Equivalência de Morita para Quantales

Moacyr Rodrigues de Miranda Júnior

Departamento de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal da Bahia

1. Quantales
   - Sup-reticulados e quantales
   - Q-módulos
   - Objetos projetivos
2. Gerador projetivo
3. Equivalência de Morita
4. Perspectiva
5. Referências

Sumário

1. Quantales
   - Sup-reticulados e quantales
   - Q-módulos
   - Objetos projetivos
2. Gerador projetivo
3. Equivalência de Morita
4. Perspectiva
5. Referências

Definição

Um sup-reticulado L é um reticulado completo na categoria em que os morfismos são funções que preservam supremos arbitrários (ou, equivalentemente, funções residuadas). Se $S \subseteq L$, o sup sobre S é denotado por $\bigvee_{s \in S} s$ ou $\bigvee S$.

Definição

Um quantale é uma estrutura $\langle Q, \bigvee, \cdot \rangle$ tal que

- Q1 $\langle Q, \bigvee \rangle$ *é um sup-reticulado,*
- Q2 $\langle Q, \cdot \rangle$ *é um semigrupo,*
- Q3 $a \cdot \bigvee B = \bigvee_{b \in B} (a \cdot b)$ *e* $(\bigvee B) \cdot a = \bigvee_{b \in B} (b \cdot a)$ *para todo* $a \in Q$, $B \subseteq Q$.

Um quantale Q é comutativo se a operação de multiplicação o for. Q é dito ser com unidade se existe $1 \in Q$ tal que $\langle Q, \cdot, 1 \rangle$ é um monóide. Um quantale com unidade é chamado integral se $1 = \top$.

Definição

Um sup-reticulado L é um reticulado completo na categoria em que os morfismos são funções que preservam supremos arbitrários (ou, equivalentemente, funções residuadas). Se $S \subseteq L$, o sup sobre S é denotado por $\bigvee_{s \in S} s$ ou $\bigvee S$.

Definição

Um quantale é uma estrutura $\langle Q, \bigvee, \cdot \rangle$ tal que

- Q1 $\langle Q, \bigvee \rangle$ *é um sup-reticulado,*
- Q2 $\langle Q, \cdot \rangle$ *é um semigrupo,*
- Q3 $a \cdot \bigvee B = \bigvee_{b \in B} (a \cdot b)$ *e* $(\bigvee B) \cdot a = \bigvee_{b \in B} (b \cdot a)$ *para todo* $a \in Q$, $B \subseteq Q$.

Um quantale Q é comutativo se a operação de multiplicação o for. Q é dito ser com unidade se existe $1 \in Q$ tal que $\langle Q, \cdot, 1 \rangle$ é um monóide. Um quantale com unidade é chamado integral se $1 = \top$.

Definição

Um sup-reticulado L é um reticulado completo na categoria em que os morfismos são funções que preservam supremos arbitrários (ou, equivalentemente, funções residuadas). Se $S \subseteq L$, o sup sobre S é denotado por $\bigvee_{s \in S} s$ ou $\bigvee S$.

Definição

Um quantale é uma estrutura $\langle Q, \bigvee, \cdot \rangle$ tal que

- Q1 $\langle Q, \bigvee \rangle$ *é um sup-reticulado,*
- Q2 $\langle Q, \cdot \rangle$ *é um semigrupo,*
- Q3 $a \cdot \bigvee B = \bigvee_{b \in B} (a \cdot b)$ *e* $(\bigvee B) \cdot a = \bigvee_{b \in B} (b \cdot a)$ *para todo* $a \in Q$, $B \subseteq Q$.

Um quantale Q é comutativo se a operação de multiplicação o for. Q é dito ser com unidade se existe $1 \in Q$ tal que $\langle Q, \cdot, 1 \rangle$ é um monóide. Um quantale com unidade é chamado integral se $1 = \top$.

Q-módulos

Definição

Seja Q um quantale. Um Q-módulo (à esquerda) é um sup-reticulado $\langle M, \bigvee \rangle$ sujeito a uma operação binária externa, ou multiplicação escalar, $* : (a, x) \in Q \times M \longmapsto a * x \in M$, tal que

1. $(a \cdot b) * x = a * (b * x)$, *para todo* $a, b \in Q$ *e* $x \in M$;
2. $*$ *é residuada em ambos os argumentos ou, equivalentemente, distribui sobre supremos arbitrários em Q e em M:*
   (a) $\left(\bigvee A\right) * x = \bigvee_{a \in A} a * x$, *para todo* $A \subseteq Q$ *e* $x \in M$, *e*
   (b) $a * \bigvee X = \bigvee_{x \in X} a * x$, *para todo* $a \in Q$ *e* $X \subseteq M$.
3. $1 * x = x$, *para todo* $x \in M$.

Q-módulos

Definição

Seja Q um quantale. Um Q-módulo (à esquerda) é um sup-reticulado $\langle M, \bigvee \rangle$ sujeito a uma operação binária externa, ou multiplicação escalar, $* : (a, x) \in Q \times M \longmapsto a * x \in M$, tal que

1. $(a \cdot b) * x = a * (b * x)$, *para todo* $a, b \in Q$ *e* $x \in M$;
2. $*$ *é residuada em ambos os argumentos ou, equivalentemente, distribui sobre supremos arbitrários em Q e em M:*
   (a) $\left(\bigvee A\right) * x = \bigvee_{a \in A} a * x$, *para todo* $A \subseteq Q$ *e* $x \in M$, *e*
   (b) $a * \bigvee X = \bigvee_{x \in X} a * x$, *para todo* $a \in Q$ *e* $X \subseteq M$.
3. $1 * x = x$, *para todo* $x \in M$.

Q-módulos

Proposição

$E := \mathrm{End}({}_Q M)$ é um quantale e M é um Q-E-bimódulo.

Definição

Denotamos $N = M^* := {}_Q\mathcal{M}({}_Q M, {}_Q Q)$ para o dual E-Q-bimódulo $N = M^*$ do Q-E-bimódulo M, onde a estrutura de E-Q-bimódulo em N é definida pela regra

$$m(hfq) = ((mh)f)q$$

para $m \in M$, $h \in E$, $f \in N$ e $q \in Q$.

Q-módulos

Proposição

$E := \mathrm{End}({}_Q M)$ é um quantale e M é um Q-E-bimódulo.

Definição

Denotamos $N = M^* := {}_Q\mathcal{M}({}_Q M, {}_Q Q)$ para o dual E-Q-bimódulo $N = M^*$ do Q-E-bimódulo M, onde a estrutura de E-Q-bimódulo em N é definida pela regra

$$m(hfq) = ((mh)f)q$$

para $m \in M$, $h \in E$, $f \in N$ e $q \in Q$.

Projetividade

Definição

Um objeto C é chamado projetivo se para qualquer morfismo $f : C \longrightarrow B$ e qualquer morfismo quociente $e : A \longrightarrow B$ existe um morfismo $h : C \longrightarrow A$ estendendo f, i.e. tal que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "e"] & B \\ & C \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dashed, "h"] \end{tikzcd} .$$

Projetividade

Definição

Sejam Q um quantale e S um conjunto. O Q-módulo livre sobre S é $Q^S = \{f \mid f : S \to Q$ é uma função$\}$ com operações definidas pontualmente:

$$a \bullet f : x \in S \mapsto a \cdot f(x) \in Q, \text{ para todo } a \in Q \text{ e } f \in Q^S;$$

$$\bigvee F : x \in S \mapsto \bigvee_{f \in F} f(x) \in Q, \text{ para todo } F \subseteq Q^S.$$

Proposição

Um Q-módulo ${}_QM$ é projetivo se e somente se ele é isomorfo à imagem de algum módulo livre Q^X sob um endomorfismo idempotente. Em particular, um Q-módulo cíclico M é projetivo se e somente se ele é isomorfo a $Q \cdot u$ para algum $u \in Q$ multiplicativamente idempotente.

Projetividade

Definição

Sejam Q um quantale e S um conjunto. O Q-módulo livre sobre S é $Q^S = \{f \mid f : S \to Q$ é uma função$\}$ com operações definidas pontualmente:

$$a \bullet f : x \in S \mapsto a \cdot f(x) \in Q, \text{ para todo } a \in Q \text{ e } f \in Q^S;$$

$$\bigvee F : x \in S \mapsto \bigvee_{f \in F} f(x) \in Q, \text{ para todo } F \subseteq Q^S.$$

Proposição

Um Q-módulo ${}_QM$ é projetivo se e somente se ele é isomorfo à imagem de algum módulo livre Q^X sob um endomorfismo idempotente. Em particular, um Q-módulo cíclico M é projetivo se e somente se ele é isomorfo a $Q \cdot u$ para algum $u \in Q$ multiplicativamente idempotente.

Projetividade

Lema

As funções $(m, f) \mapsto mf$ *e* $(f, m) \mapsto fm$ *definem o* (Q, Q)*-homomorfismo* $\alpha : M \otimes_E M^* \to Q$ *e o* (E, E)*-homomorfismo* $\beta : M^* \otimes_Q M \to E$*, respectivamente.*

Proposição

Seja ${}_QM$ *um* Q*-módulo, e consideremos seu módulo dual* $M^* := {}_Q\mathcal{M}(M, Q)$ *e o quantale* $E := \mathrm{End}({}_QM)$*. São equivalentes:*

(a) M *é projetivo;*

(b) β *é um isomorfismo;*

(c) β *é um homomorfismo sobrejetivo.*

Projetividade

Lema

As funções $(m, f) \mapsto mf$ *e* $(f, m) \mapsto fm$ *definem o* (Q, Q)*-homomorfismo* $\alpha : M \otimes_E M^* \to Q$ *e o* (E, E)*-homomorfismo* $\beta : M^* \otimes_Q M \to E$*, respectivamente.*

Proposição

Seja ${}_QM$ *um* Q*-módulo, e consideremos seu módulo dual* $M^* := {}_Q\mathcal{M}(M, Q)$ *e o quantale* $E := \mathrm{End}({}_QM)$*. São equivalentes:*

(a) M *é projetivo;*

(b) β *é um isomorfismo;*

(c) β *é um homomorfismo sobrejetivo.*

Sumário

1. Quantales
   - Sup-reticulados e quantales
   - Q-módulos
   - Objetos projetivos
2. Gerador projetivo
3. Equivalência de Morita
4. Perspectiva
5. Referências

Gerador projetivo

Definição

Um Q-módulo M é dito ser um gerador para ${}_Q\mathcal{M}$ se o módulo livre Q é um retrato de M^I para algum conjunto I. O Q-módulo ${}_QM$ é dito ser um progerador para a categoria ${}_Q\mathcal{M}$ se ele é um gerador projetivo.

Teorema

Um Q-módulo ${}_QM$ é um progerador sse os homomorfismos $\alpha : M \otimes_E M^* \to Q$ e $\beta : M^* \otimes_Q M \to E$ são isomorfismos de bimódulo.

Gerador projetivo

Definição

Um Q-módulo M é dito ser um gerador para ${}_Q\mathcal{M}$ se o módulo livre Q é um retrato de M^I para algum conjunto I. O Q-módulo ${}_QM$ é dito ser um progerador para a categoria ${}_Q\mathcal{M}$ se ele é um gerador projetivo.

Teorema

Um Q-módulo ${}_QM$ é um progerador sse os homomorfismos $\alpha : M \otimes_E M^* \to Q$ e $\beta : M^* \otimes_Q M \to E$ são isomorfismos de bimódulo.

Gerador projetivo

Definição

Um Q-módulo M é dito ser um gerador para ${}_Q\mathcal{M}$ se o módulo livre Q é um retrato de M^I para algum conjunto I. O Q-módulo ${}_QM$ é dito ser um progerador para a categoria ${}_Q\mathcal{M}$ se ele é um gerador projetivo.

Teorema

Um Q-módulo ${}_QM$ é um progerador sse os homomorfismos $\alpha : M \otimes_E M^* \to Q$ e $\beta : M^* \otimes_Q M \to E$ são isomorfismos de bimódulo.

Gerador projetivo

Proposição

Seja ${}_Q M$ *um progerador para* ${}_Q\mathcal{M}$. *Então:*

(a) $N = M^* := {}_Q\mathcal{M}({}_Q M, {}_Q Q) \cong \mathcal{M}_E(M_E, E_E)$ *como E-Q-módulo.*

(b) $M \cong {}_E\mathcal{M}({}_E N, {}_E E)$ *como um Q-E-módulo.*

(c) $Q \cong \mathrm{End}(M_E) \cong \mathrm{End}({}_E N)$ *como um quantale.*

(d) $M \cong \mathcal{M}_Q(N_Q, Q_Q)$ *como um Q-E-módulo.*

(e) $E \cong \mathrm{End}(N_Q)$ *como um quantale.*

Sumário

1. Quantales
   - Sup-reticulados e quantales
   - Q-módulos
   - Objetos projetivos
2. Gerador projetivo
3. Equivalência de Morita
4. Perspectiva
5. Referências

Equivalência de Morita

Definição

Dois quantales Q e R são ditos serem Morita equivalentes (e denotamos por $Q \approx R$) sse existe uma equivalência da categoria de módulos (esquerdos) sobre Q, ${}_Q\mathcal{M}$, e a categoria de módulos (esquerdos) sobre R, ${}_R\mathcal{M}$. Pode ser mostrado que as categorias de módulos esquerdos ${}_Q\mathcal{M}$ e ${}_R\mathcal{M}$ são equivalentes se e somente se categorias de módulos direitos $\mathcal{M}_Q$ e $\mathcal{M}_R$ são equivalentes.

Equivalência de Morita

Proposição

Seja $F : \mathcal{M}_Q \rightleftarrows \mathcal{M}_R : G$ *uma equivalência de Morita entre* Q *e* R*, i.e.* $Q \approx R$*. São válidos:*

(a) Se θ *uma sobrejeção em* $\mathcal{M}_Q$*, então* $F(\theta)$ *é uma sobrejeção em* $\mathcal{M}_R$*.*

(b) Se M *é um* Q*-módulo direito finitamente gerado, então* $F(M) \in \mathcal{M}_R$ *é um* R*-módulo direito finitamente gerado.*

(c) Se M *é um gerador para* $\mathcal{M}_Q$*, then* $F(M)$ *é um gerador para* $\mathcal{M}_R$*.*

(d) Se $P \in \mathcal{M}_Q$ *é projetivo, then* $F(P) \in \mathcal{M}_R$ *é projetivo.*

Corolário

Uma equivalência de Morita entre dois quantales preserva geradores projetivos e geradores projetivos finitamente gerados.

Equivalência de Morita

Proposição

Seja $F : \mathcal{M}_Q \rightleftarrows \mathcal{M}_R : G$ *uma equivalência de Morita entre* Q *e* R*, i.e.* $Q \approx R$*. São válidos:*

(a) Se θ *uma sobrejeção em* $\mathcal{M}_Q$*, então* $F(\theta)$ *é uma sobrejeção em* $\mathcal{M}_R$*.*

(b) Se M *é um* Q*-módulo direito finitamente gerado, então* $F(M) \in \mathcal{M}_R$ *é um* R*-módulo direito finitamente gerado.*

(c) Se M *é um gerador para* $\mathcal{M}_Q$*, then* $F(M)$ *é um gerador para* $\mathcal{M}_R$*.*

(d) Se $P \in \mathcal{M}_Q$ *é projetivo, then* $F(P) \in \mathcal{M}_R$ *é projetivo.*

Corolário

Uma equivalência de Morita entre dois quantales preserva geradores projetivos e geradores projetivos finitamente gerados.

Equivalência de Morita

Definição

Vamos denotar por $Q \overset{{}_QP}{\approx} R$ *quando tivermos* Q *e* R *quantales tais que existe um progerador* ${}_QP$ *para* ${}_Q\mathcal{M}$ *tal que os quantales* R *e* $\mathrm{End}({}_QP)$ *são isomorfos.*

Proposição

Se $Q \overset{{}_QP}{\approx} R$ *e* $R \overset{{}_RG}{\approx} S$*, então existe um progerador esquerdo* ${}_Q(P \otimes_R G)$ *para* ${}_Q\mathcal{M}$ *tal que os quantales* S *e* $\mathrm{End}({}_Q(P \otimes_R G))$ *são isomorfos* $(Q \overset{{}_Q(P\otimes_R G)}{\approx} S)$*, e os* S*-*Q*-bimódulos* $(P \otimes_R G)^*$ *e* $(G^* \otimes_R P^*)$ *são isomorfos.* **A relação** $Q \dot{\approx} R$ **na categoria de quantales é uma relação de equivalência**.

Equivalência de Morita

Definição

Vamos denotar por $Q \overset{{}_QP}{\approx} R$ *quando tivermos* Q *e* R *quantales tais que existe um progerador* ${}_QP$ *para* ${}_Q\mathcal{M}$ *tal que os quantales* R *e* $\mathrm{End}({}_QP)$ *são isomorfos.*

Proposição

Se $Q \overset{{}_QP}{\approx} R$ *e* $R \overset{{}_RG}{\approx} S$*, então existe um progerador esquerdo* ${}_Q(P \otimes_R G)$ *para* ${}_Q\mathcal{M}$ *tal que os quantales* S *e* $\mathrm{End}({}_Q(P \otimes_R G))$ *são isomorfos* $(Q \overset{{}_Q(P\otimes_R G)}{\approx} S)$*, e os* S*-*Q*-bimódulos* $(P \otimes_R G)^*$ *e* $(G^* \otimes_R P^*)$ *são isomorfos.* **A relação** $Q \overset{\bullet}{\approx} R$ **na categoria de quantales é uma relação de equivalência**.

Equivalência de Morita

Teorema

Dados os quantales Q e R, as seguintes são equivalentes:

(a) Q e R são Morita equivalentes;

(b) $Q \overset{{}_QG}{\approx} R$, com ${}_QG$ finitamente gerado;

(c) $Q \overset{{}_QP}{\approx} R$.

Sumário

1. Quantales
   - Sup-reticulados e quantales
   - Q-módulos
   - Objetos projetivos
2. Gerador projetivo
3. Equivalência de Morita
4. Perspectiva
5. Referências

Em termos gerais

- Uma ação de um monóide M sobre um conjunto S é uma função

$$f : M \times S \to S, \text{ onde } f(1,x) = x \text{ e } f(a, f(b,x)) = f(ab,x),$$
$$\forall a, b \in M, \forall x \in S.$$

- $(\mathscr{P}(M), \cup, \bullet, \{1\})$ é um quantale e o sup-reticulado $(\mathscr{P}(S), \cup)$ é um $\mathscr{P}(M)$-módulo.

Proposição [Galatos, Tsinakis]

Dada uma linguagem $\mathcal{L}$, $\mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$, $\mathscr{P}(\mathbf{Eq}_{\mathcal{L}})$ e $\mathscr{P}(\mathbf{Seq}_{\mathcal{L}})$ são módulos esquerdos sobre o quantale $\mathscr{P}(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{L}}) = \langle \mathscr{P}(\Sigma_{\mathcal{L}}), \cup, \circ, \varnothing, \{\mathrm{id}\} \rangle$.

Teorema [Galatos, Tsinakis]

$\mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$, $\mathscr{P}(\mathbf{Eq}_{\mathcal{L}})$ e $\mathscr{P}(\mathbf{Seq}_{\mathcal{L}})$ são $\mathscr{P}(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{L}})$-módulos projetivos.

Em termos gerais

- Uma ação de um monóide M sobre um conjunto S é uma função
$$f : M \times S \to S, \text{ onde } f(1,x) = x \text{ e } f(a, f(b,x)) = f(ab,x), \\ \forall a, b \in M, \forall x \in S.$$
- $(\mathscr{P}(M), \cup, \bullet, \{1\})$ é um quantale e o sup-reticulado $(\mathscr{P}(S), \cup)$ é um $\mathscr{P}(M)$-módulo.

Proposição [Galatos, Tsinakis]

Dada uma linguagem $\mathcal{L}$, $\mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$, $\mathscr{P}(\mathbf{Eq}_{\mathcal{L}})$ e $\mathscr{P}(\mathbf{Seq}_{\mathcal{L}})$ são módulos esquerdos sobre o quantale $\mathscr{P}(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{L}}) = \langle \mathscr{P}(\Sigma_{\mathcal{L}}), \cup, \circ, \varnothing, \{\mathrm{id}\} \rangle$.

Teorema [Galatos, Tsinakis]

$\mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$, $\mathscr{P}(\mathbf{Eq}_{\mathcal{L}})$ e $\mathscr{P}(\mathbf{Seq}_{\mathcal{L}})$ são $\mathscr{P}(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{L}})$-módulos projetivos.

Em termos gerais

- Uma ação de um monóide M sobre um conjunto S é uma função
$$f : M \times S \to S, \text{ onde } f(1,x) = x \text{ e } f(a, f(b,x)) = f(ab,x),$$
$$\forall a, b \in M, \forall x \in S.$$
- $(\mathscr{P}(M), \cup, \bullet, \{1\})$ é um quantale e o sup-reticulado $(\mathscr{P}(S), \cup)$ é um $\mathscr{P}(M)$-módulo.

Proposição [Galatos, Tsinakis]

Dada uma linguagem $\mathcal{L}$, $\mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$, $\mathscr{P}(\mathbf{Eq}_{\mathcal{L}})$ e $\mathscr{P}(\mathbf{Seq}_{\mathcal{L}})$ são módulos esquerdos sobre o quantale $\mathscr{P}(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{L}}) = \langle \mathscr{P}(\Sigma_{\mathcal{L}}), \cup, \circ, \varnothing, \{\mathrm{id}\} \rangle$.

Teorema [Galatos, Tsinakis]

$\mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$, $\mathscr{P}(\mathbf{Eq}_{\mathcal{L}})$ e $\mathscr{P}(\mathbf{Seq}_{\mathcal{L}})$ são $\mathscr{P}(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{L}})$-módulos projetivos.

Em termos gerais

- Uma ação de um monóide M sobre um conjunto S é uma função
$$f : M \times S \to S, \text{ onde } f(1,x) = x \text{ e } f(a, f(b,x)) = f(ab,x),$$
$$\forall a, b \in M, \forall x \in S.$$
- $(\mathscr{P}(M), \cup, \bullet, \{1\})$ é um quantale e o sup-reticulado $(\mathscr{P}(S), \cup)$ é um $\mathscr{P}(M)$-módulo.

Proposição [Galatos, Tsinakis]

Dada uma linguagem $\mathcal{L}$, $\mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$, $\mathscr{P}(\mathbf{Eq}_{\mathcal{L}})$ e $\mathscr{P}(\mathbf{Seq}_{\mathcal{L}})$ são módulos esquerdos sobre o quantale $\mathscr{P}(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{L}}) = \langle \mathscr{P}(\Sigma_{\mathcal{L}}), \cup, \circ, \varnothing, \{\mathrm{id}\} \rangle$.

Teorema [Galatos, Tsinakis]

$\mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$, $\mathscr{P}(\mathbf{Eq}_{\mathcal{L}})$ e $\mathscr{P}(\mathbf{Seq}_{\mathcal{L}})$ são $\mathscr{P}(\mathbf{\Sigma}_{\mathcal{L}})$-módulos projetivos.

No contexto da lógica

- $(\mathscr{P}(\Sigma_{\mathcal{L}}), \cup, \circ, \{id\})$ é um quantale;
- $(\mathscr{P}(Fm), \cup)$ é um $\mathscr{P}(\Sigma_{\mathcal{L}})$-módulo esquerdo, com a ação $(\Sigma, \Phi) \mapsto \Sigma \cdot \Phi = \{\sigma(\varphi) \mid \sigma \in \Sigma, \varphi \in \Phi\}$
- $\mathbf{Th}_{\vdash} = \langle Th_{\vdash}, \gamma_{\vdash} \circ \vee, \gamma_{\vdash}(\bot) \rangle$ é um sup-reticulado e, se $\vdash$ é estrutural, então $\mathbf{Th}_{\vdash}$ é um $\mathscr{P}(\Sigma_{\mathcal{L}})$-módulo (um quociente de $\mathscr{P}(Fm)$).

Sumário

1. Quantales
   - Sup-reticulados e quantales
   - Q-módulos
   - Objetos projetivos
2. Gerador projetivo
3. Equivalência de Morita
4. Perspectiva
5. Referências

Referências

- Galatos N., Tsinakis C.; Equivalence of consequence relations: an order-theoretic and categorical perspective, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 74, No. 3 (2009), 780–810.
- Katsov, Y., Nam, T.G.; *Morita equivalence and homological characterization of semirings*. *Journal of Algebra and Its Applications*, Vol. 10, No. 3 (2011), 445–473
- Russo, C.; An order-theoretic analysis of interpretations among propositional deductive systems. *Annals of Pure and Applied Logic*, 164 (2013), 112–130.

Obrigado!