

Um invariante para nós singulares

Ênio Carlos da Silva Leite

Orientador: **Oscar Ocampo**

Bolsista FAPESB

Universidade Federal da Bahia
UFBA - IME

Novembro de 2023

Sumário

1 Nós singulares e o grupo de tranças singulares

Sumário

- 1 Nós singulares e o grupo de tranças singulares
- 2 A álgebra Temperley-Lieb virtual e um traço de Markov

Sumário

- 1 Nós singulares e o grupo de tranças singulares
- 2 A álgebra Temperley-Lieb virtual e um traço de Markov
- 3 O invariante

Sumário

- 1 Nós singulares e o grupo de tranças singulares
- 2 A álgebra Temperley-Lieb virtual e um traço de Markov
- 3 O invariante
- 4 Aplicações

Nós e enlaçamentos singulares

Definição

Um *enlaçamento singular* em n componentes é a imagem de uma imersão suave de n cópias do círculo em S^3 , que possui um número finito de singularidades, chamadas cruzamentos singulares.

Exemplos

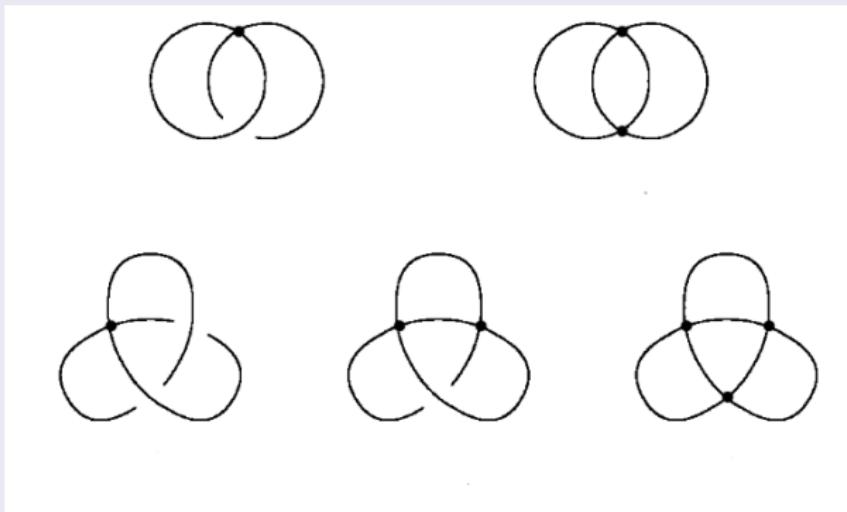


Figura: Exemplos de nós e enlaçamentos singulares.

Definição

O grupo de tranças singulares em n cordas, denotado por SG_n , é o grupo abstrado gerado por σ_i (geradores clássicos) e τ_i (geradores singulares), para $i = 1, \dots, n-1$, com relações:

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ para } |i-j| = 1,$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ para } |i-j| > 1,$$

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \text{ para } |i-j| > 1,$$

$$\tau_i \sigma_j = \sigma_j \tau_i \text{ para } |i-j| > 1,$$

$$\tau_i \sigma_i = \sigma_i \tau_i \text{ para } i = 1, \dots, n-1,$$

$$\sigma_i \sigma_j \tau_i = \tau_j \sigma_i \sigma_j \text{ para } |i-j| = 1.$$

Definição

O *fecho* de uma trança singular é definido como o fechamento comum de uma trança clássica, onde unimos as extremidades dos fios correspondentes por arcos simples. O fechamento de uma trança singular ω será denotado por $\widehat{\omega}$.

Teorema (Gemein, 1997)

Duas tranças singulares em $\cup_n SG_n$ têm fechamentos isotópicos se e somente se diferem por relações de tranças singulares e uma sequência de movimentos:

- (i) Conjugação real: $\sigma_i \omega \sim \omega \sigma_i$, $\omega, \sigma_i \in SG_n$;
- (ii) Singular: $\tau_i \omega \sim \omega \tau_i$, $\omega, \tau_i \in SG_n$;
- (iii) Estabilização real: $\omega \sim \omega \sigma_n^\pm$, $\omega \in SG_n$.

A álgebra Temperley-Lieb virtual e um traço de Markov

Definição

Seja $n \geq 1$ um inteiro. Um *flat virtual n-tangle* é uma coleção de n pares disjuntos em $\{0, 1\} \times \{1, \dots, n\}$, isto é, uma partição de $\{0, 1\} \times \{1, \dots, n\}$ em pares. Seja $E = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ um flat virtual n -tangle. Então representamos graficamente E no plano conectando as duas extremidades de cada α_i com um arco.

Exemplo

Considere o flat virtual 3-tangle $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, onde $\alpha_1 = \{(0, 1), (0, 2)\}$, $\alpha_2 = \{(0, 3), (1, 2)\}$ e $\alpha_3 = \{(1, 3), (1, 1)\}$.

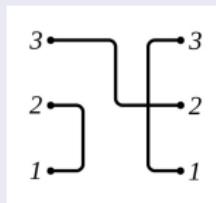


Figura: Flat virtual tangle.

Seja $R_0^f = \mathbb{Z}[z]$ o anel de polinômios na variável z com coeficientes inteiros.

Proposição (Paris, 2021)

Sejam $n \geq 3$ e VTL_n a álgebra sobre R_0^f definida pela apresentação com geradores $E_1, \dots, E_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}$ e relações

$$E_i^2 = zE_i, \quad v_i^2 = 1, \quad E_i v_i = v_i E_i = E_i, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-1,$$

$$E_i E_j = E_j E_i, \quad v_i v_j = v_j v_i, \quad v_i E_j = E_j v_i, \quad \text{para } |i - j| > 1,$$

$$E_i E_j E_i = E_i, \quad v_i v_j v_i = v_j v_i v_j, \quad v_i v_j E_i = E_j v_i v_j, \quad \text{para } |i - j| = 1.$$

Exemplo

A seguir, a figura ilustra os geradores em sua forma geométrica.

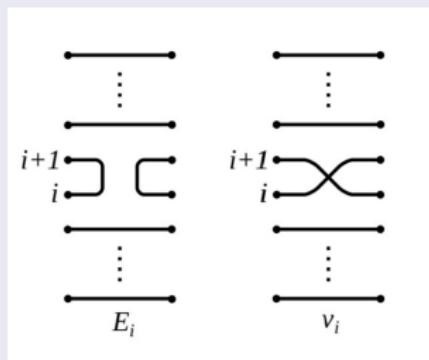


Figura: Geradores.

Seja E um flat virtual n -tangle. Conectando com um arco o ponto $(0, i)$ com o ponto $(1, i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ em um diagrama de E obtemos uma família de curvas fechadas que chamamos de *fechamento do diagrama* de E . Denotamos por $t_n(E)$ o número de curvas fechadas nesta família e definimos $T_n^{tf}(E) = z^{t_n(E)} = (-A^2 - A^{-2})^{t_n(E)}$.

Exemplo

A figura a seguir ilustra o fechamento do flat virtual tangle E do exemplo do flat virtual 3-tangle apresentado anteriormente. Nesse caso, temos $t_n(E) = 1$ e, portanto, $T_n^{tf}(E) = z = -A^2 - A^{-2}$.

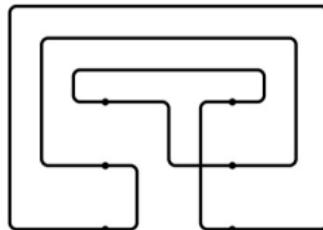


Figura: Fechamento de um flat virtual tangle.

Teorema (Paris, 2021)

A sequência $\{T_n'^f : VTL_n(R^f) \rightarrow R^f\}_{n=1}^\infty$ é uma função de Markov.

Ideia da prova

Para cada $n \geq 2$ e cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ definimos $S_i = -A^{-2}1 - A^{-4}E_i$. Temos que provar que as seguintes igualdades valem:

$$\begin{aligned} T_n'^f(xy) &= T_n'^f(yx), \\ T_n'^f(x) = T_{n+1}'^f(xS_n) &= T_{n+1}'^f(xS_n^{-1}) = T_{n+1}'^f(xv_n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$ e para todo $x, y \in VTL_n(R^f)$.

Obs.: $T_{n+1}'^f(E) = zT_n'^f(E)$, $T_{n+1}'^f(EE_n) = T_n'^f(E)$, $T_{n+1}'^f(Ev_n) = T_n'^f(E)$.

O invariante

Teorema

Seja $n \geq 1$. Existe um homomorfismo $\rho : R^f[SG_n] \rightarrow VTL_n(R^f)$ que envia σ_i para v_i e τ_i para $-A^{-2}v_i - A^{-4}E_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Ideia da prova

Agora, observe que

$$\begin{aligned}\rho(\tau_i \tau_j) &= (-A^{-2}v_i - A^{-4}E_i)(-A^{-2}v_j - A^{-4}E_j) \\ &= (-A^{-2}v_j - A^{-4}E_j)(-A^{-2}v_i - A^{-4}E_i) \\ &= \rho(\tau_j \tau_i),\end{aligned}$$

para $|i - j| > 1$.

Ideia da prova

Agora, observe que

$$\begin{aligned}\rho(\tau_i \tau_j) &= (-A^{-2}v_i - A^{-4}E_i)(-A^{-2}v_j - A^{-4}E_j) \\ &= (-A^{-2}v_j - A^{-4}E_j)(-A^{-2}v_i - A^{-4}E_i) \\ &= \rho(\tau_j \tau_i),\end{aligned}$$

para $|i - j| > 1$.

Para finalizar, vamos verificar que $\rho(\sigma_i \sigma_j \tau_i) = \rho(\tau_j \sigma_i \sigma_j)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\rho(\sigma_i \sigma_j \tau_i) &= v_i v_j (-A^{-2}v_i - A^{-4}E_i) = -A^{-2}v_i v_j v_i - A^{-4}v_i v_j E_i \\ &= -A^{-2}v_j v_i v_j - A^{-4}E_j v_i v_j = (-A^{-2}v_j - A^{-4}E_j)v_i v_j \\ &= \rho(\tau_j \sigma_i \sigma_j),\end{aligned}$$

para $|i - j| = 1$.

Tendo em vista os Teoremas anteriores gostaríamos de construir um invariante de isotopia para nós e enlaçamentos.

Definição

Seja $\omega \in SG_n$. Definimos o mapa Δ no fecho $\widehat{\omega}$ de ω como segue:

$$\Delta(\widehat{\omega}) := T_n'^f \circ \rho(\omega).$$

Teorema

O mapa Δ define um invariante de nós singulares.

Teorema

O mapa Δ define um invariante de nós singulares.

Prova

De acordo com o Teorema dos movimentos, basta provar que Δ preserva os movimentos (i), (ii) e (iii). A partir do fato que $T_n'^f(xy) = T_n'^f(yx)$, segue-se que Δ respeita os movimentos (i) e (ii). Agora, seja $\omega \in SG_n$ e, então, $\omega\sigma_i \in SG_{n+1}$. Assim,

$$\Delta(\widehat{\omega\sigma_n}) = T_{n+1}'^f(\rho(\omega\sigma_n)) = T_{n+1}'^f(Ev_n) = T_n'^f(E).$$

Por outro lado,

$$\Delta(\widehat{\omega\sigma_n^{-1}}) = T_{n+1}'^f(\rho(\omega\sigma_n^{-1})) = T_{n+1}'^f(Ev_n) = T_n'^f(E).$$

O movimento (iii) do teorema dos movimentos está agora verificado e a prova está concluída.

Sejam L_+ , L_- e L_\times diagramas de três links singulares orientados, que são idênticos, exceto próximo de um cruzamento, onde são os seguintes:



Figura: Relação skein.

Sejam L_+ , L_- e L_\times diagramas de três links singulares orientados, que são idênticos, exceto próximo de um cruzamento, onde são os seguintes:



Figura: Relação skein.

Proposição

O invariante Δ satisfaz a seguinte relação skein

$$-A^{-2}\Delta(L_+) - A^{-4}\Delta(L_-) = \Delta(L_\times).$$

Ideia da prova

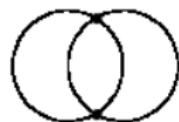
Pelo teorema de Alexander para tranças singulares podemos assumir que $L_+ = \widehat{\beta\sigma_i}$, $L_- = \widehat{\beta\sigma_i^{-1}}$ e $L_\times = \widehat{\beta\tau_i}$ para algum $\beta \in SG_n$.

Aplicações

Exemplos



$\widehat{\tau_1 \sigma_1}$



$\widehat{\tau_1^2}$

Figura: Exemplos de nós e enlaçamentos singulares.

$$\Delta(\widehat{\tau_1 \sigma_1}) = -A^2 - A^{-2}$$

$$\Delta(\widehat{\tau_1^2}) = A^{-12} + A^{-8} + A^{-4} + 1$$

-  **Gemein, B., *Singular braids and Markov's theorem*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications 6, 1997.**
-  **Jones, V.F.R., *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Annals of Math. 126, 1987.**
-  **Juyumaya, J, Lambropoulou, S., *An invariant for singular knots*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications 6, 2009.**
-  **Paris, L., Rabenda, L., *Virtual and arrow Temperley–Lieb algebras, Markov traces, and virtual link invariants*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications 6, 2021.**
-  **Paris, L., Rabenda, L., *Singular Hecke algebras, Markov traces and HOMFLY-type invariants*, to appear in Annales de l'Institut Fourier, 2008.**

Obrigado