Ponte Suspensa com Amortecimento Interno

Leandro C. Araújo

Orientador: Carlos Raposo
Co-orientador: Joilson Ribeiro
Colaborador: Artur Cunha

Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática e Estatística

Novembro / 2023

Introdução

Vigas são estruturas quase onipresentes na construção civil, de modo que torna-se fundamental o emprego de modelos matemáticos para a análise do comportamento de tais estruturas. A primeira teoria, a teoria clássica de vigas, é proposta por Daniel Bernoulli e Eule no século 18, como continuidade de estudos realizados por Jakob Bernoulli. Devido à sua praticidade de aplicação, esse modelo ainda é amplamente utilizado, porém possui limitações por não considerar efeitos de cisalhamento.

No início do século 20, mais precisamente entre 1911 e 1912, Stephen Timoshenko e Paul Ehrenfest deduziram um modelo de viga que leva em consideração o ângulo de rotação e o efeito de cisalhamento, o qual foi publicado em 1921, (Timoshenko, 1921). Usaremos a teoria unidimensional de Timoshenko para estudar o comportamento de uma ponte pênsil.

Figura 1: Ponte formada por árvore caída

Fonte: Google

Figura 2: Pontes suspensas concluídas

#	Ponte		Vão principal (m)	Localização	País
1		Ponte Çanakkale 1915	2 023 m	Dardanelos	Turquia
2		Ponte Akashi-Kaikyo	1 991	Kobe	Japão
3		Ponte Xihoumen	1 650	Zhoushan	China
4		Ponte Great Belt	1 624	Korsør	Dinamarca
5		Ponte Osman Gazi	1 550	Gebze - Altınova	Turquia

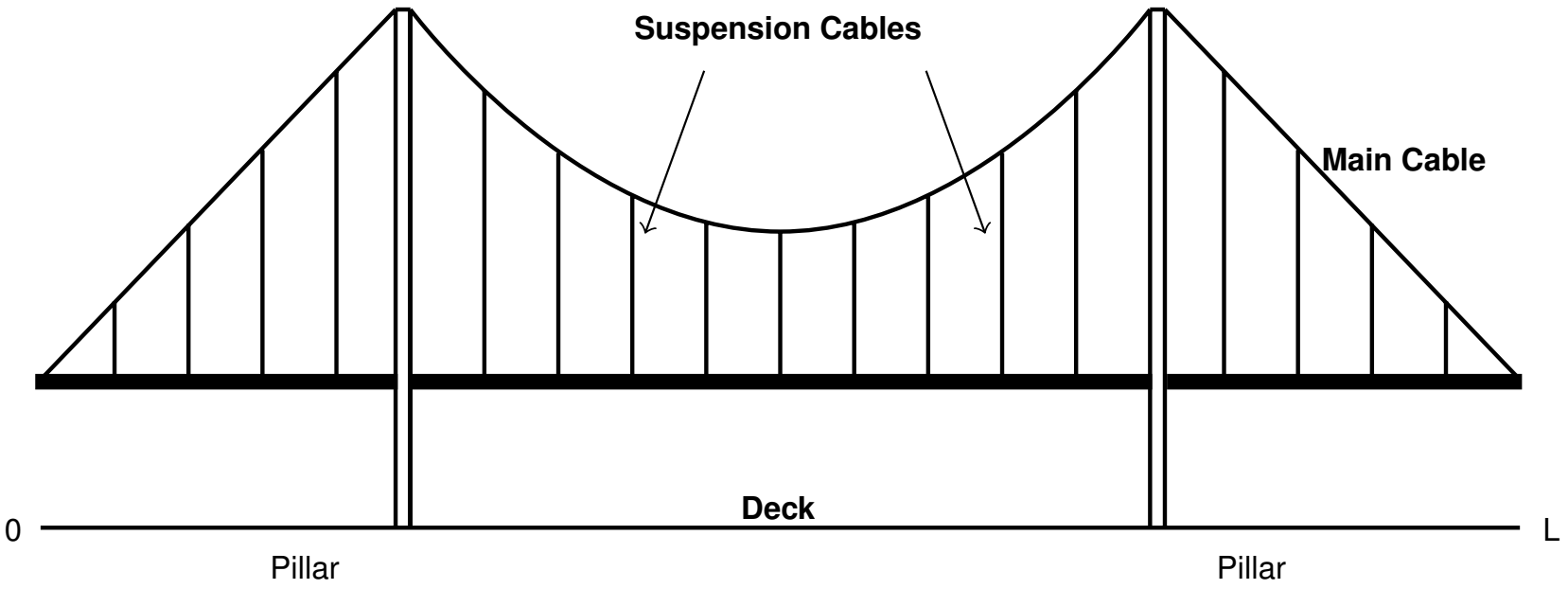
Foto: Wikipédia/Adaptada

Ponte Salvador-Itaparica

Foto: GOVBA/ Divulgação

Considerando a extensão do vão, as pontes suspensas são maiores do que qualquer outro tipo de ponte.

Ponte Suspensa



Fonte: Raposo, Correia, Ribeiro e Cunha (2023)

Consideraremos que o deque tem largura e espessura de dimensões desprezíveis quando comparadas ao comprimento (vão) da ponte, sendo modelada pela teoria unidimensional de Timoshenko como uma viga de comprimento L, veja Timoshenko (1921). Como em Mukiawa, Enyi e Messaoudi (2023), vamos denotar por $\varphi = \varphi(x, t)$ o deslocamento da seção transversal no ponto $x \in (0, L)$, por $\psi = \psi(x, t)$ o ângulo de rotação da seção transversal e os cabos suspensos serão considerados molas elásticas lineares com rigidez padrão $\lambda > 0$.

A constante $\alpha > 0$ é o módulo de elasticidade da corda (segurando o cabo principal ao deque). Os coeficientes positivos ρ_1 e ρ_2 são as densidades de massa e momento de massa inercia da viga, respectivamente. Mais ainda, b representa o coeficiente de rigidez da seção transversal, e k representa o módulo de cisalhamento da elasticidade. Finalmente, a constante $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$ são os coeficientes da força de amortecimento.

Obtemos então o seguinte sistema, para o qual mostraremos a existência e unicidade de soluções e a analiticidade.

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma_1 u_t = 0, \tag{1}$$

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \gamma_2 \varphi_t = 0, \tag{2}$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma_3 \psi_t = 0. \tag{3}$$

Considerando $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)^T$, onde $u_t = v, \varphi_t = w$ e $\psi_t = z$, podemos reescrever o sistema (1)-(3) como,

$$U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \varphi_t \\ w_t \\ \psi_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \alpha u_{xx} + \lambda(\varphi - u) - \gamma_1 v \\ w \\ \dfrac{1}{\rho_1}\left[k(\varphi_x + \psi)_x - \lambda(\varphi - u) - \gamma_2 w\right] \\ z \\ \dfrac{1}{\rho_2}\left[b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \gamma_3 z\right] \end{pmatrix} = \mathcal{A}U.$$

Assim, o sistema (1)-(3) torna-se um problema de evolução de Cauchy de primeira ordem,

$$\begin{cases} U_t - \mathcal{A}U = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4}$$

onde

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

é um operador linear ilimitado no espaço

$$\mathcal{H} = [H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^3$$

com domínio $D(\mathcal{A}) = [H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L)]^3$, o qual é denso em $\mathcal{H}$.

Em $\mathcal{H}$ definimos o seguinte produti interno,

$$\langle U, \tilde{U}\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L v\overline{\tilde{v}}dx + \alpha\int_0^L u_x\overline{\tilde{u}}_x dx + \rho_1\int_0^L w\overline{\tilde{w}}dx + \rho_2\int_0^L z\overline{\tilde{z}}dx + b\int_0^L \psi_x\overline{\tilde{\psi}}_x$$
$$+ \lambda\int_0^L (\varphi - u)(\overline{\tilde{\varphi}} - \overline{\tilde{u}})dx + k\int_0^L (\varphi_x + \psi)(\overline{\tilde{\varphi}}_x + \overline{\tilde{\psi}})dx.$$

Com $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e temos $\|U\|^2_{\mathcal{H}} = \langle U, U\rangle_{\mathcal{H}}$.

Para a existência de solução usaremos o Teorema de Lummer-Phillips (Pazy, 1983). Como $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$, para que $\mathcal{A}$ seja o gerador de $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$, um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$, precisamos dos seguintes lemas.

Lema 1

O operador $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Demonstração.

Seja $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)^T \in D(\mathcal{A})$, então

$$\mathfrak{Re}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma_1 \int_0^L |v|^2 dx - \gamma_2 \int_0^L |w|^2 dx - \gamma_3 \int_0^L |z|^2 dx \leq 0.$$

□

Lema 2

$0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Demonstração.

Lemma 3 de Raposo, Correia, Ribeiro e Cunha (2023). □

Teorema 3 (Existência e Unicidade)

Seja $U_0 \in \mathcal{H}$, *então existe uma única solução fraca* U *do problema* (4) *satisfazendo*

$$U \in C^0([0, +\infty); \mathcal{H}). \tag{5}$$

Mais ainda, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, *então*

$$U \in C^0([0, +\infty); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty); \mathcal{H}). \tag{6}$$

Demonstração.

Segue da teoria de semigrupos, veja Pazy (1983), p. 100, que $U(t) = e^{t\mathcal{A}} U_0$ é a única solução de (4) satisfazendo (5) e (6). $\square$

Teorema 4

Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um C_0-semigrupo de contrações no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Suponha que

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}), \text{ o conjunto resolvente de } \mathcal{A}.$$

Então, $S(t)$ é analítico se, e só se,

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \|\beta(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Demonstração.

Veja Liu e Zheng (2011), theorem 1.3.3, p. 5. □

Para mostrar a analiticidade do semigrupo associado provamos que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, vide Lemma 4, p. 10 - 12, de Raposo, Correia, Ribeiro e Cunha (2023), e que

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \|\beta(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty, \tag{7}$$

Ideia da Demonstração

Caso não seja verdadeiro, então existem $\beta^n \to \infty$, $\beta^n > 0$, e uma sequência de vetores complexos
$U^n = (u^n, v^n, \varphi^n, w^n, \psi^n, z^n)^T \in D(\mathcal{A})$, $||U^n||_{\mathcal{H}} = 1$ tais que

$$\left\| \left(iI - \frac{1}{\beta^n}\mathcal{A} \right) U^n \right\|_{\mathcal{H}} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Entretanto, chegamos à conclusão de que $||U^n||_{\mathcal{H}} \to 0$.

Teorema 5

O semigrupo $S(t) = e^{\mathcal{A}t}, \ t \geq 0$, *gerado por* $\mathcal{A}$ *é analítico.*

Corolário 1

O C_0*-semigrupo de contrações* $S(t) = e^{\mathcal{A}t}, t \geq 0$, *gerado por* $\mathcal{A}$ *é exponencialmente estável.*

OBRIGADO!

Bibliografia

- LIU, Z., ZHENG, S.: *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Springer, New York, (2011).
- MUKIAWA, S.E., ENYI, C.D., MESSAOUDI, S.A.: *Stability of thermoelastic Timoshenko beam with suspenders and time-varying feedback*, Adv. Cont. Discr. Mod. **7**, (2023) 1–19. https://doi.org/10.1186/s13662-023-03752-w
- PAZY, A.: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag New York, (1983

Bibliografia

- RAPOSO, Carlos; CORREIA, Leandro; RIBEIRO, Joilson; CUNHA, Arthur. *Suspension bridge with internal damping*. Acta Mechanica, [S.L.], p. 1-16, 13 out. 2023. Springer Science and Business Media LLC. http://dx.doi.org/10.1007/s00707-023-03744-7.
- TIMOSHENKO, S.P. : *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. Philosophical Magazine, **41**:744–746,(1921).
- WIKIPEDIA. *Lista das pontes suspensas mais extensas do mundo*. Disponível em: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Lista_das_pontes_suspensas_mais_extensas_do_mundo`. Acesso em: 15 nov. 2023.