o quanto $x \leq y$ falha.

Ex: $d(3, 5) = 0$ e $d(5, 3) = 2$.

$\hat{d}(x, y) = |x - y|$ mede falha em $x = y$, não detecta qual é maior.

τ é a topologia usual,

τ^- é a semicontínua superior $\{(-\infty, x)\}$,

τ^+ é a semicontínua inferior $\{(x, \infty)\}$.

Exemplo

Em \mathbb{R} , seja $d(x, y) = \max\{0, x - y\}$.

Induz ordem \leq usual, mede o quanto $x \leq y$ falha.

Ex: $d(3, 5) = 0$ e $d(5, 3) = 2$.

$\hat{d}(x, y) = |x - y|$ mede falha em $x = y$, não detecta qual é maior.

τ é a topologia usual,

τ^- é a semicontínua superior $\{(-\infty, x)\}$,

τ^+ é a semicontínua inferior $\{(x, \infty)\}$.

$f(x) = -x$ dá simetria usual de (\mathbb{R}, τ) , e homeomorfismo $\tau^- \simeq \tau^+$.

Exemplo (Toy Models)

Em $M = \{0, 1, \dots, n\}$, seja $d(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \leq q, \\ 1 & \text{se } p > q. \end{cases}$

Medida binária da ordem \leq usual.

Exemplo (Toy Models)

Em $M = \{0, 1, \dots, n\}$, seja $d(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \leq q, \\ 1 & \text{se } p > q. \end{cases}$

Medida binária da ordem \leq usual.

Em $M^- = (M, \tau^-)$, abertos são $\{0, 1, \dots, p\}$;

em $M^+ = (M, \tau^+)$, abertos são $\{p, p+1, \dots, n\}$;

em $M = (M, \tau)$ todo $\{p\}$ é aberto (topologia discreta).

Exemplo (Toy Models)

Em $M = \{0, 1, \dots, n\}$, seja $d(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \leq q, \\ 1 & \text{se } p > q. \end{cases}$

Medida binária da ordem \leq usual.

Em $M^- = (M, \tau^-)$, abertos são $\{0, 1, \dots, p\}$;

em $M^+ = (M, \tau^+)$, abertos são $\{p, p+1, \dots, n\}$;

em $M = (M, \tau)$ todo $\{p\}$ é aberto (topologia discreta).

$f(p) = n - p$ é simetria de M , e homeomorfismo $M^- \simeq M^+$.

Exemplo (Toy Models)

Em $M = \{0, 1, \dots, n\}$, seja $d(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \leq q, \\ 1 & \text{se } p > q. \end{cases}$

Medida binária da ordem \leq usual.

Em $M^- = (M, \tau^-)$, abertos são $\{0, 1, \dots, p\}$;

em $M^+ = (M, \tau^+)$, abertos são $\{p, p+1, \dots, n\}$;

em $M = (M, \tau)$ todo $\{p\}$ é aberto (topologia discreta).

$f(p) = n - p$ é simetria de M , e homeomorfismo $M^- \simeq M^+$.

M^- é conexo por caminhos (M^+ idem): dados $p < q$,

$\varphi(t) = \begin{cases} p & \text{se } t \in [0, 1) \\ q & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases}$ é geodésica de comprimento 0 de p para q ;

$\varphi(-t)$ é geodésica de comprimento 1 de q para p .

Motivação
○○○○

Ângulos
○○○○

Grassmannianas
○○○○○○

Métricas Assimétricas
○○○○○

Grassmanniana Total
●○○○○

Geometria
○○○○

Geodésicas
○○○○○○

Epílogo
○○○○○

Refs.
○○○○○

Métricas Assimétricas na Grassmanniana Total

Seja $(d_p)_{p=0,\dots,n}$ uma família de métricas nas G_p^n 's tal que $d_p(V, W)$ é função não-decrescente dos ângulos principais não nulos.

Todas as métricas vistas em G_p^n satisfazem isso. [◀ métricas](#)

Definição

$$\Delta_p = \text{diam } G_p^N = \sup\{d_p(V, W) : V, W \in G_p^N\}, \text{ para } N \geq 2p.$$

Usamos G_p^N para V e W poderem se afastar ao máximo (ortogonais).

Isso torna Δ_p não-decrescente.

Teorema (Mandolesi, 2023)

Uma métrica assimétrica em G^n de $V \in G_p^n$ para $W \in G_q^n$ é dada por

$$d(V, W) = \inf\{d_p(V, U) : U \in G_p^n, U \subset W\},$$

tomando inf em $[0, \Delta_p]$. Além disso,

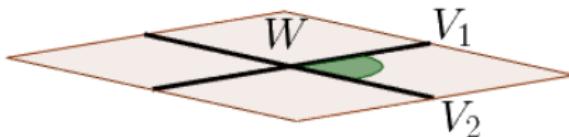
$$d(V, W) = \begin{cases} d_p(V, U) & \text{se } p \leq q, \\ \inf \emptyset = \Delta_p & \text{se } p > q, \end{cases}$$

para qualquer $U \in G_p^n$ com $P_W(V) \subset U \subset W$.

$d(V, W) = 0 \Leftrightarrow V \subset W$, logo $d(V, W)$ mede quanto falta para $V \subset W$.

Se $p > q$ isso está sempre tão longe de acontecer quanto possível, e $d(V, W)$ não sai do seu máximo Δ_p .

Parece o que tentamos antes, ◀ falha mas agora não forçamos $p < q$, e isso permite satisfazer a desigualdade triangular orientada.



$$d(V_1, V_2) \leq \Delta_1 \leq 0 + \Delta_2 = d(V_1, W) + d(W, V_2)$$

Métricas Assimétricas na Grassmanniana Total

Métricas assimétricas de $V \in G_p^n$ para $W \in G_q^n$ estendendo as métricas de antes. Todas geram as mesmas topologias τ e τ^\pm .

- I^2 $\begin{cases} d_g = \sqrt{\sum_{i=1}^p \theta_i^2} & \text{se } p \leq q, \text{ senão } \frac{\pi}{2}\sqrt{p} \\ d_{cF} = 2\sqrt{\sum_{i=1}^p \sin^2 \frac{\theta_i}{2}} & \text{se } p \leq q, \text{ senão } \sqrt{2p} \\ d_{pF} = \sqrt{\sum_{i=1}^p \sin^2 \theta_i} & \text{se } p \leq q, \text{ senão } \sqrt{p} \end{cases}$
- \wedge $\begin{cases} d_{FS} = \cos^{-1}(\prod_{i=1}^p \cos \theta_i) & \text{se } p \leq q, \text{ senão } \frac{\pi}{2} \\ d_{c\wedge} = \sqrt{2 - 2 \prod_{i=1}^p \cos \theta_i} & \text{se } p \leq q, \text{ senão } \sqrt{2} \\ d_{BC} = \sqrt{1 - \prod_{i=1}^p \cos^2 \theta_i} & \text{se } p \leq q, \text{ senão } 1 \end{cases}$
- \max $\begin{cases} d_A = \theta_p & \text{se } p \leq q, \text{ senão } \frac{\pi}{2} \\ d_{c2} = 2 \sin \frac{\theta_p}{2} & \text{se } p \leq q, \text{ senão } \sqrt{2} \\ d_{p2} = \sin \theta_p & \text{se } p \leq q, \text{ senão } 1 \end{cases}$

Motivação
○○○○

Ângulos
○○○○

Grassmannianas
○○○○○○

Métricas Assimétricas
○○○○○

Grassmanniana Total
○○○○○

Geometria
●○○○

Geodésicas
○○○○○○

Epílogo
○○○○○

Refs.
○○○○○

Geometria das Grassmannianas Totais

Topologias τ^- , τ^+ , τ ligadas a \subset , \supset , $=$. Para $r > 0$ pequeno:

- $B_r^-(V) = \{\text{subespaços quase contidos em } V\}$
(dim menor ou igual, e θ_i 's pequenos);
- $B_r^+(V) = \{\text{subespaços que quase contêm } V\}$
(dim maior ou igual, e θ_i 's pequenos).
- $B_r(V) = \{\text{subespaços quase iguais a } V\}$
(mesma dim, e θ_i 's pequenos);

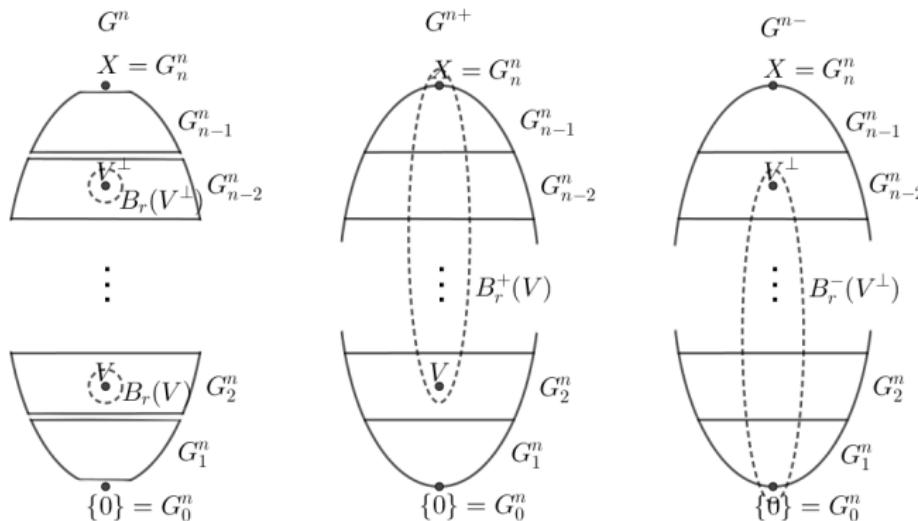
Ex.: para uma reta $L \subset \mathbb{R}^3$,

- $B_r^-(L)$ tem $\{0\}$ e retas dentro de um cone duplo;



- $B_r^+(L)$ tem \mathbb{R}^3 , planos e retas interceptando o interior do cone;
- $B_r(L)$ tem só retas.

G_p^n 's têm topologia usual (d restringe a d_p), são componentes de $G^n = (G^n, \tau)$, e estão interconectadas em $G^{n\pm} = (G^n, \tau^\pm)$.



Proposição

$f(V) = V^\perp$ dá homeomorf. $G_p^n \simeq G_{n-p}^n$ (simetria de G^n) e $G^{n-} \simeq G^{n+}$.

Proposição

G^n e $G^{n\pm}$ são compactas.

Proposição

$G^{n\pm}$ são conexas por caminhos.

Permite estudar topologicamente processos em que a dimensão muda (ex: compressão de dados).

Proposição

$SO(n)$ age em G^n ou $G^{n\pm}$ por isometrias, as órbitas são as G_p^n 's, e os quocientes são os “toy models”:

◀ Toy

$$G^n/SO(n) \simeq M \quad \text{e} \quad G^{n\pm}/SO(n) \simeq M^\pm.$$

Motivação
0000

Ângulos
0000

Grassmannianas
000000

Métricas Assimétricas
00000

Grassmanniana Total
00000

Geometria
0000

Geodésicas
●00000

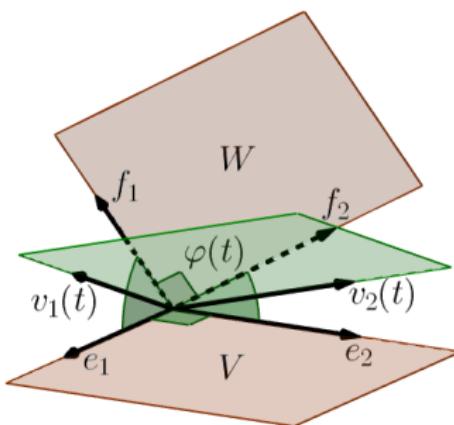
Epílogo
00000

Refs.
00000

Geodésicas para Métricas Assimétricas $/^2$ ou \wedge

Geodésicas na Grassmanniana G_p^n

Para métricas l^2 e \wedge em G_p^n ◀ métricas, geodésica mínima $\varphi(t)$ de V até W é obtida rotacionando cada e_i para f_i com velocidade constante.



Seu comprimento é a métrica geodésica $d_g(V, W) = \sqrt{\sum_{i=1}^p \theta_i^2}$.

Geodésicas nas Grassmannianas Totais $G^{n\pm}$

Definição

Caminho $\varphi : [a, b] \rightarrow G^{n\pm}$ tem **ponto crítico** se $\dim \varphi(t)$ muda nele.

Há uma:

- **expansão** se $\varphi(t)$ muda de U para $V \supsetneq U$;
- **contração** se $\varphi(t)$ muda de U para $V \subsetneq U$.

Obs: omitimos alguns detalhes técnicos.

Proposição

Em qualquer ponto crítico c há uma partição $[a, b] = I_1 \cup I_2$ tal que o comprimento ℓ_φ satisfaz:

- **expansão:** $\ell_\varphi = \ell_{\varphi|_{I_1}} + \ell_{\varphi|_{I_2}}$
- **contração:** $\ell_\varphi = \ell_{\varphi|_{I_1}} + \ell_{\varphi|_{I_2}} + \Delta\ell$, onde $\Delta\ell = \Delta_p$.

Proposição

Caminho η em $G^{n\pm}$ é nulo ($\ell_\eta = 0$) \Leftrightarrow é constante por partes, mudando apenas por um número finito de expansões.

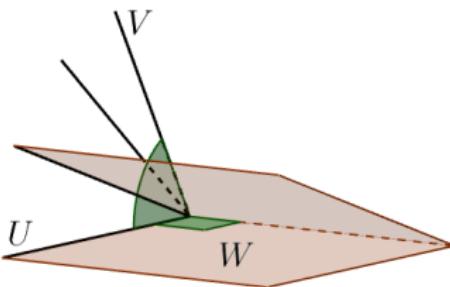
Proposição

Caminho η em $G^{n\pm}$ é nulo ($\ell_\eta = 0$) \Leftrightarrow é constante por partes, mudando apenas por um número finito de expansões.

Definição

Caminho **tipo I** em $G^{n\pm}$, de $V \in G_p^n$ para $W \in G_q^n$, é $\phi \oplus \eta$, onde:

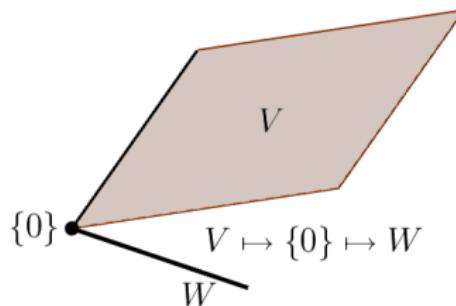
- ϕ é geod. mín. em G_p^n de V para U com $P_W(V) \subset U \subset W$;
- η é caminho nulo de $\{0\}$ para $U^\perp \cap W$.



Caminhos tipo I existem $\Leftrightarrow p \leq q$. Seu comprimento é $d_g(V, W)$.

Definição

Caminho tipo II tem 1 contração, com $\Delta\ell = \Delta_p$, e é nulo no resto.



Caminhos tipo II existem $\Leftrightarrow V \neq \{0\}$. Seu comprimento é Δ_p (“penalidade” por perda de informação na contração).

Para métrica assimétrica l^2 ou \wedge em $G^{n\pm}$:

Teorema (Mandolesi, 2023)

Caminho de $V \in G_p^n$ para $W \in G_q^n$ é geodésica mínima se, e só se:

- *for tipo I e $d_g(V, W) \leq \Delta_p$; ou*
- *for tipo II e $\Delta_p \leq d_g(V, W)$.*

Corolário

$G^{n\pm}$ são espaços geodésicos (há geodésicas mínimas entre quaisquer pontos).

Motivação
○○○○

Ângulos
○○○○

Grassmannianas
○○○○○○

Métricas Assimétricas
○○○○○

Grassmanniana Total
○○○○○

Geometria
○○○○

Geodésicas
○○○○○○

Epílogo
●○○○○

Refs.
○○○○○

Epílogo: Ângulo Assimétrico

Próximos passos:

- ① Entender melhor a geometria de $G^{n\pm}$ (grupo fundamental, homologia, etc.)
- ② Métricas assimétricas obtidas podem ser úteis em aplicações práticas?
- ③ Têm algum significado interessante, boas propriedades, e são fáceis de calcular?

Próximos passos:

- ➊ Entender melhor a geometria de $G^{n\pm}$ (grupo fundamental, homologia, etc.)
- ➋ Métricas assimétricas obtidas podem ser úteis em aplicações práticas?
- ➌ Têm algum significado interessante, boas propriedades, e são fáceis de calcular?

Resposta é sim para as métricas assimétricas \wedge ,  que estão relacionadas a um *ângulo assimétrico* $\Theta_{V,W}$.

Proposição

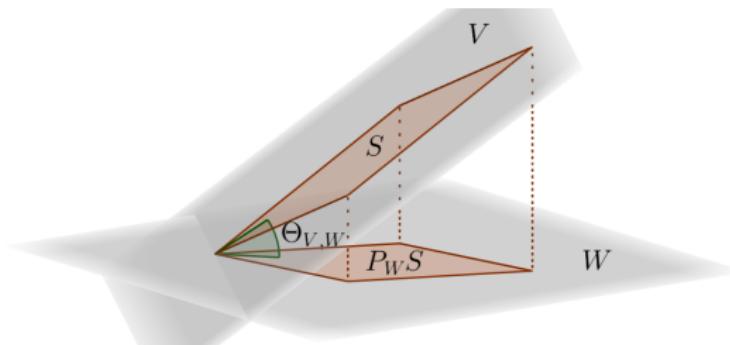
- $d_{FS}(V, W) = \Theta_{V,W}$
- $d_{c\wedge}(V, W) = 2 \sin \frac{\Theta_{V,W}}{2}$
- $d_{BC}(V, W) = \sin \Theta_{V,W}$

Definition

O **ângulo assimétrico** de $V \in G_p^n$ para $W \in G_q^n$ é dado por

$$\cos \Theta_{V,W} = \frac{\text{vol}_p(P_W(S))}{\text{vol}_p S},$$

para conjunto $S \subset V$ com $\text{vol}_p(S) \neq 0$ (volume de dimensão p).



Se $p > q$ temos $\Theta_{V,W} = \frac{\pi}{2}$. Em geral, $\Theta_{V,W} \neq \Theta_{W,V}$ se $p \neq q$.

Boas propriedades: trigonometria de subespaços com $\Theta_{V,W}$
(generalizando Teor. Pitágoras, Lei dos Cos, etc), e assimetria dá
fórmulas gerais para produtos das álgebras de Grassmann e Clifford:

Proposição

Se A e B forem multivetores simples com espaços V e W , temos:

- $|\langle A, B \rangle| = \|A\| \|B\| \cos \hat{\Theta}_{V,W}$ (com $\hat{\Theta}_{V,W} = \max\{\Theta_{V,W}, \Theta_{W,V}\}$)
- $\|A \cdot B\| = \|A\| \|B\| \cos \check{\Theta}_{V,W}$ (com $\check{\Theta}_{V,W} = \min\{\Theta_{V,W}, \Theta_{W,V}\}$)
- $\|A \sqcup B\| = \|A\| \|B\| \cos \Theta_{V,W}$
- $\|A \wedge B\| = \|A\| \|B\| \cos \Theta_{V,W^\perp}$
- $\|A \vee B\| = \|A\| \|B\| \cos \Theta_{V^\perp, W}$

Produtos permitem calcular $\Theta_{V,W}$. Para quem prefere matrizes:

Proposição

Se $\mathbf{A} = (\langle v_i, v_j \rangle)$, $\mathbf{B} = (\langle w_i, w_j \rangle)$ e $\mathbf{C} = (\langle w_i, v_j \rangle)$ para quaisquer bases (v_1, \dots, v_p) de V e (w_1, \dots, w_q) de W ,

$$\cos^2 \Theta_{V,W} = \frac{\det(\mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C})}{\det \mathbf{A}}.$$

Se $p = q$,

$$\cos \Theta_{V,W} = \frac{|\det \mathbf{C}|}{\sqrt{\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}}}.$$

Se \mathbf{P} é matriz de projeção ortogonal $V \rightarrow W$ em bases ortogonais,

$$\cos^2 \Theta_{V,W} = \det(\mathbf{P}^T \mathbf{P}).$$

Se $p = q$,

$$\cos \Theta_{V,W} = |\det \mathbf{P}|.$$

Motivação
○○○○

Ângulos
○○○○

Grassmannianas
○○○○○○

Métricas Assimétricas
○○○○○

Grassmanniana Total
○○○○○

Geometria
○○○○

Geodésicas
○○○○○○

Epílogo
○○○○○

Refs.
●○○○○

Referências

Grassmannianas e suas métricas:

- S. Kobayashi e K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. 2, Wiley, 1996.
- S.E. Kozlov, *Geometry of real Grassmann manifolds, Parts I,II*, J. Math. Sci., 100(3):2239-2253, 2000.
- Y. Wong, *Differential geometry of Grassmann manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 57(3):589-594, 1967.
- L. Qiu et al., *Unitarily invariant metrics on the Grassmann space*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 27(2):3, 507-531, 2005.
- A. Edelman et al., *The geometry of algorithms with orthogonality constraints*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 20(2):303-353, 1999.

Grassmanniana Total e aplicações:

- K. Ye e L.H. Lim, *Schubert varieties and distances between subspaces of different dimensions*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 37(3):1176-1197, 2016.
- R. Basri et al., *Approximate nearest subspace search*, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 33(2):266-278, 2011.
- P. Gruber et al., *Hierarchical extraction of independent subspaces of unknown dimensions*, Int. Conf. Ind. Compon. Anal. Signal Separation, 259-266, Springer, 2009.
- C.A. Beattie et al., *Convergence of polynomial restart Krylov methods for eigenvalue computations*, SIAM Review, 47(3):492-515, 2005.
- L. Wang et al., *Subspace distance analysis with application to adaptive Bayesian algorithm for face recognition*, Pattern Recognit., 39(3):456-464, 2006.

Métricas assimétricas:

- A.C.G. Mennucci, *On asymmetric distances*, Anal. Geom. Metr. Spaces, 1(1):200–231, 2013.
- S. Cobzas, *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, Springer, 2012.
- H. Busemann, *Local metric geometry*, Trans. Amer. Math. Soc., 56:200-274, 1944.
- J.C. Kelly, *Bitopological spaces*, Proc. Lond. Math. Soc., s3-13(1):71-89, 1963.

Meus artigos:

- A.L.G. Mandolesi, *Asymmetric Geometry of Total Grassmannians*, [arXiv:2310.17865](https://arxiv.org/abs/2310.17865), 2023.
- A.L.G. Mandolesi, *Blade products and angles between subspaces*, Adv. Appl. Clifford Algebras 31(69), 2021.
- A.L.G. Mandolesi, *Projection Factors and Generalized Real and Complex Pythagorean Theorems*, Adv. Appl. Clifford Algebras 30(43), 2020.

Motivação
0000

Ângulos
0000

Grassmannianas
000000

Métricas Assimétricas
00000

Grassmanniana Total
00000

Geometria
0000

Geodésicas
000000

Epílogo
00000

Refs.
0000●

Obrigado!