Aplicações de normas anisotrópicas em sistemas com grau topológico variável

Sávio Silva Santana

Universidade federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística

20 de novembro de 2023

Dado um espaço linear E, dizemos que $C \subset E \backslash \{0\}$ é um cone convexo se

$$t > 0 \text{ e } v \in C \Rightarrow t \cdot v \in C$$

e

$$t_1, t_2 > 0 \text{ e } \quad v_1, v_2 \in C \Rightarrow t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 \in C.$$

Definimos $\bar{C}$ como o conjunto de pontos $w \in E$ tais que existe $v \in C$ e uma sequência de números positivos $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $t_n \to 0$, tal que $w + t_n \cdot v \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que C é projetivo se

$$\bar{C} \cap (-\bar{C}) = \{0\}.$$

Definimos

$$\alpha_C(v, w) = \sup\{t > 0; w - t \cdot v \in C\}$$

e

$$\beta_C(v, w) = \inf\{s > 0; s \cdot v - w \in C\}.$$

Definimos

$$\alpha_C(v, w) = \sup\{t > 0; w - t \cdot v \in C\}$$

e

$$\beta_C(v, w) = \inf\{s > 0; s \cdot v - w \in C\}.$$

Nas definições de α_C e β_C, convencionamos que $\sup \emptyset = 0$ e $\inf \emptyset = +\infty$.

Definimos

$$\alpha_C(v, w) = \sup\{t > 0; w - t \cdot v \in C\}$$

e

$$\beta_C(v, w) = \inf\{s > 0; s \cdot v - w \in C\}.$$

Nas definições de α_C e β_C, convencionamos que $\sup \emptyset = 0$ e $\inf \emptyset = +\infty$.

A metrica projetiva associada a C é dada por

$$\Theta(v, w) = \log \frac{\beta_C(v, w)}{\alpha_C(v, w)}.$$

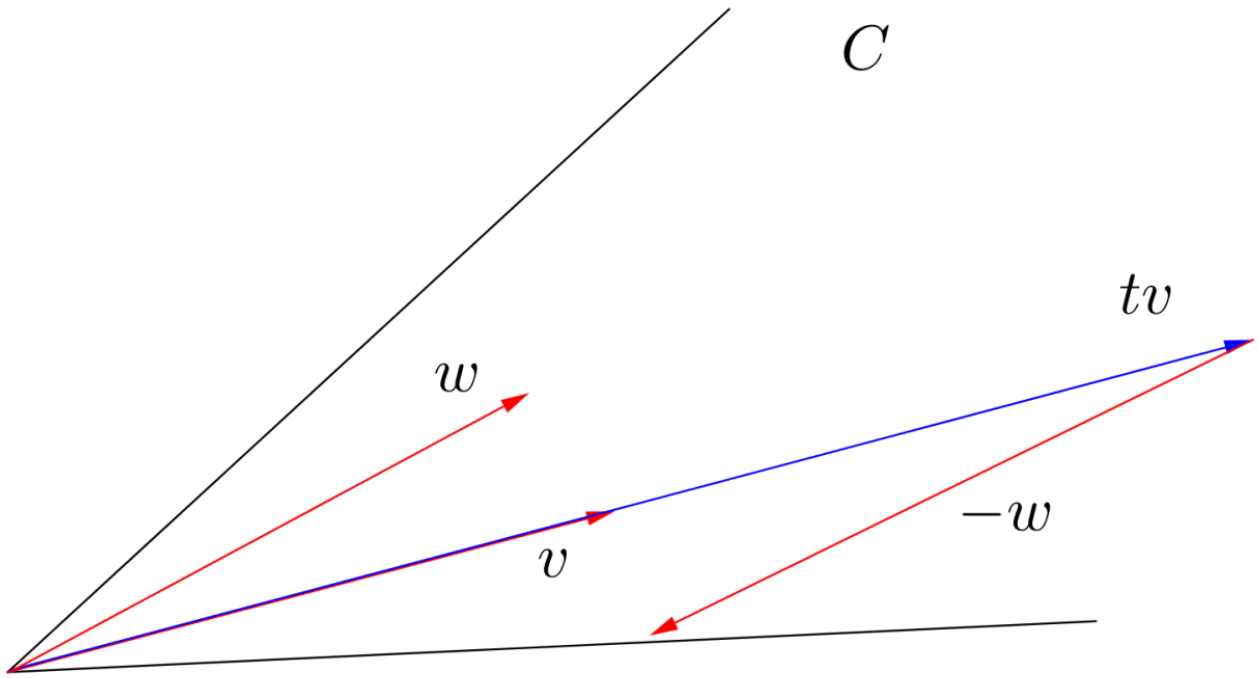

Figura: $\beta_C(v, w)$

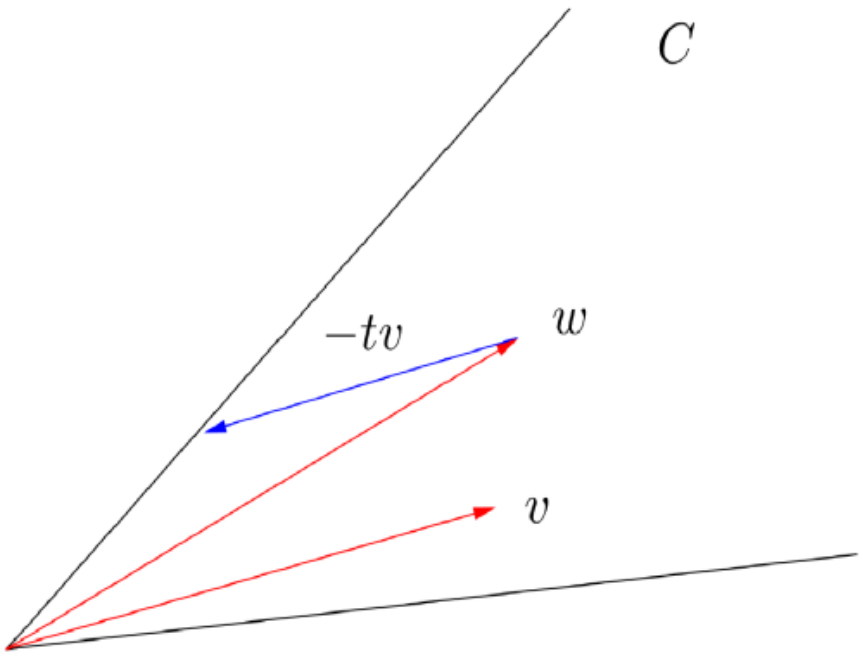

Figura: $\alpha_C(v, w)$

Exemplos de Métricas Projetivas

$$C_{\kappa,\delta} = \left\{ \varphi \in C^0(M, \mathbb{R}) : \varphi > 0 \text{ and } \frac{|\varphi|_{\alpha,\delta}}{\inf \varphi} \leq \kappa \right\}.$$

Exemplos de Métricas Projetivas

$$C_{\kappa,\delta} = \left\{ \varphi \in C^0(M, \mathbb{R}) : \varphi > 0 \text{ and } \frac{|\varphi|_{\alpha,\delta}}{\inf \varphi} \leq \kappa \right\}.$$

$$\alpha_{\kappa,\delta}(\varphi, \psi) = \inf_{0<d(x,y)<\delta, z\in M} \left\{ \frac{\kappa|x-y|^\alpha \psi(z) - (\psi(x) - \psi(y))}{\kappa|x-y|^\alpha \varphi(z) - (\varphi(x) - \varphi(y))} \right\},$$

$$\beta_{\kappa,\delta}(\varphi, \psi) = \sup_{0<d(x,y)<\delta, : z\in M} \left\{ \frac{\kappa|x-y|^\alpha \psi(z) - (\psi(x) - \psi(y))}{\kappa|x-y|^\alpha \varphi(z) - (\varphi(x) - \varphi(y))} \right\}.$$

Dado $L > 1$

$$C(L) = \left\{ \varphi \in C^0(M, \mathbb{R}), \varphi > 0; \sup \varphi < L \inf \varphi \right\}.$$

Dado $L > 1$

$$C(L) = \left\{ \varphi \in C^0(M, \mathbb{R}), \varphi > 0; \sup \varphi < L \inf \varphi \right\}.$$

$$\alpha_L(\varphi, \psi) = \inf_{x,y \in M} \left\{ \frac{L\psi(y) - \psi(x)}{L\varphi(y) - \varphi(x)} \right\},$$

$$\beta_L(\varphi, \psi) = \sup_{x,y \in M} \left\{ \frac{L\psi(y) - \psi(x)}{L\varphi(y) - \varphi(x)} \right\}.$$

Lema

Sejam C_1 e C_2 cones projetivos com interseção não trivial e $C = C_1 \cap C_2$. Então C é um cone com métrica projetiva dada por $\Theta(v, w) = \log \frac{\beta(v,w)}{\alpha(v,w)}$ com

$$\alpha(v, w) = \min\{\alpha_1(v, w), \alpha_2(v, w)\},$$

e

$$\beta(v, w) = \max\{\beta_1(v, w), \beta_2(v, w)\},$$

onde $\Theta_1(v, w) = \log \frac{\beta_1(v,w)}{\alpha_2(v,w)}$ e $\Theta_2(v, w) = \log \frac{\beta_2(v,w)}{\alpha_2(v,w)}$ são as métricas projetivas de C_1 e C_2, respectivamente.

Teorema

Sejam E_1 *e* E_2 *espaços lineares e sejam* $C_1 \subset E_1$ *e* $C_2 \subset E_2$ *cones projetivos. Se* $\mathcal{L} : E_1 \mapsto E_2$ *for um operador linear tal que* $\mathcal{L}(C_1) \subset C_2$ *e* $\Delta = diam_{\Theta_{C_2}}(\mathcal{L}C_1) < \infty$ *então* $\Theta_{C_2}(\mathcal{L}v, \mathcal{L}w) \leq \left(1 - e^{-\Delta}\right) \cdot \Theta_{C_1}(v, w)$, *para qualquer* $v, w \in C_1$.

Suponhamos que exista alguma função e em $C \setminus \partial C$ tal que para qualquer φ em E , exista uma constante c_φ tal que $-c_\varphi e \prec \varphi \prec c_\varphi e$. Neste caso, dizemos que e é uma *unidade* para C.

Suponhamos que exista alguma função e em $C \setminus \partial C$ tal que para qualquer φ em E , exista uma constante c_φ tal que $-c_\varphi e \prec \varphi \prec c_\varphi e$. Neste caso, dizemos que e é uma *unidade* para C.

$$\|\varphi\| := \inf\{c_\varphi; -c_\varphi e \prec \varphi \prec c_\varphi e\}.$$

Suponhamos que exista alguma função e em $C \setminus \partial C$ tal que para qualquer φ em E , exista uma constante c_φ tal que $-c_\varphi e \prec \varphi \prec c_\varphi e$. Neste caso, dizemos que e é uma *unidade* para C.

$$\|\varphi\| := \inf\{c_\varphi; -c_\varphi e \prec \varphi \prec c_\varphi e\}.$$

O *espaço anisotrópico* $\mathcal{B}$ é definido como o completamento de E em relação a esta norma.

Definição

Dizemos que um operador L atuando em um espaço de Banach E possui a propriedade de lacuna espectral (gap spectral) se existir uma decomposição de seu espectro $\sigma(L) \subset \mathbb{C}$ como segue: $\sigma(L) = \{\varrho\} \cup \Sigma_1$ onde ϱ é um autovalor de maior valor absoluto para L com autoespaço unidimensional associado e existe $0 < \varrho_0 < \varrho$ tal que $\Sigma_1 \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varrho_0\}$

Teorema

Suponha que $(E, \prec)$ *seja um reticulado completo dotado de uma norma anisotrópica* $\|\cdot\|$ *associada a um cone convexo* C*. Se* $L : E \to E$ *é um operador linear tal que* $L(C) \subset C$ *e* $\Theta - \mathrm{diam}(L(C)) = D < +\infty$*, então* L *tem uma gap spectral forte. Além disso, o seu autovalor dominante é positivo.*

Seja M um espaço métrico compacto e $f : M \circlearrowleft$ seja um endomorfismo contínuo (por partes) equipado com uma partição de Markov *mixing*:

(H1) Existe uma família de subconjuntos abertos disjuntos aos pares $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_n\}$ satisfatório

1. $M = \cup_{i=1}^{n} \overline{R_i}$;
2. Para cada R_j, existem conjuntos $S_{j,k}, k = 1, \ldots q(j)$ tais que $f^{-1}(R_j) = \cup_{k=1}^{q(j)} S_{j,k} \subset \cup_{i=1}^{n} R_i$. Em particular, $f^{-1}(R_j) \subset \cup_{i=1}^{n} R_i$. Também assumimos que existem ramos inversos $f_{j,k} : R_j \to S_{j,k}$ de f que podem ser estendido a um homeomorfismo $\overline{f_{j,k}}$ cujo domínio é $\overline{R_j}$.
3. Existe $N \geq 1$ tal que $f^N(R_i) = M$;

(H2) Suponha que todo ramo inverso seja Lipschitz, ou seja, existe $\sigma_{j,k} > 0$ tal que

$$d(f_{j,k}(x)f_{j,k}(y)) \leq \sigma_{j,k} d(x,y), \quad \forall x, y \in R_i$$

O Operador de Transferência

Seja $\hat{M} = \bigcup_{x \in M_{0 \leq i \leq n}} (x, i)$.
Observe que por H1 os ramos inversos estão bem definidos em cada $\hat{R}_i$. Isso permite definir um *operador de transferência*:

$$\hat{\mathcal{L}}\varphi = \sum_{j=1}^{n} \left(e^{\zeta} \cdot \varphi \right) \circ f_i^{-1} \cdot 1_{\overline{f(R_i)}}, \tag{1}$$

onde $\varphi, \zeta \in C^0(\hat{M})$.

Teorema

Existe um cone projetivo $C_{\sigma,\alpha}$ no espaço de funções α-Hölder contínuas em $\hat{M}$ com uma unidade, tal que $\hat{\mathcal{L}}(C_{\sigma,\alpha}) \subset C_{\sigma,\alpha}$ e $\hat{\mathcal{L}}(C_{\sigma,\alpha})$ tem um diâmetro $\Theta_{\sigma,\alpha}$-finito na métrica projetivo.

Referências

Castro, A.
Analytical techniques for linear response formula of equilibrium states.
Chaos, vol. 30, issue 1, (2020).

Castro, A., Varandas, P.
Equilibrium states for non-uniformly expanding maps: decay of correlations and strong stability.
Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non Lineaire 30(2), 225–249 (2013).

LIVERANI, C., SAUSSOL, B., VAIENTI, S
Conformal measure and decay of correlation for covering weighted systems.
Ergodic Theory and Dynamical Systems, 18(6), 1399-1420.(1998)

Ramos, V., Siqueira, J.
On Equilibrium States for Partially Hyperbolic Horseshoes: Uniqueness and Statistical Properties.
Bull. Braz. Math. Soc., New Series 48, 347–375 (2017)

M. Viana,
Stochastic dynamics of deterministic systems,
Colóquio Brasileiro de Matemática, 1997.

Obrigado!!!