Funções isoparamétricas em variedades Finsler

Patrícia Marçal

VIII EPGMAT

23 de Novembro de 2023.

1854

Riemann

Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen

"[...] Para o Espaço, quando a posição de pontos é expressa em coordenadas retilíneas, $ds = \sqrt{\sum (dx)^2}$; o Espaço é, portanto, incluído no caso mais simples. O próximo caso em simplicidade inclui aquelas variedades nas quais o elemento de linha pode ser expresso como a raiz quarta de uma expressão diferencial quártica."

1918

Finsler

Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen

"O presente trabalho lida com diferentes partes de Geometria Diferencial em espaços multidimensionais baseado em uma medida generalizada. A saber, o comprimento de uma curva é medido pela integral de uma função substancialmente arbitrária das coordenadas e suas primeiras derivadas. A Geometria Euclidiana e aquela de espaços com curvatura arbitrária são os casos particulares mais importantes aos quais essas investigações podem ser aplicadas."

1918–1919

Seja o espaço $\mathbb{R}^3$.

❓ Quais ondas têm velocidade constante em cada frente de onda?

Laura

Sopra la propagazione di onde in un mezzo indefinito

> *"Existem fortes restrições sobre as frentes de onda."*

Somigliana

Sulle relazione fra il principio di Huygens e l'ottica geometrica

> *"As frentes de onda devem ser planos paralelos, esferas concêntricas, ou cilindros coaxiais."*

1924

Segre

Una proprieta caratteristica di tre sistemi ∞^1 di superficie

Mesmo resultado de Somigliana, independentemente.

1925–1926

Berwald
Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Maßbestimmung

Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus

Synge
A generalisation of the Riemannian line-element

Taylor
A generalization of Levi-Civita's parallelism and the Frenet formulas

1934

Cartan

Les Espaces de Finsler

"Espaços Finsler" ou "Espaços de Finsler"

1937

Levi-Civita

Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio Euclideo

Reproduziu o resultado de Somigliana e Segre.

"frente de onda" $\rightarrow$ *"superfície isoparamétrica"*

1938

❓ Em uma variedade Riemanniana (M, g), quais ondas têm velocidade constante em cada frente de onda?

Segre

Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni

Classificação de hipersuperfícies isoparamétricas em $\mathbb{R}^n$.

Cartan

Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante

Classificação de hipersuperfícies isoparamétricas em $\mathbb{H}^n$.

Funções isoparamétricas em variedades Riemannianas

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana.

Uma função suave não-constante $f : U \subset M \to \mathbb{R}$ é isoparamétrica se existem funções reais $a : f(U) \to \mathbb{R}$ contínua e $b : f(U) \to \mathbb{R}$ suave tais que:

$$\triangle f = a \circ f \tag{1a}$$

$$g(\nabla f, \nabla f) = b \circ f \tag{1b}$$

$\{f^{-1}(c) : c \text{ valor regular de } f\}$ é uma família de hipersuperfícies isoparamétricas em (M, g).

(1b) $\Rightarrow$ os conjuntos de nível regulares são paralelos entre si.

Se (1b) vale, então (1a) $\iff$ cada conjunto de nível regular tem curvatura média constante.

Classificação de hipersuperfícies isoparamétricas em $\mathbb{S}^n$:

Cartan, 1939
Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques

$\vdots$

Chi, 2020
Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, IV

2012

Ge & Ma

Anisotropic isoparametric hypersurfaces in Euclidean spaces

Classificação de hipersuperfícies isoparamétricas anisotrópicas em espaços Euclidianos; "Wulff shape".

2016

He, Yin, & Shen

Isoparametric hypersurfaces in Minkowski spaces

Classificação de hipersuperfícies isoparamétricas em espaços de Minkowski.

- hiperplanos;
- hiperesferas de Minkowski;
- cilindros de Minkowski duais ... $F^*(\omega) := \sup_{F(y)=1} \omega(y)$.

Hipersuperfície "reversa" ou não; não necessariamente isométricas.

Funções isoparamétricas em variedades Finsler

Seja (M, F, ν) é um m-espaço Finsler.

Uma função suave não-constante $f : U \subset M \to \mathbb{R}$ é isoparamétrica se existem funções reais contínuas a em $f(\{p \in U : df_p \neq 0\})$ e b em $f(U)$, com b suave no interior de $f(\{p \in U : df_p \neq 0\})$, tais que:

$$\triangle f = a \circ f \tag{2a}$$

$$F^2(\nabla f) = b \circ f \tag{2b}$$

$\{f^{-1}(c) : c$ valor regular de $f\}$ é uma família de hipersuperfícies isoparamétricas em (M, F, ν) com respeito ao campo o.n. $\dfrac{\nabla f}{F(\nabla f)}$.

- O gradiente é não-linear e sua expressão é implícita em geral.
- Uma variedade Finsler não possui uma forma volume canônica.
- Há várias noções para forma volume “induzida”.
- Existem diferentes definições para o Laplaciano.
- O Laplaciano não-linear é expresso implicitamente em geral.
- Como o Laplaciano não está definido nos pontos críticos, muitos métodos de Geometria Riemanniana não se aplicam.

(2b) $\Rightarrow$ os conjuntos de nível regulares são paralelos na direção do gradiente.

Se (2b) vale, então (2a) $\iff$ cada conjunto de nível regular tem curvatura média não-linear constante.

Outras classificaçõs de hipersuperfícies isoparamétricas em espaços Finsler (com a forma volume de Busemann-Hausdorff):

He, Yin, & Shen, 2017
Isoparametric hypersurfaces in Funk spaces

Xu, 2018
Isoparametric hypersurfaces in a Randers sphere of constant flag curvature

He, Dong, & Yin, 2020
Classifications of isoparametric hypersurfaces in Randers space forms

Seja (M, R, ν_{BH}), com R uma métrica Randers com data de navegação (h, W).

(M, R, ν_{BH}) e (M, h) possuem as mesmas hipersuperfícies isoparamétricas.

- Seja ρ uma função em (M, R) com $R(\nabla^R \rho) = 1$.
- $g^R_{\nabla^R \rho}$ é uma métrica Riemanniana.
- $\triangle^R$ – Laplaciano não-linear em (M, R, ν).
- $\hat{\triangle}$ – Laplaciano em $(M, g^R_{\nabla^R \rho})$.
- $\triangle^R \rho = \hat{\triangle} \rho - S(\nabla^R \rho)$; Shen (1997).

2020

Dong & He

Isoparametric hypersurfaces of a class of Finsler manifolds induced by navigation problem in Minkowski spaces

Classificação de hipersuperfícies isoparamétricas em um espaço de Zermelo (M, Z, ν_{BH})*, onde a data de navegação* (F, W) *é composta por uma norma de Minkowski* F *e um campo homotético* W *(i.e.* $(\varphi_t^W)^* F = \mathrm{e}^{-\sigma t} F$*).*

Equivalência de hipersuperfícies isoparamétricas em espaços de Zermelo (com a forma volume de Busemann-Hausdorff):

Xu, Matveev, Yan, & Zhang, 2020
Some geometric correspondences for homothetic navigation

Xu, Tan, & Xu, 2021
Isoparametric hypersurfaces induced by navigation in Lorentz Finsler geometry

He, Huang, & Dong, 2022
Isoparametric hypersurfaces in conic Finsler manifolds

2023

Alves & M.

Isoparametric functions and mean curvature in manifolds with Zermelo navigation

Equivalência de hipersuperfícies isoparamétricas em (M, Z, ν), *onde* Z *é uma pseudo-métrica de Zermelo cônica com data de navegação* (F, W), W *é* F*-homotético e* $\operatorname{div} W$ *é constante.*

- $\gamma(t) = \varphi_t^W(\tilde{\gamma}(s(t)))$; Javaloyes & Vitório (2018).
- $\nabla^Z \rho(\varphi_t(p)) = W(\tilde{\varphi}_{s(t)}(p)) + s'(t) \mathrm{d}\varphi_t^W(\nabla^F \tilde{\rho}(\tilde{\varphi}_{s(t)}(p)))$.
- $\triangle^Z \rho(\varphi_t(p)) = \operatorname{div} W(\tilde{\varphi}_{s(t)}(p)) + s''(t) + s'(t)\, \mathrm{e}^{\tau t} \triangle^F \tilde{\rho}(\tilde{\varphi}_{s(t)}(p))$.

Z positiva-definida:

$$\frac{1}{Z(\nabla^Z f)}\left[\triangle^Z f - \mathrm{Hess}^Z f\left(\frac{\nabla^Z f}{Z(\nabla^Z f)}, \frac{\nabla^Z f}{Z(\nabla^Z f)}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{F(\nabla^F f)}\left[\triangle^F f - \mathrm{Hess}^F f\left(\frac{\nabla^F f}{F(\nabla^F f)}, \frac{\nabla^F f}{F(\nabla^F f)}\right)\right] + \mathrm{div}\, W.$$

ν forma volume de Busemann-Hausdorff:

$$\Pi^Z_\xi = \Pi^F_{\xi - W} + \mathrm{div}\, W.$$

Obrigado!