Fundamentos de Geometria Finsler

Benigno Oliveira Alves e Patrícia Marçal

VIII EPGMAT

22 de Novembro de 2023.

Norma de Minkowski

Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

Norma de Minkowski

Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

Uma função contínua $F : V \to [0, \infty)$ é uma norma de Minkowski se:

Norma de Minkowski

Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

Uma função contínua $F : V \to [0, \infty)$ é uma norma de Minkowski se:

i) F é suave em $V \setminus 0$;

Norma de Minkowski

Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

Uma função contínua $F : V \to [0, \infty)$ é uma norma de Minkowski se:

i) F é suave em $V \setminus 0$;

ii) $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, para todo $y \in V$ e $\lambda > 0$;

Norma de Minkowski

Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

Uma função contínua $F : V \to [0, \infty)$ é uma norma de Minkowski se:

i) F é suave em $V \setminus 0$;

ii) $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, para todo $y \in V$ e $\lambda > 0$;

iii) para cada $y \neq 0$, a forma bilinear e simétrica

$$g_y(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(y + tu + sv)\Big|_{t=s=0}, \forall u, v \in V,$$

é positiva-definida, chamada forma fundamental.

Relembre...

Positividade: $F(y) \geq 0$; $F(y) = 0 \iff y = 0$.

Relembre...

Positividade: $F(y) \geq 0$; $F(y) = 0 \iff y = 0$.

Fixada uma base de V, obtemos coordenadas (y^i), $i = 1, \ldots, n$.

Relembre...

Positividade: $F(y) \geq 0$; $F(y) = 0 \iff y = 0$.

Fixada uma base de V, obtemos coordenadas (y^i), $i = 1, \ldots, n$.

Por ii), temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(y)}{\partial y^i} y^i = F(y). \tag{1}$$

Relembre...

Positividade: $F(y) \geq 0$; $F(y) = 0 \iff y = 0$.

Fixada uma base de V, obtemos coordenadas (y^i), $i = 1, \ldots, n$.

Por ii), temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(y)}{\partial y^i} y^i = F(y). \tag{1}$$

Desigualdade fundamental: Para todo $y \neq 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y^i}(y) w^i \leq F(w),$$

e vale a igualdade se, e somente se, $w = \lambda y$ para algum $\lambda \geq 0$.

Gráfico de uma norma de Minkowski

$$\mathrm{Gr}(F) = \{(y, r) \in V \times [0, \infty) \,|\, F(y) = r\}.$$

Gráfico de uma norma de Minkowski

$$\mathrm{Gr}(F) = \{(y, r) \in V \times [0, \infty) \,|\, F(y) = r\}.$$

Por positividade e i),

$$\mathrm{Gr}(F|_{V \setminus 0}) = \mathrm{Gr}(F) \setminus \{(0, 0)\}$$

é uma subvariedade suave de dimensão n em $V \times (0, \infty)$.

Gráfico de uma norma de Minkowski

$$\mathrm{Gr}(F) = \{(y, r) \in V \times [0, \infty) \,|\, F(y) = r\}.$$

Por positividade e i),

$$\mathrm{Gr}(F|_{V \setminus 0}) = \mathrm{Gr}(F) \setminus \{(0, 0)\}$$

é uma subvariedade suave de dimensão n em $V \times (0, \infty)$.

Seja $y \neq 0$ fixado.

Gráfico de uma norma de Minkowski

$$\mathrm{Gr}(F) = \{(y, r) \in V \times [0, \infty) \,|\, F(y) = r\}.$$

Por positividade e i),

$$\mathrm{Gr}(F|_{V\setminus 0}) = \mathrm{Gr}(F) \setminus \{(0, 0)\}$$

é uma subvariedade suave de dimensão n em $V \times (0, \infty)$.

Seja $y \neq 0$ fixado.

Por (1) e a desigualdade fundamental,

$$F(y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y^i}(y)(w - y)^i \leq F(w), \tag{5}$$

onde vale a igualdade se, e somente se, $w = \lambda y$ para algum $\lambda \geq 0$.

O espaço tangente ao gráfico de F em $(y, F(y))$ é

$$T_{(y,F(y))}\,\mathrm{Gr}(F) = \{(v, dF_y(v)) \mid v \in V\}.$$

O espaço tangente ao gráfico de F em $(y, F(y))$ é

$$T_{(y,F(y))}\,\mathrm{Gr}(F) = \{(v, dF_y(v)) \,|\, v \in V\}.$$

De (5), obtemos que $T_{(y,F(y))}\,\mathrm{Gr}(F)$

O espaço tangente ao gráfico de F em $(y, F(y))$ é

$$T_{(y,F(y))}\,\mathrm{Gr}(F) = \{(v, dF_y(v)) \mid v \in V\}.$$

De (5), obtemos que $T_{(y,F(y))}\,\mathrm{Gr}(F)$

- fica abaixo de $\mathrm{Gr}(F)$;

O espaço tangente ao gráfico de F em $(y, F(y))$ é

$$T_{(y,F(y))}\,\mathrm{Gr}(F) = \{(v, dF_y(v)) \,|\, v \in V\}.$$

De (5), obtemos que $T_{(y,F(y))}\,\mathrm{Gr}(F)$

- fica abaixo de $\mathrm{Gr}(F)$;

$$F(y) + dF_y(w - y) \leq F(w)$$

O espaço tangente ao gráfico de F em $(y, F(y))$ é

$$T_{(y,F(y))}\,\mathrm{Gr}(F) = \{(v, dF_y(v)) \,|\, v \in V\}.$$

De (5), obtemos que $T_{(y,F(y))}\,\mathrm{Gr}(F)$

- fica abaixo de $\mathrm{Gr}(F)$;

$$F(y) + dF_y(w - y) \leq F(w)$$

- intersecciona $\mathrm{Gr}(F)$ exatamente ao longo dos pontos do raio $(\lambda y, \lambda F(y))$, para $\lambda \geq 0$.

O espaço tangente ao gráfico de F em $(y, F(y))$ é

$$T_{(y,F(y))}\,\mathrm{Gr}(F) = \{(v, dF_y(v)) \,|\, v \in V\}.$$

De (5), obtemos que $T_{(y,F(y))}\,\mathrm{Gr}(F)$

- fica abaixo de $\mathrm{Gr}(F)$;

$$F(y) + dF_y(w - y) \leq F(w)$$

- intersecciona $\mathrm{Gr}(F)$ exatamente ao longo dos pontos do raio $(\lambda y, \lambda F(y))$, para $\lambda \geq 0$.

$$F(y) + dF_y(w - y) = F(w) \iff w = \lambda y\,,\ \lambda \geq 0$$

O espaço tangente ao gráfico de F em $(y, F(y))$ é

$$T_{(y,F(y))}\,\mathrm{Gr}(F) = \{(v, dF_y(v)) \,|\, v \in V\}.$$

De (5), obtemos que $T_{(y,F(y))}\,\mathrm{Gr}(F)$

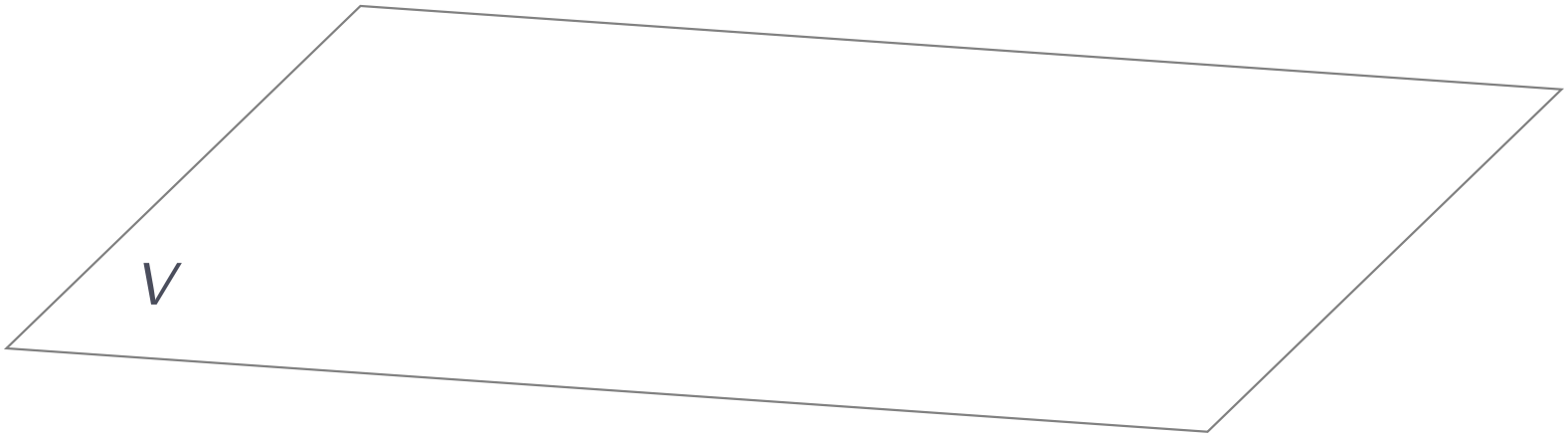
- fica abaixo de $\mathrm{Gr}(F)$;

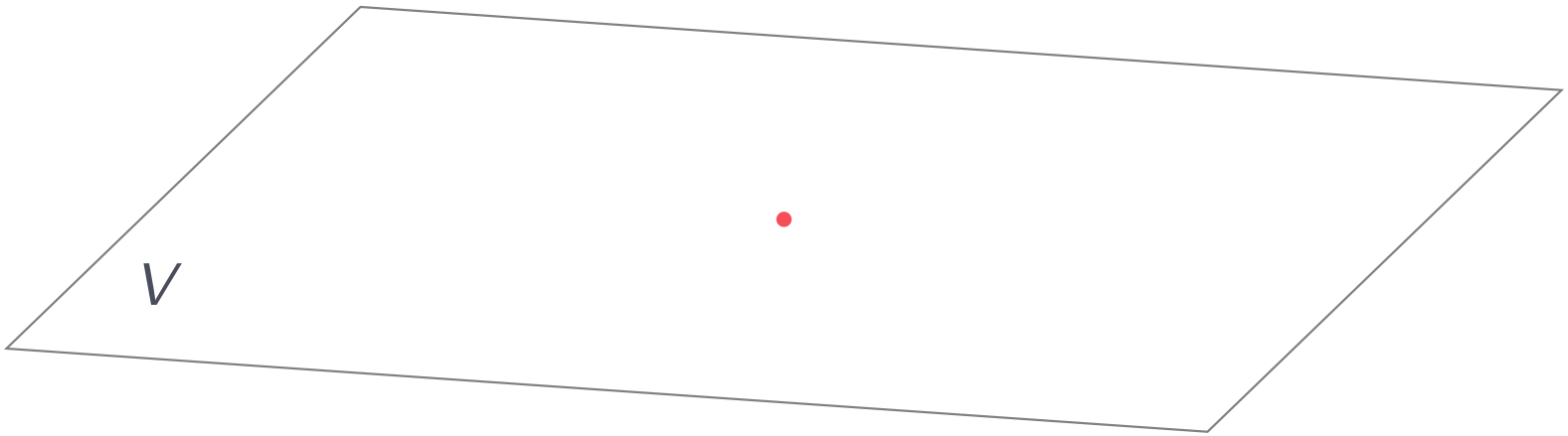
$$F(y) + dF_y(w - y) \leq F(w)$$

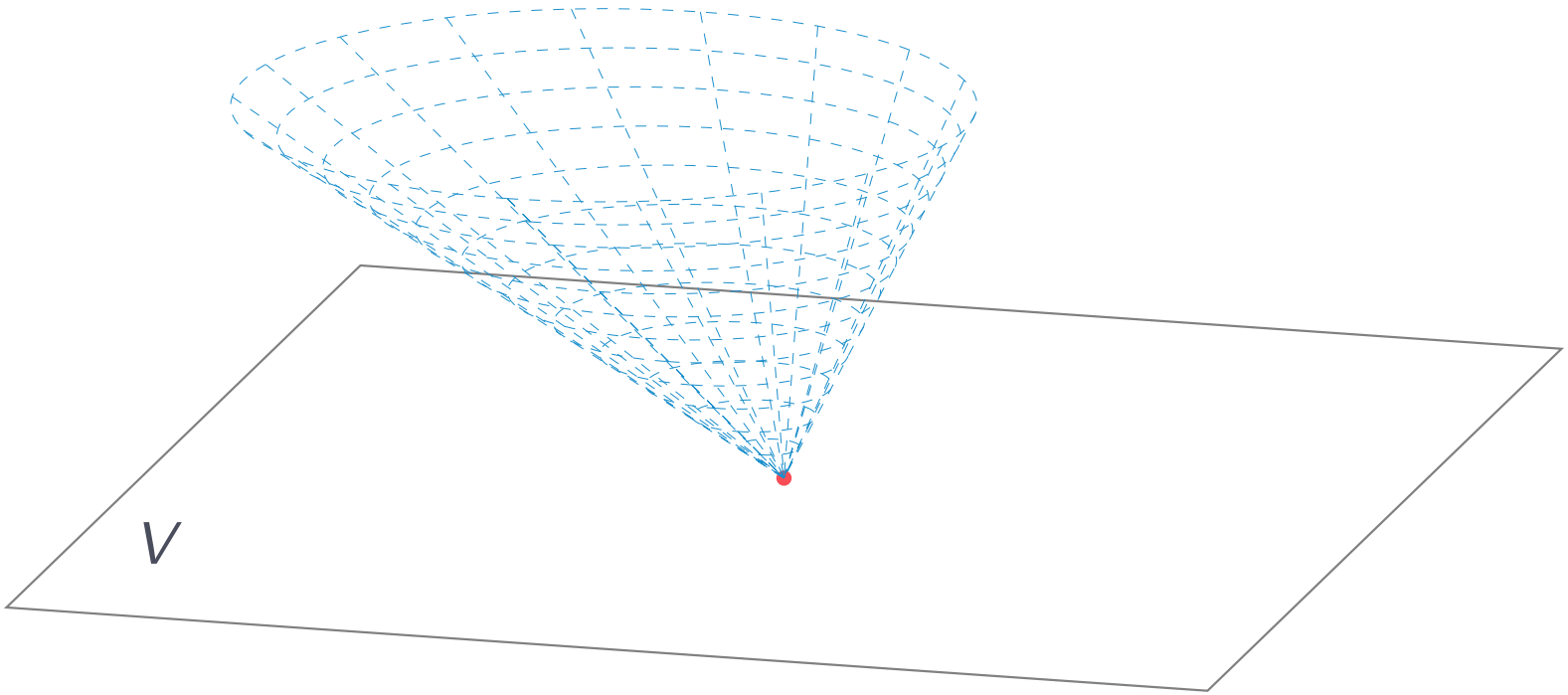
- intersecciona $\mathrm{Gr}(F)$ exatamente ao longo dos pontos do raio $(\lambda y, \lambda F(y))$, para $\lambda \geq 0$.

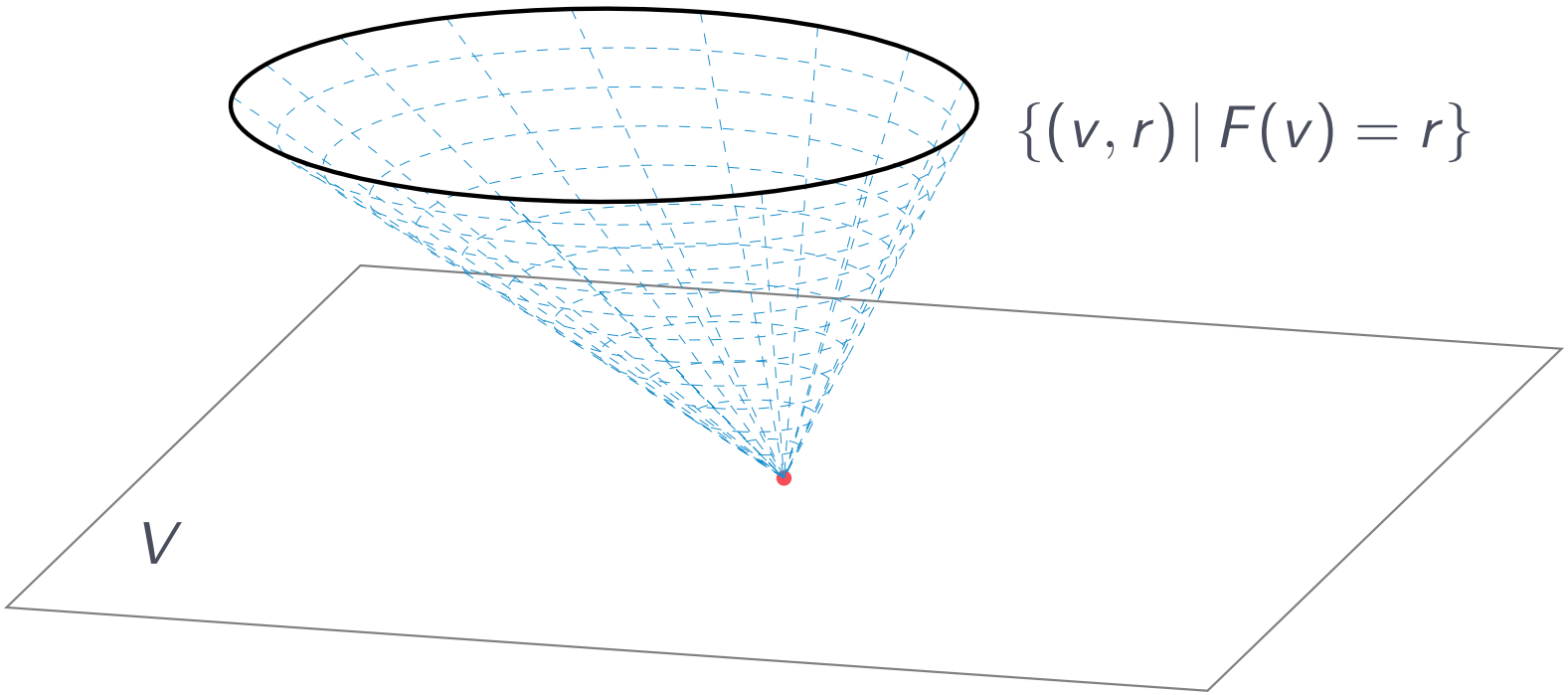
$$F(y) + dF_y(w - y) = F(w) \iff w = \lambda y\,,\ \lambda \geq 0$$

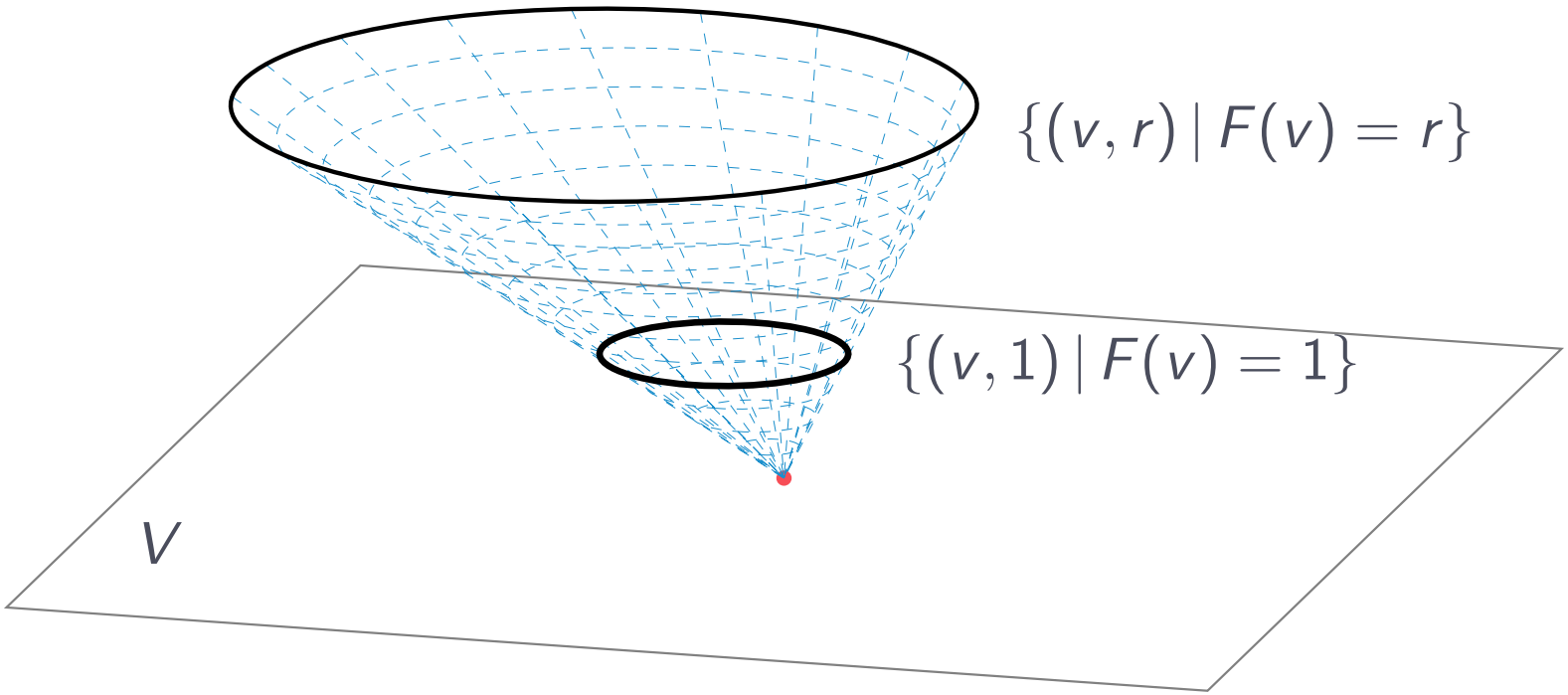
$\therefore$ O gráfico de F é um cone convexo com vértice na origem de V.

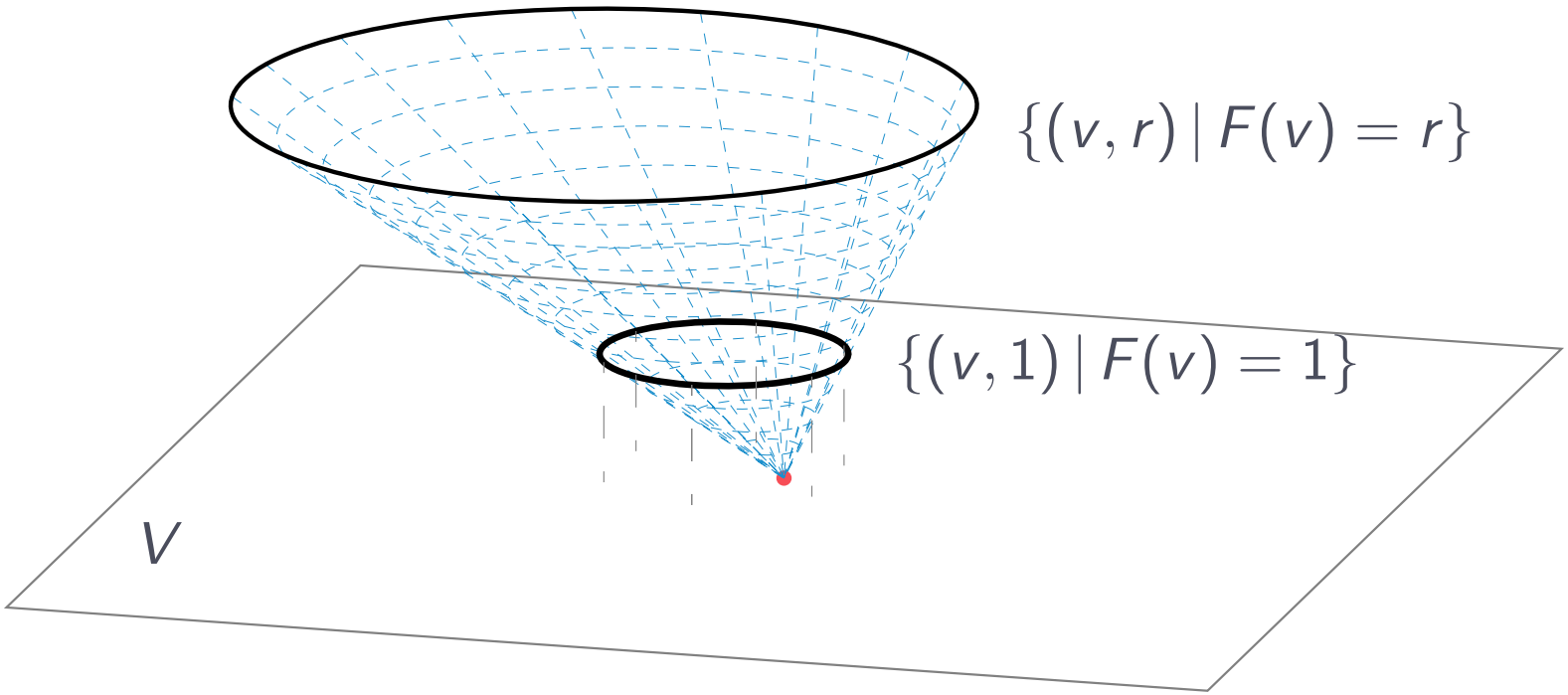

V

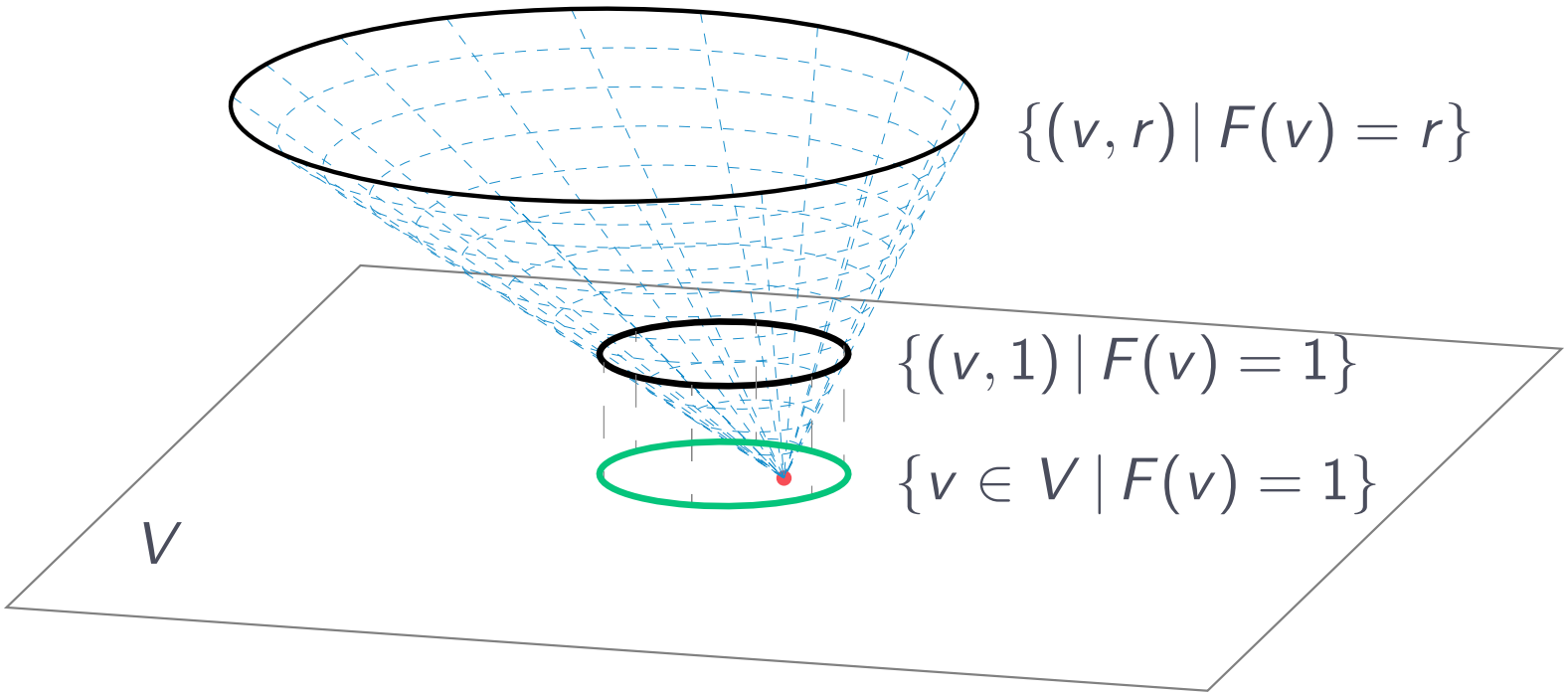

V


V


$\{(v, r) \mid F(v) = r\}$
V


$\{(v, r) \mid F(v) = r\}$
$\{(v, 1) \mid F(v) = 1\}$
V


$\{(v, r) \mid F(v) = r\}$
$\{(v, 1) \mid F(v) = 1\}$
V


$\{(v, r) \mid F(v) = r\}$
$\{(v, 1) \mid F(v) = 1\}$
$\{v \in V \mid F(v) = 1\}$
V

Indicatriz

A indicatriz de F é o subconjunto de V dos vetores unitários, i.e.

$$\mathcal{I}_F = \{v \in V \mid F(v) = 1\}.$$

Indicatriz

A indicatriz de F é o subconjunto de V dos vetores unitários, i.e.

$$\mathcal{I}_F = \{v \in V \mid F(v) = 1\}.$$

Por positividade e ii),

$$\forall y \neq 0, F(y) = r > 0 \iff \frac{y}{r} \in \mathcal{I}_F.$$

Indicatriz

A indicatriz de F é o subconjunto de V dos vetores unitários, i.e.

$$\mathcal{I}_F = \{v \in V \mid F(v) = 1\}.$$

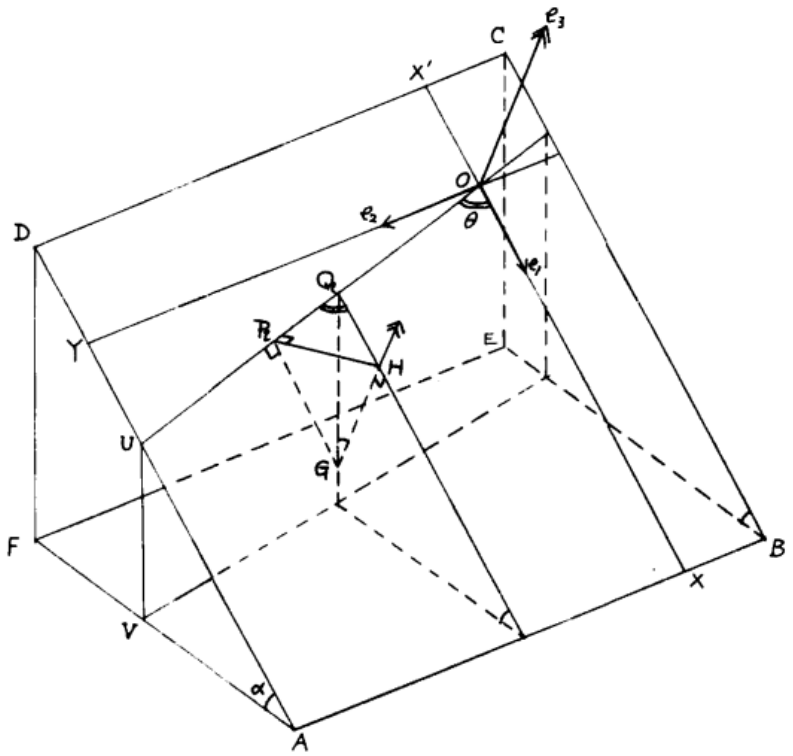
Por positividade e ii),

$$\forall y \neq 0, F(y) = r > 0 \iff \frac{y}{r} \in \mathcal{I}_F.$$

Por iii), a indicatriz é uma hipersuperfície de V fechada, estritamente convexa e que contém o vetor nulo em seu interior.

Exemplos

Matsumoto



Matsumoto, M. (1989). "A slope of a mountain is a Finsler surface with respect to a time measure". Journal of Mathematics of Kyoto University, 29(1), 17-25.

Princípio: Com respeito à medida de tempo, um plano com ângulo de inclinação α é um plano de Minkowski; e a sua indicatriz é dada por

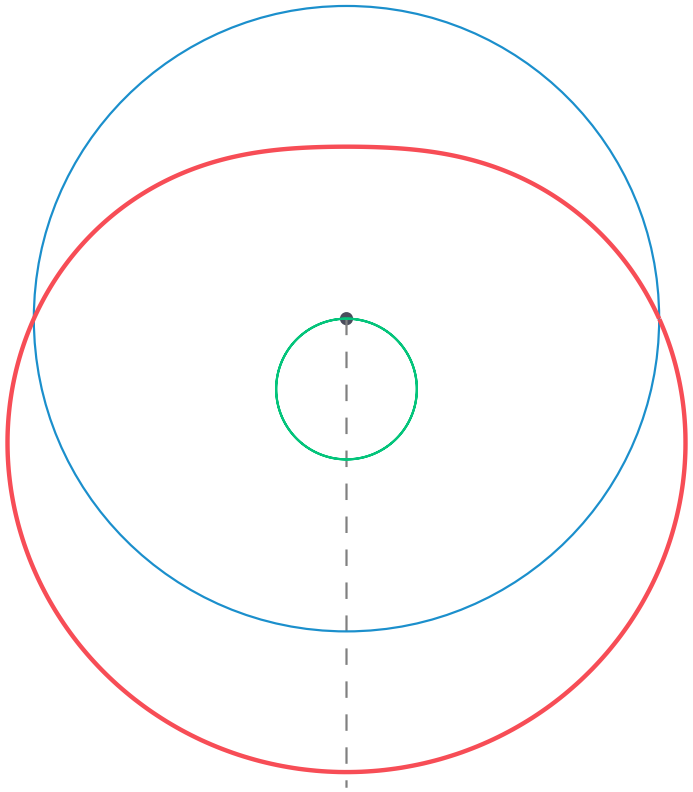
$$r = v + a\cos\theta\,,\ \ a = w\sin\alpha,$$

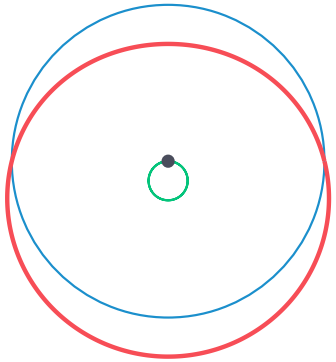
em coordenadas polares (r, θ), onde v e w são constantes não-nulas.

Princípio: Com respeito à medida de tempo, um plano com ângulo de inclinação α é um plano de Minkowski; e a sua indicatriz é dada por

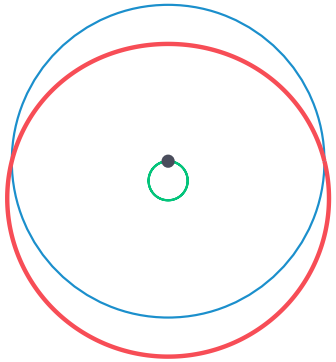
$$r = v + a\cos\theta\,,\ \ a = w\sin\alpha,$$

em coordenadas polares (r, θ), onde v e w são constantes não-nulas.

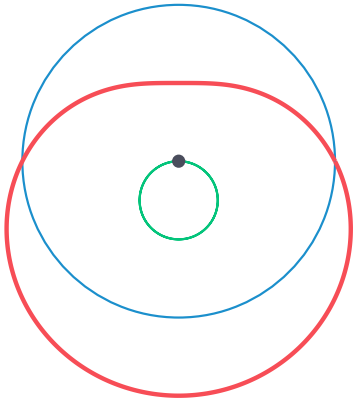




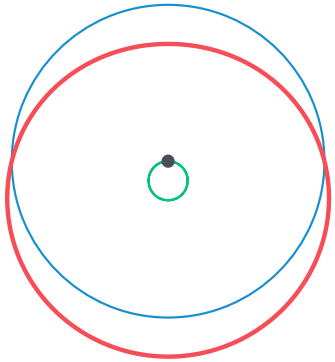
$v > 2a$



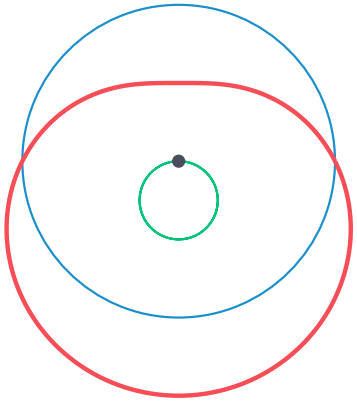
$v > 2a$



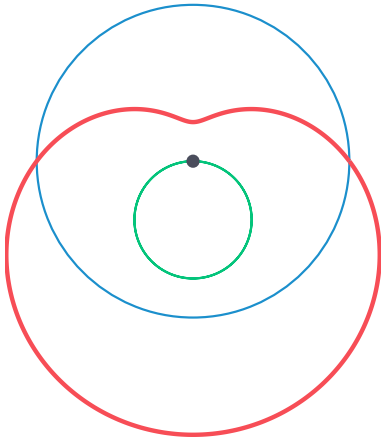
$v = 2a$



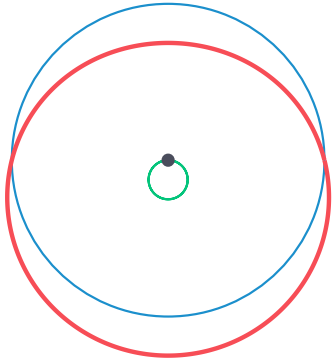
$v > 2a$



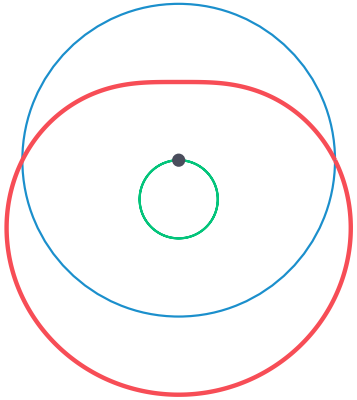
$v = 2a$



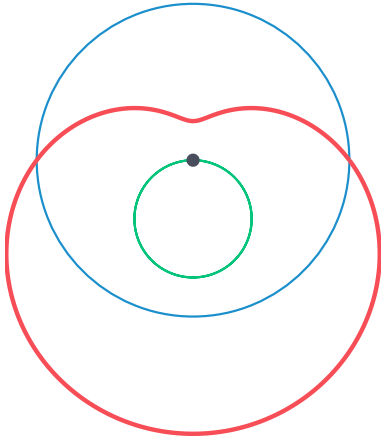
$a < v < 2a$



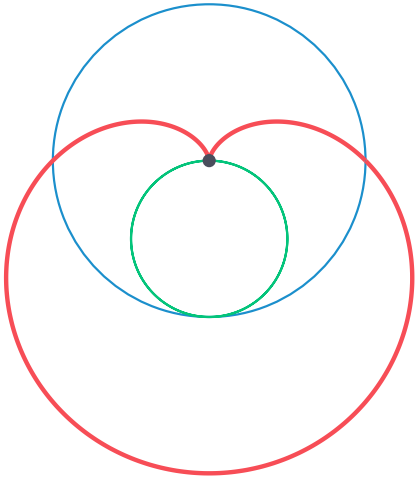
$v > 2a$



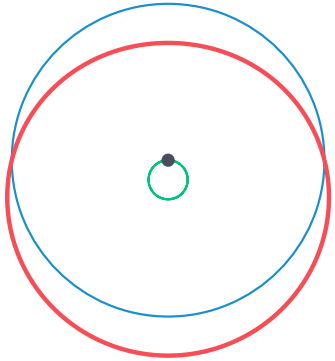
$v = 2a$



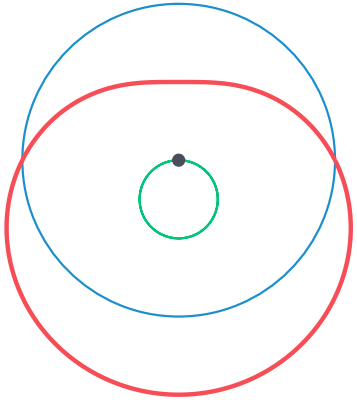
$a < v < 2a$



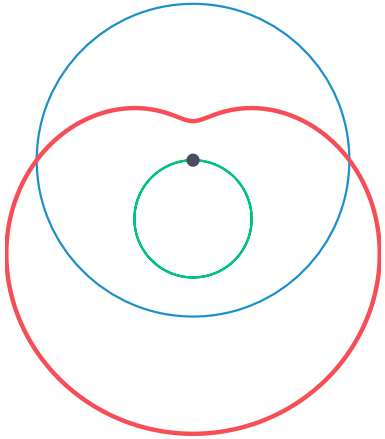
$v = a$



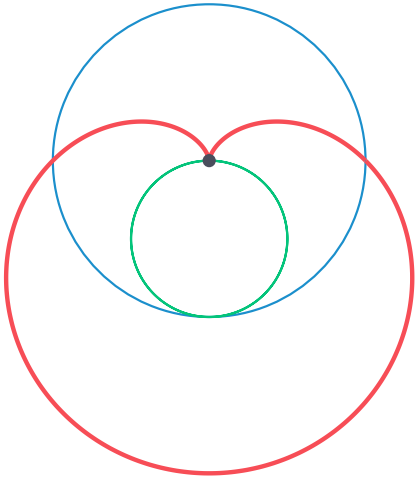
$v > 2a$



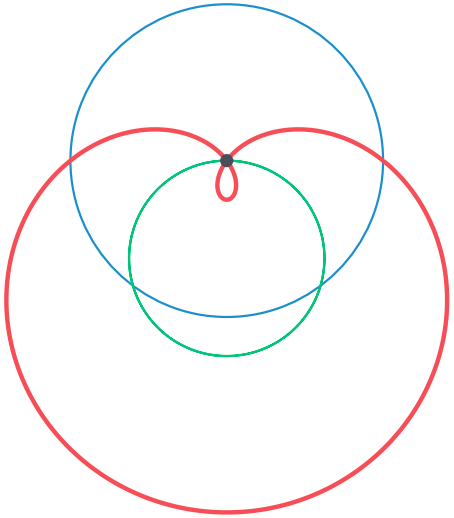
$v = 2a$



$a < v < 2a$



$v = a$



$0 < v < a$

Randers: uma breve motivação

Queremos ir de uma de um ponto p ao ponto q em uma região $\mathbb{R}^n$ o mais rápido possível ou gastando menos energia.

Randers: uma breve motivação

Queremos ir de uma de um ponto p ao ponto q em uma região $\mathbb{R}^n$ o mais rápido possível ou gastando menos energia.

Resposta: Siga o caminho

$$\gamma(t) = p + t(q - p),$$

que é uma reta.

Randers: uma breve motivação

Queremos ir de uma de um ponto p ao ponto q em uma região $\mathbb{R}^n$ o mais rápido possível ou gastando menos energia.

Resposta: Siga o caminho

$$\gamma(t) = p + t(q - p),$$

que é uma reta.

Problema de Navegação de Zermelo (Ernst Zermelo, 1931):
E se a região estiver sofrendo a ação de um campo vetorial W, como um vento, ou uma correnteza?

Randers: uma breve motivação

Podemos supor que a força interna U satisfaz $\|U\| = 1$. Se $\gamma : [0, b] \to M$ é a trajetória resultante, então

$$\gamma' = W + U.$$

Randers: uma breve motivação

Podemos supor que a força interna U satisfaz $\|U\| = 1$. Se $\gamma : [0, b] \to M$ é a trajetória resultante, então

$$\gamma' = W + U.$$

Logo

$$t = \int_0^t dt = \int_0^t \|\gamma' - W\| dt = \int_0^t R(\gamma') dt$$

onde R é a função definida implicitamente por

$$\left\| \frac{v}{R(v)} - W \right\| = 1.$$

Randers

Observação: $\|.\|$ é uma norma Finsler, cuja indicatriz coincide com a esfera unitária

$$\mathcal{I}_{||.||} = S^{n-1}(1).$$

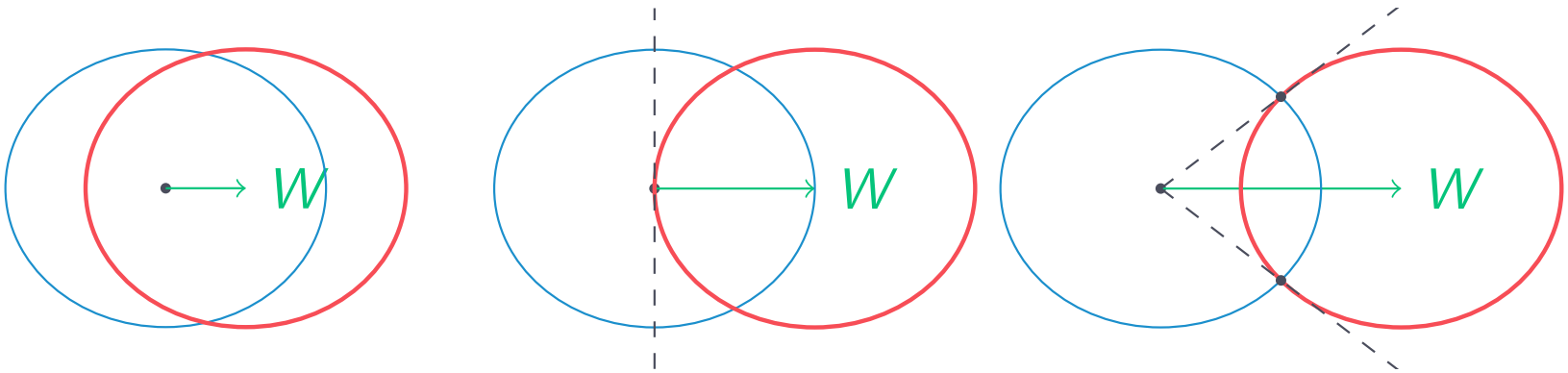
Randers

Observação: $\|.\|$ é uma norma Finsler, cuja indicatriz coincide com a esfera unitária

$$\mathcal{I}_{\|.\|} = S^{n-1}(1).$$

Defina

$$\mathcal{I} := \mathcal{I}_{\|.\|} + W.$$



$0 < \|W\| < 1$ $\qquad$ $\|W\| = 1$ $\qquad$ $\|W\| > 1$

Randers

Note que

$$\left\| \frac{v}{R(v)} - w \right\| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{v}{R(v)} \in \mathcal{I}$$

Randers

Note que

$$\left\| \frac{v}{R(v)} - w \right\| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{v}{R(v)} \in \mathcal{I}$$

Afirmação: Se $\|W\| < 1$, então R é uma métrica Finsler cuja indicatriz é

$$\mathcal{I}_R = \mathcal{I} := \mathcal{I}_{\|\cdot\|} + W.$$

Randers

Note que

$$\left\| \frac{v}{R(v)} - w \right\| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{v}{R(v)} \in \mathcal{I}$$

Afirmação: Se $\|W\| < 1$, então R é uma métrica Finsler cuja indicatriz é

$$\mathcal{I}_R = \mathcal{I} := \mathcal{I}_{\|.\|} + W.$$

R é denominada métrica Randers com data de navegação (g, w), onde g é a métrica Riemanniana tal que $\|.\| = \sqrt{g}$

Métrica Pré-Finsler

Uma aplicação contínua $F : TM \to \mathbb{R}$ é uma métrica pré-Finsler se

1. $F|_{TM\setminus 0}$ é suave
2. $F(v) \leq 0$ e $F(v) = 0 \iff v = 0$; e
3. $F(\lambda v) = \lambda F(v)\ \forall v \in TM$ e $\lambda > 0$.

Métrica Pré-Finsler

Uma aplicação contínua $F : TM \to \mathbb{R}$ é uma métrica pré-Finsler se

1. $F|_{TM\setminus 0}$ é suave
2. $F(v) \leq 0$ e $F(v) = 0 \iff v = 0$; e
3. $F(\lambda v) = \lambda F(v)\ \forall v \in TM$ e $\lambda > 0$.

Exemplo

β uma 1-forma, então $R = \alpha + \beta$ é uma métrica pré-Finsler.

Métrica Pré-Finsler

Uma aplicação contínua $F : TM \to \mathbb{R}$ é uma métrica pré-Finsler se

1. $F|_{TM\setminus 0}$ é suave
2. $F(v) \leq 0$ e $F(v) = 0 \iff v = 0$; e
3. $F(\lambda v) = \lambda F(v)\ \forall v \in TM$ e $\lambda > 0$.

Exemplo

β uma 1-forma, então $R = \alpha + \beta$ é uma métrica pré-Finsler.

Proposição

$F = \alpha + \beta$ é métrica Finsler sse $\alpha^*(\beta) < 1$.

Pré-geodésica e Geodésica

Seja F uma métrica pré-Finsler.

Pré-geodésica e Geodésica

Seja F uma métrica pré-Finsler.

Uma curva suave $\gamma : (a, b) \to M$ é uma pré-geodésica se for ponto crítico do funcional comprimento, que é dado por

$$L(\beta) = \int_a^b F(\beta')dt$$

para curvas suaves por partes $\beta : (a, b) \to M$.

Pré-geodésica e Geodésica

Seja F uma métrica pré-Finsler.

Uma curva suave $\gamma : (a, b) \to M$ é uma pré-geodésica se for ponto crítico do funcional comprimento, que é dado por

$$L(\beta) = \int_a^b F(\beta')dt$$

para curvas suaves por partes $\beta : (a, b) \to M$.
Se adicionalmente $F(\gamma') = cte$, γ é uma geodésica.

Geodésica

Proposição

Seja F métrica Finsler. Então γ curva suave por parte é uma geodésica se, e somente se, for ponto crítico do funcional energia:

$$E(\beta) = \frac{1}{2}\int_a^b F^2(\beta')dt.$$

Geodésica

Proposição

Seja F métrica Finsler. Então γ curva suave por parte é uma geodésica se, e somente se, for ponto crítico do funcional energia:

$$E(\beta) = \frac{1}{2}\int_a^b F^2(\beta')dt.$$

Solução do Problema de Navegação de Zermelo:

As soluções do problema de navegação de Zermelo são geodésicas de uma métrica pré-Finsler.

Randers

Proposição

R é uma métrica Randers com data de Navegação (g, W) se, e somente se,

$$R = \alpha + \beta$$

onde α é uma norma Euclidiana e β é uma 1-forma com $\alpha^*(\beta) < 1$.

Randers

Proposição

R é uma métrica Randers com data de Navegação (g, W) se, e somente se,

$$R = \alpha + \beta$$

onde α é uma norma Euclidiana e β é uma 1-forma com $\alpha^*(\beta) < 1$.

Nesse caso, dizemos que R é uma métrica Randers com data (α, β).

Algumas aplicações

- Modelo de Incêndios Florestais

Algumas aplicações

- Modelo de Incêndios Florestais
- Propagação do Son no Ar

Algumas aplicações

- Modelo de Incêndios Florestais
- Propagação do Son no Ar
- Ondas Sismicas

Algumas aplicações

- Modelo de Incêndios Florestais
- Propagação do Son no Ar
- Ondas Sismicas
- Lâmina de Grafeno sob ação de um campo Gravitacional

Algumas aplicações

- Modelo de Incêndios Florestais
- Propagação do Son no Ar
- Ondas Sismicas
- Lâmina de Grafeno sob ação de um campo Gravitacional
- Partícula carregada sob ação de uma campo magnético

Algumas aplicações

- Modelo de Incêndios Florestais
- Propagação do Son no Ar
- Ondas Sismicas
- Lâmina de Grafeno sob ação de um campo Gravitacional
- Partícula carregada sob ação de uma campo magnético
- Modelos Análogos Gravitacionais

Algumas aplicações

- Modelo de Incêndios Florestais
- Propagação do Son no Ar
- Ondas Sismicas
- Lâmina de Grafeno sob ação de um campo Gravitacional
- Partícula carregada sob ação de uma campo magnético
- Modelos Análogos Gravitacionais
- Trajetória de geodésicas tipo-luz em alguns Espaço-Tempo.

Algumas aplicações

- Modelo de Incêndios Florestais
- Propagação do Son no Ar
- Ondas Sismicas
- Lâmina de Grafeno sob ação de um campo Gravitacional
- Partícula carregada sob ação de uma campo magnético
- Modelos Análogos Gravitacionais
- Trajetória de geodésicas tipo-luz em alguns Espaço-Tempo.
- Modelo de Evolução de alguns Sistemas Biológicos (como colônia de bactérias)

$\vdots$

Geodésica Magnética

Seja B um campo magnético em $\mathbb{R}^3$ ($divB = 0$). Em particular, existe campo J tal que

$$B = rot\ J.$$

Geodésica Magnética

Seja B um campo magnético em $\mathbb{R}^3$ ($divB = 0$). Em particular, existe campo J tal que

$$B = rot\ J.$$

Chamaremos o par $(\langle , \rangle, B)$ de estrutura magnética.

Geodésica Magnética

Seja B um campo magnético em $\mathbb{R}^3$ ($divB = 0$). Em particular, existe campo J tal que

$$B = rot\ J.$$

Chamaremos o par $(\langle , \rangle, B)$ de estrutura magnética. Seja $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ uma partícula carregada de massa m e carga e.

Geodésica Magnética

Seja B um campo magnético em $\mathbb{R}^3$ ($divB = 0$). Em particular, existe campo J tal que

$$B = rot\ J.$$

Chamaremos o par $(\langle , \rangle, B)$ de estrutura magnética. Seja $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ uma partícula carregada de massa m e carga e. A força de Lorentz é o campo anisotrópico

$$Y(v_p) = e(v \times B(p)).$$

Geodésica Magnética

Seja B um campo magnético em $\mathbb{R}^3$ ($divB = 0$). Em particular, existe campo J tal que

$$B = rot\ J.$$

Chamaremos o par $(\langle , \rangle, B)$ de estrutura magnética. Seja $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ uma partícula carregada de massa m e carga e. A força de Lorentz é o campo anisotrópico

$$Y(v_p) = e(v \times B(p)).$$

Pela 2° Lei de Newton,

$$m\gamma''(t) = Y(\gamma'(t))$$

Geodésica Magnética

Seja B um campo magnético em $\mathbb{R}^3$ ($divB = 0$). Em particular, existe campo J tal que

$$B = rot\ J.$$

Chamaremos o par $(\langle , \rangle, B)$ de estrutura magnética. Seja $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ uma partícula carregada de massa m e carga e. A força de Lorentz é o campo anisotrópico

$$Y(v_p) = e(v \times B(p)).$$

Pela 2° Lei de Newton,

$$m\gamma''(t) = Y(\gamma'(t))$$

Nesse caso, γ é uma geodésica magnética de $(\langle , \rangle, B)$.

Geodésica Magnética e Geometria Finsler

Teorema

Uma curva $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ é geodésica magnética da estrutrua magnética $(\langle , \rangle, B)$ com energia c se, e somente se, γ é uma pré-geodésica da métrica pré-Randers

$$R(v) = \sqrt{\langle v, v \rangle} + \frac{e}{\sqrt{2c}} \langle v, J \rangle.$$

onde e é a carga e $c = \langle \gamma', \gamma' \rangle$.

Geodésica Magnética e Geometria Finsler

Teorema

Uma curva $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ é geodésica magnética da estrutrua magnética $(\langle , \rangle, B)$ com energia c se, e somente se, γ é uma pré-geodésica da métrica pré-Randers

$$R(v) = \sqrt{\langle v, v \rangle} + \frac{e}{\sqrt{2c}} \langle v, J \rangle.$$

onde e é a carga e $c = \langle \gamma', \gamma' \rangle$.

Demonstração.

Argumento de Cálculo Variacional... $\square$

Obrigado!