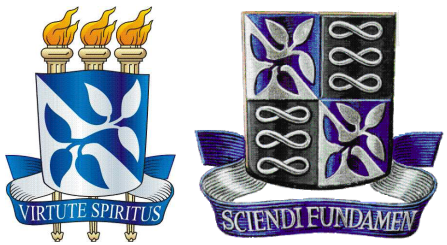
Variedades dualmente flat tóricas e formas espaciais complexas

Danuzia Figueirêdo
Orientador: Mathieu Molitor

Universidade Federal da Bahia
VIII EPGMAT-UFBA

Salvador-Ba, 2023



Conteúdos

1. Introdução
2. Variedades dualmente flat
3. Torificação
4. Classificação

Introdução

Introdução

$$(M, h, \nabla) \xrightarrow{\textbf{Torificação}} \Phi : \mathbb{T}^n \times N \to N$$

Variedade dualmente flat

Variedade de Kähler

Resultado principal: Classificação das torificações de variedades dualmente flat no caso mais simples, ou seja, dimensão de M igual a 1.

[1] Mathieu Molitor. Kähler toric manifolds from dually flat spaces, arXiv:2019.04839, 2021.

Variedades dualmente flat

Variedades dualmente flat

Definições.

(1) Seja (M, h) uma variedade Riemanniana munida com uma conexão linear ∇. A **conexão dual** de ∇ com respeito à h é a única conexão linear, denotada por ∇^*, satisfazendo

$$Xh(Y,Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla^*_X Z)$$

para todo campos de vetores X, Y, Z em M.

(2) Seja (M, h) uma variedade Riemanniana munida com uma conexão linear ∇ e com a conexão dual de ∇, ∇^*. Dizemos que (M, h, ∇) é uma **variedade dualmente flat** se ambas conexões ∇ e ∇^* são flat.

EXEMPLOS PRINCIPAIS:

- Variedades Riemannianas flat;
- Classe de variedades estatísticas chamada Famílias exponencias.

Exemplos de famílias exponenciais

- **Distribuição Binomial**

  Seja $\Omega = \{0, \ldots, n\}$. Definamos

$$\mathcal{B}(n) = \left\{ p(k,q) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \mid k \in \Omega,\ q \in (0,1) \right\} \cong \mathbb{R}.$$

- **Distribuição de Poisson**

  Seja $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Definamos

$$\mathcal{P} = \left\{ p(k;\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mid k \in \Omega,\ \lambda > 0 \right\} \cong \mathbb{R}.$$

Exemplos de famílias exponenciais

- **Distribuição Categórica**

  Seja $\Omega = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Definamos

$$\mathcal{P}_{n+1}^{\times} = \left\{ p : \Omega \to \mathbb{R} \mid p(x) > 0;\ \forall\, x \in \Omega \text{ e } \sum_{k=0}^{n} p(x_k) = 1 \right\} \cong \mathbb{R}^n.$$

- **Distribuição Binomial Negativa**

  Seja $\Omega = \{0, 1, 2 \ldots\}$ e seja $r \in \Omega$ tal que $r \geq 1$. Definamos

$$\mathcal{NB}(r) = \left\{ p(k; q) = \binom{k+r-1}{r-1} (1-q)^k q^r \mid k \in \Omega,\ q \in (0,1) \right\} \cong (-\infty, 0).$$

Estrutura dualmente flat em famílias exponenciais

Denotamos por $\mathcal{E}$ as famílias exponenciais: $\mathcal{B}(n)$; $\mathcal{P}$; $\mathcal{P}_n^{\times}$; $\mathcal{NB}(r)$. Então

$(\mathcal{E}, h_F, \nabla^{(e)}, \nabla^{(m)})$ é uma variedade dualmente flat.

- $h = h_F$ (métrica de Fisher);
- $\nabla = \nabla^{(e)}$ (conexão exponencial);
- $\nabla^* = \nabla^{(m)}$ (conexão de mistura).

Torificação

Retículo paralelo

Seja (M, h, ∇) uma variedade dualmente flat conexa de dimensão n.

Definição. Um subconjunto $L \subset TM$ é dito ser um **retículo paralelo** com respeito à ∇ se existem n campos de vetores paralelos $X_1, \ldots, X_n$ em M tais que:

- $\{X_1(p), \ldots, X_n(p)\}$ é base para T_pM para todo $p \in M$.
- $L = \{k_1X_1(p) + \cdots + k_nX_n(p) |\ p \in M,\ k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}\}$.

Neste caso escrevemos $L = L_X$, onde $X = (X_1, \ldots, X_n) \in X(M)^n$, e chamamos X um gerador para L.

Dado $X = (X_1, \ldots, X_n)$ um gerador para L, denotamos por $\Gamma(L, X) = \Gamma(L)$ o grupo das transformações de TM da forma

$$TM \to TM,\ u \mapsto u + k_1X_1 + \cdots + k_nX_n \ \ (k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}).$$

Torificação

- (M, h, ∇) variedade dualmente flat conexa de dimensão n.
- (N, g, J, ω) variedade de Kähler conexa de dimensão real $2n$, equipada com uma ação do toro $\Phi : \mathbb{T}^n \times N \to N$ efetiva, holomorfa e isométrica.
- $N^\circ = \{p \in N |\ \Phi(t, p) = p \Rightarrow t = e\}$

Definição. Dizemos que N é uma **torificação** de M se existem um retículo paralelo $L \subset TM$ com respeito a ∇ e um isomorfismo de Kähler $F : TM/\Gamma(L) \to N^\circ$ que é equivariante.

Exemplos:

Variedade dualmente flat (M)	Torificação (N)
Poisson $(\mathcal{P})$	$\mathbb{C}$
Binomial $(\mathcal{B}(n))$	$\mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{S}^2$
Binomial Negativa $(\mathcal{NB}(\mathrm{r}))$	$\mathbb{D}_1$

Torificação regular

Definições.

- Uma variedade de Kähler N é **regular** se é conexa, simplesmente conexa, completa e a métrica de Kähler é anáilitica real. A torificação $\Phi : \mathbb{T}^n \times N \to N$ é **regular** se N é regular.
- Dizemos que uma variedade dualmente flat conexa (M, h, ∇) é **tórica** se ela possui uma torificação regular.

QUESTÕES: Quais são as variedades dualmente flat de dimensão 1 que são tóricas? E quais são suas torificações?

Classificação

Curvatura Seccional Hessiana

Sejam (M, h, ∇) uma variedade dualmente flat de dimensão 1 e $x : U \to \mathbb{R}$ um sistema de coordenadas afim definido em algum subconjunto $U \subset M$ aberto e conexo. A **curvatura seccional Hessiana em dimensão 1** é uma função suave $S : M \to \mathbb{R}$, cuja expressão local é dada por

$$S(x) = \frac{1}{2h} \frac{\partial^2 \ln(h)}{\partial x^2},$$

onde $h(x) = h(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x})$.

Exemplos:

Variedade dualmente flat (M)	S
Poisson $(\mathcal{P})$	0
Binomial $(\mathcal{B}(n))$	$\frac{-1}{n}$
Binomial Negativa $(\mathcal{NB}(\mathrm{r}))$	$\frac{1}{r}$

Curvatura Seccional Hessiana

Observação. Seja M uma variedade dualmente flat, TM é naturalmente uma variedade de Kähler.

Proposição. Seja (M, h, ∇) uma variedade dualmente flat. São equivalentes:

(i) A curvatura seccional Hessiana de (M, h, ∇) é uma constante c.

(ii) A curvatura seccional holomorfa de (TM, J, g, ω) é uma constante $-c$.

[1] Hirohiko Shima. *The geometry of Hessian structures*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007.

Modelos dualmente flat

Seja $c \in \mathbb{R}$ e M_c a variedade definida por

$$M_c = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{if} \quad c \geq 0, \\ (-\infty, 0) & \text{if} \quad c < 0. \end{cases}$$

Seja h_c a métrica Riemanniana em M_c, cuja expressão local na coordenada θ é dada por:

$$h_c(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{c\cosh^2(\theta)} & \text{if} \quad c > 0, \\ e^{\theta} & \text{if} \quad c = 0, \\ \frac{-1}{c\sinh^2(\theta)} & \text{if} \quad c < 0. \end{cases}$$

Modelos dualmente flat

Lema. $(M_c, h_c, \nabla^{\text{flat}})$ é uma variedade Hessiana de dimensão 1 com curvatura seccional Hessiana constante e igual a $-c$.

Prova-se que:

- $(\mathcal{P}, h_F, \nabla^{(e)}) \simeq (M_0, e^{\theta}, \nabla^{\text{flat}})$ e $S = 0$.
- $(\mathcal{B}(n), h_F, \nabla^{(e)}) \simeq \left(M_{\frac{1}{n}}, \frac{n}{4\cosh^2(\frac{\theta}{2})}, \nabla^{\text{flat}}\right)$ e $S = \frac{-1}{n}$.
- $(\mathcal{NB}(r), h_F, \nabla^{(e)}) \simeq \left(M_{\frac{-1}{r}}, \frac{r}{4\sinh^2(\frac{\theta}{2})}, \nabla^{\text{flat}}\right)$ e $S = \frac{1}{r}$.

Formas espaciais complexas

Seja $F(c)$ a forma espacial complexa completa simplesmente conexa de dimensão complexa 1, e de curvatura seccional holomorfa constante igual a $c \in \mathbb{R}$.

$$F(c) = \begin{cases} \mathbb{D}(c) & \text{if} \quad c < 0, \\ \mathbb{C} & \text{if} \quad c = 0, \\ \mathbb{P}_1(c) & \text{if} \quad c > 0, \end{cases}$$

Seja $\Phi_c : \mathbb{T} \times F(c) \to F(c)$ a ação do toro definida via formulas:

$$\begin{cases} \Phi_c([t], z) = e^{2i\pi t} z & \text{if} \quad c \leq 0, \\ \Phi_c([t], [z_0, z_1]) = [e^{2i\pi t} z_0, z_1] & \text{if} \quad c > 0. \end{cases}$$

Proposição. Dado $c \in \mathbb{R}$, a forma espacial $F(c)$, equipada com a ação do toro Φ_c, é uma torificação regular de $(M_c, h_c, \nabla^{\text{flat}})$.

Primeiro resultado princicpal

Lema. Seja (M, h, ∇) uma variedade dualmente flat, conexa, de dimensão 1 e curvatura seccional Hessiana $S : M \to \mathbb{R}$. Se M é tórica e satisfaz a condição P, então S é constante.

Teorema. Seja (M, h, ∇) uma variedade dualmente flat, conexa, de dimensão 1 com $x : M \to \mathbb{R}$ um sistema de coordenadas afim global. Suponha que M é tórica e que satisfaz a condição P. Então $M \simeq M_c$ para algum $c \in \mathbb{R}$.

Observação. Se $M \simeq M_c$, então $\Phi_c : \mathbb{T} \times F(c) \to F(c)$ é uma torificação regular de M.

Condição P: o espaço das funções de Kähler de uma torificação regular N separa os pontos de N.

Segundo resultado principal

Nas condições do Teorema acima, assumimos que $M = \mathcal{E}$ é uma família exponencial unidimensional definida sob $\Omega = \{x_0, \dots, x_m\}$. Tome $c = \frac{1}{p}$, onde $p \in \{1, 2, \dots\}$.

Teorema. Seja $\mathcal{E}$ uma família exponencial unidemsional definida sob $\Omega = \{x_0, \dots, x_m\}$ e seja $\mathcal{E}_{red}$ a familia exponencial reduzida de $\mathcal{E}$ definida sob $\Omega_{red} = \{0, 1, \dots, p\}$. Suponha que $\mathcal{E}$ é tórica (+ algumas condições técnicas). Então

1. $\mathcal{E}_{red} \sim \mathcal{B}(p)$ (equivalência de famílias exponenciais).
2. $\mathcal{E} \cong M_{1/p}$ (isomorfismo de variedades dualmente flat).
3. $\mathbb{T} \times \mathbb{P}_1(\frac{1}{p}) \to \mathbb{P}_1(\frac{1}{p})$, $([t], [z_0, z_1]) \mapsto [e^{2i\pi t} z_0, z_1]$ é uma torificação regular de $\mathcal{E}$.

Muito obrigada pela atenção!