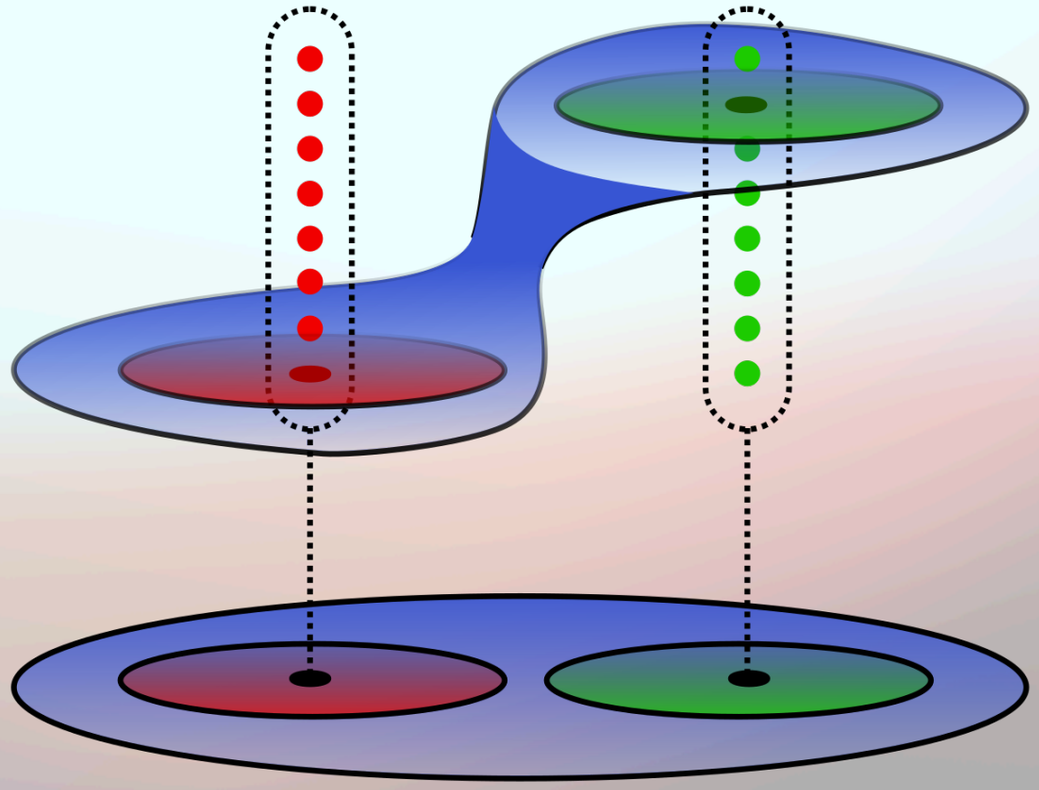
# VIII EPGMAT

## Feixes, Topos e Lógica

Darllan Conceição Pinto



# Introdução

- A noção de Feixes (Cohomologia de feixes) foi introduzido por Jean Leray quando esteve em um campo de concentração na Austria. Entre 1940 e 1945, Leray e outros prisioneiros organizaram a "*Université en captivité*".

- Primeira definição de Feixes em sua forma topológica foi dada por Lazard no início dos anos 50.

# Introdução

- A noção de Feixes (Cohomologia de feixes) foi introduzido por Jean Leray quando esteve em um campo de concentração na Austria. Entre 1940 e 1945, Leray e outros prisioneiros organizaram a "*Université en captivité*".

- Primeira definição de Feixes em sua forma topológica foi dada por Lazard no início dos anos 50.

Seja K um anel comutativo com unidade. Um feixe de K-módulos sobre um espaço topológico (regular) $X$ é um conjunto $F$ junto com uma função $p$ (projeção) de $F$ em $X$ satisfazendo

1. Para cada ponto $x \in X$, $p_{-1}(x) = F_x$ é um K-módulo.
2. $F$ é um espaço topológico saifazendo as seguintes condições:
   1. As leis de composição de F (não introduzida) definida pela estrutura de K-módulos de $F_x$ são contínuas.
   2. $p$ é um homeomorfismo local.

# Introdução

- A segunda forma mais aceita de definir feixes foi dada por Cartan considerando as seções de F sobre abertos do espaço topológico $X$.

# Introdução

- A segunda forma mais aceita de definir feixes foi dada por Cartan considerando as seções de F sobre abertos do espaço topológico *X*.

the set of continuous mappings $s : X \to F$ with $p(s(x)) = x \; \forall x \in X$

# Introdução

- A segunda forma mais aceita de definir feixes foi dada por Cartan considerando as seções de F sobre abertos do espaço topológico *X*.

the set of continuous mappings $s : X \to F$ with $p(s(x)) = x \ \forall x \in X$

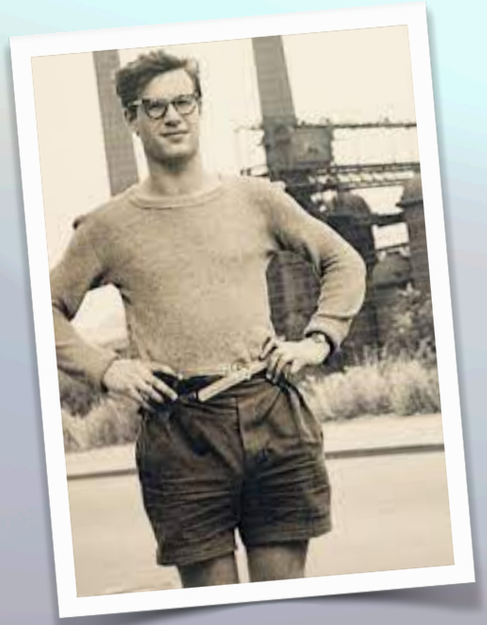
- Esta nova forma de definir feixes motiva a noção de pré-feixes e feixes introduzidas por Grothendieck no aclamado Tôhoku Paper (*Sur quelques points d'algèbre homologique,* ***Tohoku Mathematical Journal****, 1957*).

# Introdução

- A segunda forma mais aceita de definir feixes foi dada por Cartan considerando as seções de F sobre abertos do espaço topológico *X*.

the set of continuous mappings $s : X \to F$ with $p(s(x)) = x \ \forall x \in X$

- Esta nova forma de definir feixes motiva a noção de pré-feixes e feixes introduzidas por Grothendieck no aclamado Tôhoku Paper (*Sur quelques points d'algèbre homologique, **Tohoku Mathematical Journal**, 1957*).

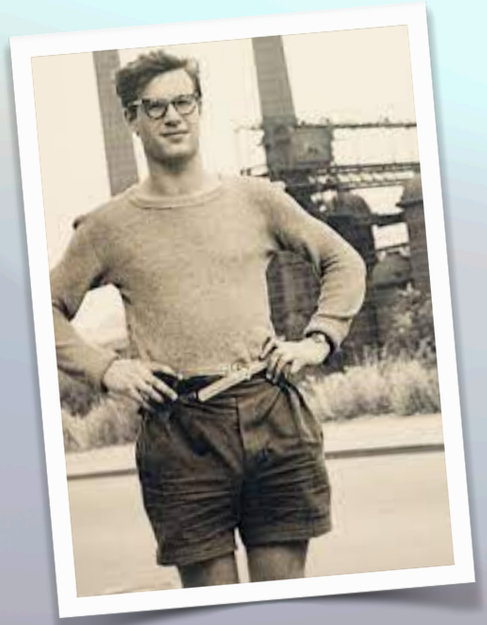


# Introdução

- A segunda forma mais aceita de definir feixes foi dada por Cartan considerando as seções de F sobre abertos do espaço topológico *X*.

the set of continuous mappings $s : X \to F$ with $p(s(x)) = x \ \forall x \in X$

- Esta nova forma de definir feixes motiva a noção de pré-feixes e feixes introduzidas por Grothendieck no aclamado Tôhoku Paper (*Sur quelques points d'algèbre homologique, **Tohoku Mathematical Journal**, 1957*).

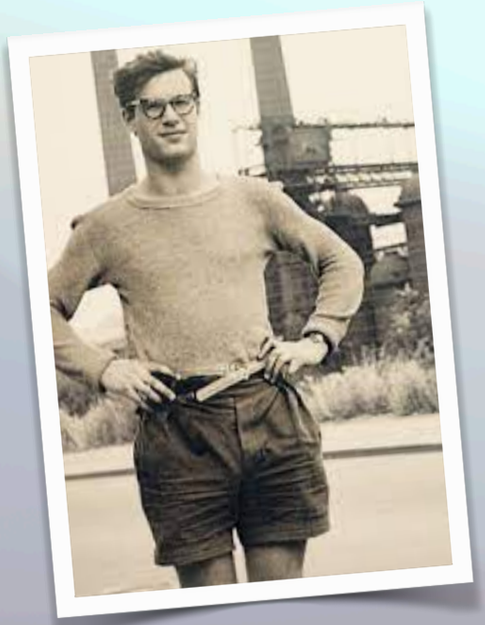


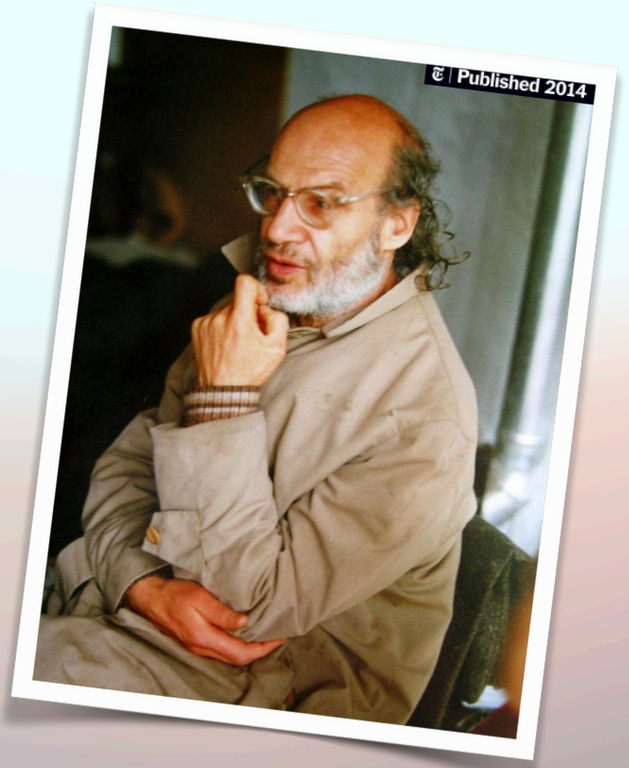
# Introdução

- A segunda forma mais aceita de definir feixes foi dada por Cartan considerando as seções de F sobre abertos do espaço topológico *X*.

the set of continuous mappings $s : X \to F$ with $p(s(x)) = x \ \forall x \in X$

- Esta nova forma de definir feixes motiva a noção de pré-feixes e feixes introduzidas por Grothendieck no aclamado Tôhoku Paper (*Sur quelques points d'algèbre homologique, **Tohoku Mathematical Journal**, 1957*).



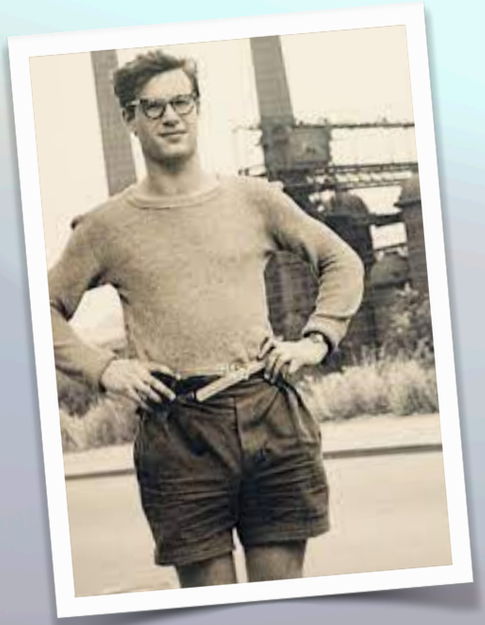


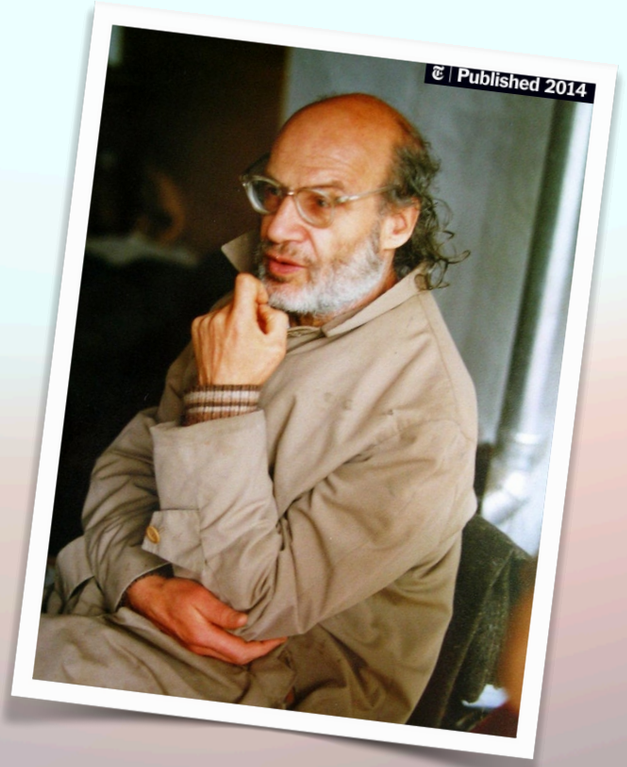
# Introdução

- A segunda forma mais aceita de definir feixes foi dada por Cartan considerando as seções de F sobre abertos do espaço topológico *X*.

the set of continuous mappings $s : X \to F$ with $p(s(x)) = x \ \forall x \in X$

- Esta nova forma de definir feixes motiva a noção de pré-feixes e feixes introduzidas por Grothendieck no aclamado Tôhoku Paper (*Sur quelques points d'algèbre homologique, **Tohoku Mathematical Journal**, 1957*).





# Pré-feixes

**<u>Pré-feixe:</u>** Seja $X$ um espaço topológico (não necessariamente separável). Um pre-feixe de conjuntos sobre $X$ coniste de um conjunto $F(U)$ para cada aberto $U$ de $X$ e para quaisquer par de abertos não-vazios $U$, $V$ tais que $V \subseteq U$, temos uma função restrição $\varphi_{V,U} : F(U) \to F(V)$ ($\varphi_{V,U}(f) = f|_V$), tal que $\varphi_{U,U}$ é a função indentidade de $F(U)$ e $\varphi_{W,V} \circ \varphi_{V,U} = \varphi_{W,U}$.

# Pré-feixes

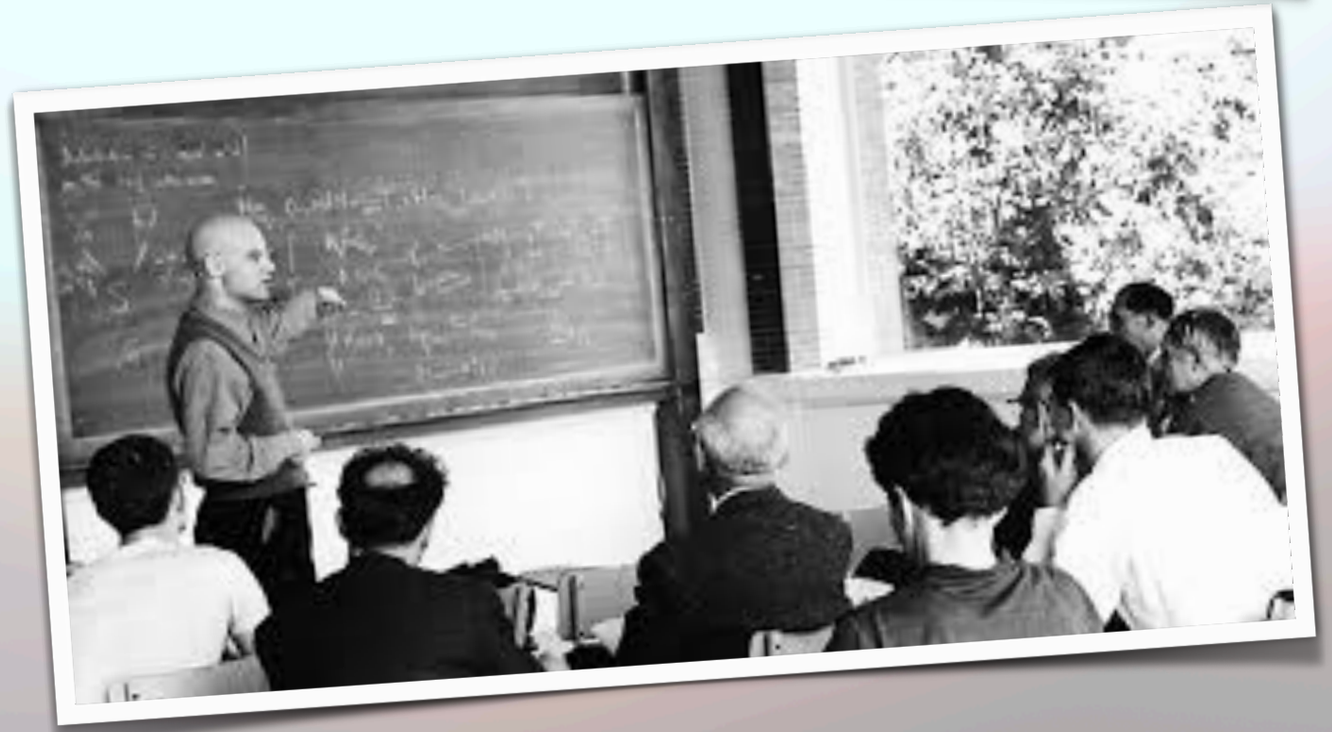
**Pré-feixe:** Seja $X$ um espaço topológico (não necessariamente separável). Um pre-feixe de conjuntos sobre $X$ coniste de um conjunto $F(U)$ para cada aberto $U$ de $X$ e para quaisquer par de abertos não-vazios $U$, $V$ tais que $V \subseteq U$, temos uma função restrição $\varphi_{V,U} : F(U) \to F(V)$ ($\varphi_{V,U}(f) = f|_V$), tal que $\varphi_{U,U}$ é a função indentidade de $F(U)$ e $\varphi_{W,V} \circ \varphi_{V,U} = \varphi_{W,U}$.

No caso em que cada $F(U)$ é um grupo (anel, R-módulo, etc.) e cada $\varphi_{V,U}$ homomorfismo de grupos (anel, R-módulo, etc), teremos um pre-feixe de grupos (anel, R-módulos, etc) sobre $X$.

# Pré-feixes

**Pré-feixe:** Seja $X$ um espaço topológico (não necessariamente separável). Um pre-feixe de conjuntos sobre $X$ coniste de um conjunto $F(U)$ para cada aberto $U$ de $X$ e para quaisquer par de abertos não-vazios $U$, $V$ tais que $V \subseteq U$, temos uma função restrição $\varphi_{V,U} : F(U) \to F(V)$ ($\varphi_{V,U}(f) = f|_V$), tal que $\varphi_{U,U}$ é a função indentidade de $F(U)$ e $\varphi_{W,V} \circ \varphi_{V,U} = \varphi_{W,U}$.

No caso em que cada $F(U)$ é um grupo (anel, R-módulo, etc.) e cada $\varphi_{V,U}$ homomorfismo de grupos (anel, R-módulo, etc), teremos um pre-feixe de grupos (anel, R-módulos, etc) sobre $X$.



# Exemplos

1. Considerando $X = \mathbb{R}^n$, os conjuntos $C^\infty(U)$ de funções reais $C^\infty$ forma um feixe de conjuntos (grupos, anéis e $\mathbb{R}$-módulos).

# Exemplos

1. Considerando $X = \mathbb{R}^n$, os conjuntos $C^\infty(U)$ de funções reais $C^\infty$ forma um feixe de conjuntos (grupos, anéis e $\mathbb{R}$-módulos).

2. Seja $X$ um espaço topológico. Para cada aberto $U \subseteq X$, os conjuntos

$$\mathcal{O}_X(U) := \{f : U \to \mathbb{R} |\ f \textit{ é contínua}\}$$

define um feixe de aneis $\mathcal{O}_X : (X) \to$ **Rings**.

# Exemplos

1. Considerando $X = \mathbb{R}^n$, os conjuntos $C^\infty(U)$ de funções reais $C^\infty$ forma um feixe de conjuntos (grupos, anéis e $\mathbb{R}$-módulos).

2. Seja $X$ um espaço topológico. Para cada aberto $U \subseteq X$, os conjuntos

$$\mathcal{O}_X(U) := \{f : U \to \mathbb{R} |\ f \textit{ é contínua}\}$$

define um feixe de aneis $\mathcal{O}_X : (X) \to$ **Rings**.

3. Considere um fibrado vetorial $\pi : E \to X$. Para cada aberto $U \subseteq X$ o conjunto

$$F(U) := \{\sigma : U \to E |\ \pi \circ \sigma = Id_U\}$$

define um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos $F : Open(X) \to \mathcal{O}_X$-**Mod**

# Categorias

Grothendieck consolida a teoria de categorias e apresenta como ferramenta no estudo da Teoria de (co-)Homologia e revoluciona completamente a Topologia Algébrica.

# Categorias

Grothendieck consolida a teoria de categorias e apresenta como ferramenta no estudo da Teoria de (co-)Homologia e revoluciona completamente a Topologia Algébrica.

Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de:

1. Uma classe $C$ cujos elementos são chamados de *Objetos da categoria*.
2. Para quaisquer para de objetos $a, b$ um conjunto denotado por $\mathcal{C}(a, b)$ cujos elementos são chamados de *morfismos* de $a$ em $b$.
3. Dados $a, b, c$ objetos, uma lei de composição

$$\circ : \mathcal{C}(a, b) \times \mathcal{C}(b, c) \to \mathcal{C}(a, c)$$

   Onde denotamos a composição do par $(f, g)$ por $g \circ f$.
4. Para cada objeto $a$, existe um elemento $1_a \in \mathcal{C}(a, a)$ chamado de *identidade*

# Categorias

Grothendieck consolida a teoria de categorias e apresenta como ferramenta no estudo da Teoria de (co-)Homologia e revoluciona completamente a Topologia Algébrica.

Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de:

1. Uma classe $C$ cujos elementos são chamados de *Objetos da categoria*.
2. Para quaisquer para de objetos $a, b$ um conjunto denotado por $\mathcal{C}(a, b)$ cujos elementos são chamados de *morfismos* de $a$ em $b$.
3. Dados $a, b, c$ objetos, uma lei de composição

$$\circ : \mathcal{C}(a, b) \times \mathcal{C}(b, c) \to \mathcal{C}(a, c)$$

   Onde denotamos a composição do par $(f, g)$ por $g \circ f$.
4. Para cada objeto $a$, existe um elemento $1_a \in \mathcal{C}(a, a)$ chamado de *identidade*

Satisfazendo os seguintes axiomas:

1. **Associatividade:** Dados $f \in \mathcal{C}(a, b)$, $g \in \mathcal{C}(b, c)$ e $h \in \mathcal{C}(c, d)$, temos

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

2. **Identidade:** Dados $f \in \mathcal{C}(a, b)$, $g \in \mathcal{C}(b, c)$, temos

$$1_b \circ f = f \qquad e \qquad g \circ 1_b = g$$

# Funtor

Um funtor **contravariante** entre as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ consiste de:

1. Uma aplicação entre as classes de objetos.

$$F_0 : C \to D$$

2. Para qualquer par de objetos $a, b$ de $\mathcal{C}$, uma aplicação

$$F_1 : \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(F_0(b), F_0(a))$$

# Funtor

Um funtor **contravariante** entre as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ consiste de:

1. Uma aplicação entre as classes de objetos.

$$F_0 : C \to D$$

2. Para qualquer par de objetos $a, b$ de $\mathcal{C}$, uma aplicação

$$F_1 : \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(F_0(b), F_0(a))$$

Satisfazendo os seguintes axiomas:

1. Para qualquer par de morfismos $f \in \mathcal{C}(a, b),\ g \in \mathcal{C}(b, c)$

$$F_1(g \circ f) = F_1(f) \circ F_1(g)$$

2. Para qualquer objeto $a$ de $\mathcal{C}$

$$F_1(1_a) = 1_{F_0(a)}$$

# Pré-feixes como funtores

Seja $X$ um epaço topológico. O conjunto $Open(X)$ pode ser visto como uma categoria $\mathcal{O}_X$ onde os objetos são os abertos do espaço topológico e dados dois abertos $U$ e $V$, o conjunto $\mathcal{O}_X(V, U)$ é unitário se $V \subseteq U$ ou vazio caso contrário.

# Pré-feixes como funtores

Seja $X$ um epaço topológico. O conjunto $Open(X)$ pode ser visto como uma categoria $\mathcal{O}_X$ onde os objetos são os abertos do espaço topológico e dados dois abertos $U$ e $V$, o conjunto $\mathcal{O}_X(V, U)$ é unitário se $V \subseteq U$ ou vazio caso contrário.

**<u>Pré-feixe:</u>** Seja $X$ um espaço topológico (não necessariamente separável). Um pre-feixe de conjuntos sobre $X$ consiste de um conjunto $F(U)$ para cada aberto $U$ de $X$ e para quaisquer par de abertos não-vazios $U$, $V$ tais que $V \subseteq U$, temos uma função restrição $\varphi_{V,U} : F(U) \to F(V)$, tal que $\varphi_{U,U}$ é a função indentidade de $F(U)$ e $\varphi_{W,V} \circ \varphi_{V,U} = \varphi_{W,U}$.

# Pré-feixes como funtores

Seja $X$ um epaço topológico. O conjunto $Open(X)$ pode ser visto como uma categoria $\mathcal{O}_X$ onde os objetos são os abertos do espaço topológico e dados dois abertos $U$ e $V$, o conjunto $\mathcal{O}_X(V, U)$ é unitário se $V \subseteq U$ ou vazio caso contrário.

**<u>Pré-feixe:</u>** Seja $X$ um espaço topológico (não necessariamente separável). Um pre-feixe de conjuntos sobre $X$ consiste de um conjunto $F(U)$ para cada aberto $U$ de $X$ e para quaisquer par de abertos não-vazios $U$, $V$ tais que $V \subseteq U$, temos uma função restrição $\varphi_{V,U} : F(U) \to F(V)$, tal que $\varphi_{U,U}$ é a função indentidade de $F(U)$ e $\varphi_{W,V} \circ \varphi_{V,U} = \varphi_{W,U}$.

Dessa forma um pré-feixe de conjuntos sobre o espaço $X$ nada mais é do que um funtor contravariante

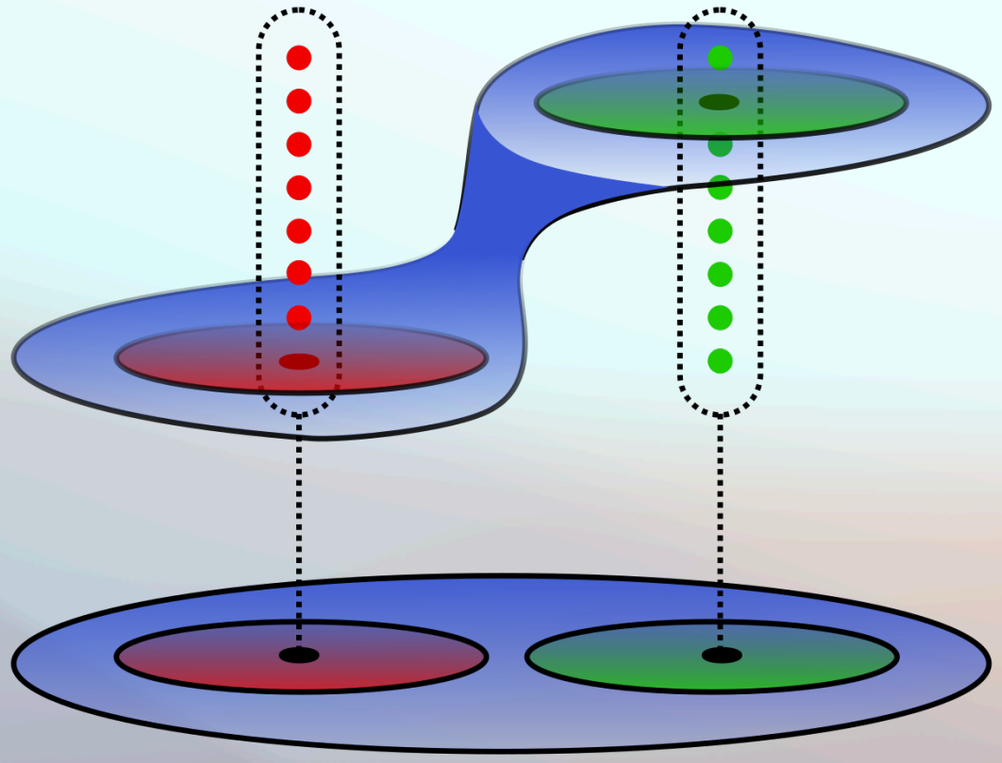
$$F : \mathcal{O}_X \to \mathbf{Set}$$

Onde, para $V \subseteq U$, denotamos $F_1[\mathcal{O}_X(V, U)] = \{\varphi_{V,U}\}$

# Feixes

Um **Feixe** é um pré-feixe $F : \mathcal{O}_X \to \mathbf{Set}$ tal que para qualquer corbertura aberta $(U_i)$ de um aberto $U$ de $X$ por conjuntos não-vazios e qualquer família $(f_i)$ de elementos de $F(U_i)$ tal que $\varphi_{U_{ij},U_i}(f_i) = \varphi_{U_{ij},U_j}(f_j)$, onde $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, existe um único $f \in F(U)$ tal que $\varphi_{U_i,U}(f) = f_i$.

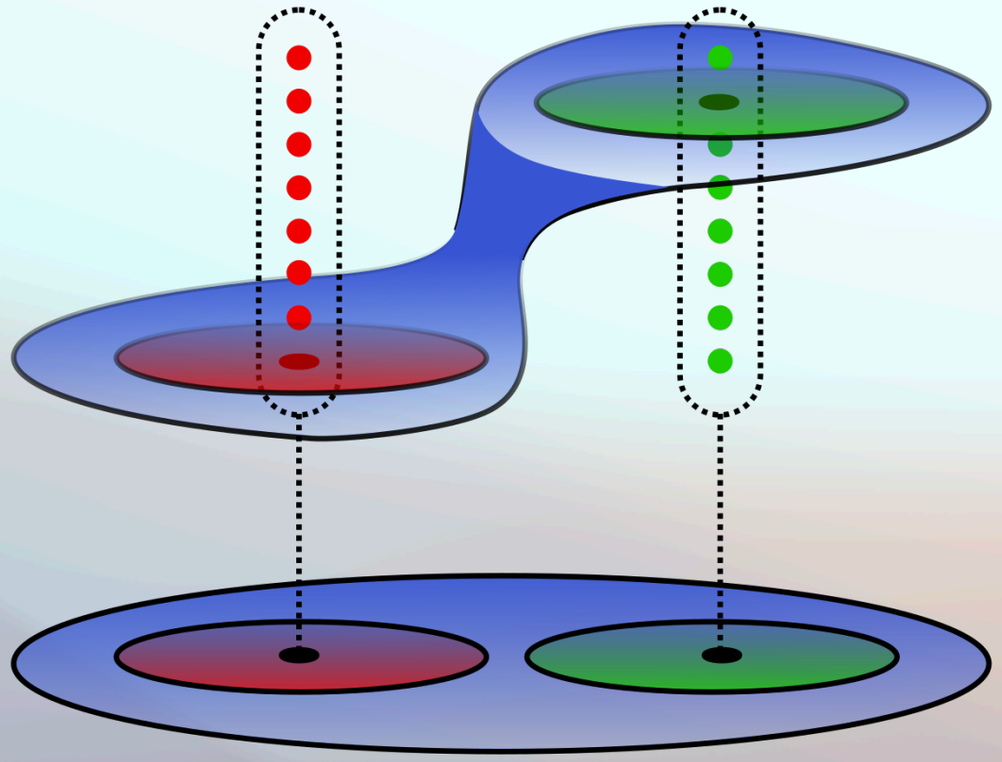
A propriedade acima chamamos de condição de feixe ou de colagem



# Feixes

Um **Feixe** é um pré-feixe $F : \mathcal{O}_X \to \mathbf{Set}$ tal que para qualquer corbertura aberta $(U_i)$ de um aberto $U$ de $X$ por conjuntos não-vazios e qualquer família $(f_i)$ de elementos de $F(U_i)$ tal que $\varphi_{U_{ij},U_i}(f_i) = \varphi_{U_{ij},U_j}(f_j)$, onde $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, existe um único $f \in F(U)$ tal que $\varphi_{U_i,U}(f) = f_i$.

A propriedade acima chamamos de condição de feixe ou de colagem



Como apresentar uma noção categorial de coberturas por abertos e da condição de colagem?

# Feixes sobre locale

A definição de feixes (pré-feixes) não depende dos pontos do espaço topológico e sim da estrutura algébrica dos abertos do espaço.

# Feixes sobre locale

A definição de feixes (pré-feixes) não depende dos pontos do espaço topológico e sim da estrutura algébrica dos abertos do espaço.

- Um **Locale** $\Omega$ é um reticulado completo onde joins arbitrários distribui sobre meets finitos, ou seja,

$$a \wedge (\bigvee_{i \in I} b_i) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i)$$

  onde $a$, $b_i$ são elementos de $\Omega$.

- A noção de locale é equivalente a uma álgebra de Heyting completa.

- Os abertos $Open(X)$ é um exemplo de locale.

- Todo locale pode ser visto como uma categoria onde dado $a, b \in \Omega$, $hom_{\Omega}(a, b)$ é um conjunto vazio ou unitário.

# Feixes sobre locale

Um pré-feixe sobre um locale $\Omega$ é um funtor contravariante $F : \Omega \to \mathbf{Set}$.

Dados $v \leq u$, denotaremos a imagem de um elemento $f \in F(u)$ pelo morfismo $\varphi_{v,u} : F(u) \to F(v)$ por

$$\varphi_{v,u}(f) = f|_v$$

# Feixes sobre locale

Um pré-feixe sobre um locale $\Omega$ é um funtor contravariante $F : \Omega \to \mathbf{Set}$.

Dados $v \leq u$, denotaremos a imagem de um elemento $f \in F(u)$ pelo morfismo $\varphi_{v,u} : F(u) \to F(v)$ por

$$\varphi_{v,u}(f) = f|_v$$

Seja $(u_i)_{i \in I}$ uma família de elementos de $\Omega$. Uma família de elementos $(f_i \in F(u_i))_{i \in I}$ é **compatível** em $F$ quando

$$\forall i, j \in I \;\; f_i|_{u_i \wedge u_j} = f_j|_{u_i \wedge u_i}$$

# Feixes sobre locale

Um pré-feixe sobre um locale $\Omega$ é um funtor contravariante $F : \Omega \to \mathbf{Set}$.

Dados $v \leq u$, denotaremos a imagem de um elemento $f \in F(u)$ pelo morfismo $\varphi_{v,u} : F(u) \to F(v)$ por

$$\varphi_{v,u}(f) = f|_v$$

Seja $(u_i)_{i \in I}$ uma família de elementos de $\Omega$. Uma família de elementos $(f_i \in F(u_i))_{i \in I}$ é **compatível** em $F$ quando

$$\forall i, j \in I \ f_i|_{u_i \wedge u_j} = f_j|_{u_i \wedge u_i}$$

Um **Feixe** sobre um locale $\Omega$ é um pré-feixe $F : \Omega \to \mathbf{Set}$ tal que se $u = \bigvee_{i \in I} u_i$ em $\Omega$ e $(f_i \in F(u_i))_{i \in I}$ família compatível em F, existe $f \in F(u)$ tal que para cada $i \in I$, $f|_{u_i} = f_i$.

O elemento $f$ é chamado de "colagem" da família $(f_i)_{i \in I}$.

# A categoria de feixes

Grothendieck mostra que a cohomologia de feixes consiste de um funtor da categoria de Feixes na categoria dos grupos abelianos.

(*Feixes possui uma importância secundária!*)

# A categoria de feixes

Grothendieck mostra que a cohomologia de feixes consiste de um funtor da categoria de Feixes na categoria dos grupos abelianos.

(*Feixes possui uma importância secundária!*)

Uma transformação natural de feixes (pré-feixes) $\alpha : F \Rightarrow G$ consiste de uma família de aplicações $(\alpha_u : F(u) \to F(u))_{u \in \Omega}$ tais que dados $v \leq u$, $\varphi^G_{vu} \circ \alpha_u = \alpha_v \circ \varphi^F_{vu}$.

# A categoria de feixes

Grothendieck mostra que a cohomologia de feixes consiste de um funtor da categoria de Feixes na categoria dos grupos abelianos.

(*Feixes possui uma importância secundária!*)

Uma transformação natural de feixes (pré-feixes) $\alpha : F \Rightarrow G$ consiste de uma família de aplicações $(\alpha_u : F(u) \to F(u))_{u \in \Omega}$ tais que dados $v \leq u$, $\varphi^G_{vu} \circ \alpha_u = \alpha_v \circ \varphi^F_{vu}$.

$$\begin{tikzcd}
F(u) \arrow[r, "\alpha_u"] \arrow[d, "\varphi^F_{vu}"'] & G(u) \arrow[d, "\varphi^G_{vu}"] \\
F(v) \arrow[r, "\alpha_v"'] & G(v)
\end{tikzcd}$$

# A categoria de feixes

Grothendieck mostra que a cohomologia de feixes consiste de um funtor da categoria de Feixes na categoria dos grupos abelianos.

(*Feixes possui uma importância secundária!*)

Uma transformação natural de feixes (pré-feixes) $\alpha : F \Rightarrow G$ consiste de uma família de aplicações $(\alpha_u : F(u) \to F(u))_{u \in \Omega}$ tais que dados $v \leq u$, $\varphi^G_{vu} \circ \alpha_u = \alpha_v \circ \varphi^F_{vu}$.

$$\begin{tikzcd}
F(u) \arrow[r, "\alpha_u"] \arrow[d, "\varphi^F_{vu}"'] & G(u) \arrow[d, "\varphi^G_{vu}"] \\
F(v) \arrow[r, "\alpha_v"'] & G(v)
\end{tikzcd}$$

Os objetos da categoria $\mathbf{Sh}_\Omega$ ($\mathbf{pSh}_\Omega$) de feixes (pre-feixes) são feixes (pré-feixes) e os morfismos são transformações naturais.

# Topologia e Topos de Grothendieck

Alguns poucos anos após o aclamado Tôhoku paper, Grothendieck observa que muitas propriedades de um espaço topológico pode ser naturalmente formulado como (invariante) propriedade da sua categoria de feixes (princípio local-global).

# Topologia e Topos de Grothendieck

Alguns poucos anos após o aclamado Tôhoku paper, Grothendieck observa que muitas propriedades de um espaço topológico pode ser naturalmente formulado como (invariante) propriedade da sua categoria de feixes (princípio local-global).

Nos *Séminaire de Géométrie Algébrique* (1960 - 1969), completamente motivado por problemas como as conjecturas de Weil, Grothendieck (Fields 1966) apresenta a noção de categoria de pre-feixes e feixes de forma completamente geral e categorial *(SGA4)* e introduz a noção que hoje é conhecida como a topologia de Grothendieck e a noção de Topos.

# Topologia e Topos de Grothendieck

Alguns poucos anos após o aclamado Tôhoku paper, Grothendieck observa que muitas propriedades de um espaço topológico pode ser naturalmente formulado como (invariante) propriedade da sua categoria de feixes (princípio local-global).

Nos *Séminaire de Géométrie Algébrique* (1960 - 1969), completamente motivado por problemas como as conjecturas de Weil, Grothendieck (Fields 1966) apresenta a noção de categoria de pre-feixes e feixes de forma completamente geral e categorial *(SGA4)* e introduz a noção que hoje é conhecida como a topologia de Grothendieck e a noção de Topos.

Os seminários juntou jovens brilhantes (Deligne, Demazure, Giraud, Girard, entre outros) e figurões da matemática francesa (Serre, Dieudonné, Chevalley).

# Funtor representável e subfuntores

Dado $u$ um elemento do locale $\Omega$, então o funtor $\Omega(-, u) : \Omega \to \mathbf{Set}$

$$\Omega(v, u) = \begin{cases} \{*\}, & se\ v \leq u \\ \emptyset, & se\ v \not\leq u \end{cases}$$

Define um pré-feixe sobre $\Omega$. Um funtor $F : \Omega \to \mathbf{Set}$ é dito ser representável se existe $u \in \Omega$ tal que $F = \Omega(-, u)$.

# Funtor representável e subfuntores

Dado $u$ um elemento do locale $\Omega$, então o funtor $\Omega(-, u) : \Omega \to \mathbf{Set}$

$$\Omega(v, u) = \begin{cases} \{*\}, & se\ v \leq u \\ \emptyset, & se\ v \not\leq u \end{cases}$$

Define um pré-feixe sobre $\Omega$. Um funtor $F : \Omega \to \mathbf{Set}$ é dito ser representável se existe $u \in \Omega$ tal que $F = \Omega(-, u)$.

Dado $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ funtor, $G : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ é um subfuntor de $F$ se

1. Para todo objeto $c$ de $\mathcal{C}$, $G(c) \subseteq F(c)$.
2. Dado $f : c \to c'$, $G(f) = F(f)|_{G(c)}$.

# Caracterização categorial de Colagem

Grothendieck prova que a condição de colagem pode ser categoricamente traduzida pelos subfuntores de funtores representáveis.

# Caracterização categorial de Colagem

Grothendieck prova que a condição de colagem pode ser categoricamente traduzida pelos subfuntores de funtores representáveis.

**Teorema:** Seja $\Omega$ um locale e $F$ um pré-feixe sobre $\Omega$. São equivalentes

1. F é um feixe sobre $\Omega$.
2. Dado $u \in \Omega$ e $G$ subfuntor de $\Omega(-, u)$. Toda transformação natural $G \Rightarrow F$ pode ser estendida unicamente para uma transformação natural $\Omega(-, u) \to F$.

# Caracterização categorial de Colagem

Grothendieck prova que a condição de colagem pode ser categoricamente traduzida pelos subfuntores de funtores representáveis.

**Teorema:** Seja $\Omega$ um locale e $F$ um pré-feixe sobre $\Omega$. São equivalentes

1. F é um feixe sobre $\Omega$.
2. Dado $u \in \Omega$ e $G$ subfuntor de $\Omega(-, u)$. Toda transformação natural $G \Rightarrow F$ pode ser estendida unicamente para uma transformação natural $\Omega(-, u) \to F$.

$$\begin{tikzcd}
\Omega(-, u) \arrow[r, Rightarrow] & F \\
G \arrow[u, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

# Categorização de Locale

**Teorema:** Seja $\Omega$ um reticulado. São equivalentes

1. $\Omega$ é um locale.
2. Para quaisquer $v \leq u$ e todo subfuntor $S$ de $\Omega(-, u)$, existe $R$ subfuntor de $\Omega(-, v)$ tal que o diagrama abaixo é um pullback.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& R \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \\
& \Omega(-, v) \arrow[r] & \Omega(-, u)
\end{tikzcd}$$

# Topologia de Grothendieck

Um **sistema de localização** de uma categoria $\mathcal{C}$ consiste em para cada objeto $c$ de $\mathcal{C}$, uma família $\mathcal{L}(c)$ de subfuntores de $\mathcal{C}(-, c)$ tal que, dado $f : d \to c$ $\mathcal{C}$-morfismo e $S \in \mathcal{L}(c)$, o diagrama abaixo é um pullback

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& R_f \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \\
& \mathcal{C}(-, d) \arrow[r] & \mathcal{C}(-, c)
\end{tikzcd}$$

# Topologia de Grothendieck

Um **sistema de localização** de uma categoria $\mathcal{C}$ consiste em para cada objeto $c$ de $\mathcal{C}$, uma família $\mathcal{L}(c)$ de subfuntores de $\mathcal{C}(-, c)$ tal que, dado $f : d \to c$ $\mathcal{C}$-morfismo e $S \in \mathcal{L}(c)$, o diagrama abaixo é um pullback

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& R_f \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \\
& \mathcal{C}(-, d) \arrow[r] & \mathcal{C}(-, c)
\end{tikzcd}$$

Uma **Topologia de Grothendieck** é um par $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ onde $\mathcal{L}$ é um sistema de localização da categoria $\mathcal{C}$.

# Topos de Grothendieck

Seja $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ uma topologia de Grothendieck.

1. Um pré-feixe sobre $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ é um funtor contravariante $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$
2. $F$ é um feixe se dado objeto $c$ de $\mathcal{C}$ e $R \in \mathcal{L}(c)$, toda transformação natural $\alpha : R \Rightarrow F$ se estende unicamente para $\mathcal{C}(-, c)$.

# Topos de Grothendieck

Seja $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ uma topologia de Grothendieck.

1. Um pré-feixe sobre $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ é um funtor contravariante $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$
2. $F$ é um feixe se dado objeto $c$ de $\mathcal{C}$ e $R \in \mathcal{L}(c)$, toda transformação natural $\alpha : R \Rightarrow F$ se estende unicamente para $\mathcal{C}(-, c)$.

Uma categoria $\mathcal{C}$ é um **topos de Grothendieck** se é equivalente a uma categoria de feixes sobre uma topologia de Grothendieck $\mathbf{Sh}_{(\mathcal{C},\mathcal{L})}$.

# Exemplos de topos de Grothendieck

- A categoria de Feixes ou pré-feixes sobre locale ou topologias de Grothendieck são exemplos de topos de Grothendieck.

# Exemplos de topos de Grothendieck

- A categoria de Feixes ou pré-feixes sobre locale ou topologias de Grothendieck são exemplos de topos de Grothendieck.

- Seja $G$ um grupo visto como categoria, ou seja, possui apenas um único objeto e os morfismos são os elementos do grupo. A composição é a operação de multiplicação do grupo $G$. Sendo assim a categoria de pré-feixes sobre $G$ é um topos de Grothendieck. Observe que a categoria de Feixes coincide com os $G$-sets.

# Exemplos de topos de Grothendieck

- A categoria de Feixes ou pré-feixes sobre locale ou topologias de Grothendieck são exemplos de topos de Grothendieck.

- Seja $G$ um grupo visto como categoria, ou seja, possui apenas um único objeto e os morfismos são os elementos do grupo. A composição é a operação de multiplicação do grupo $G$. Sendo assim a categoria de pré-feixes sobre $G$ é um topos de Grothendieck. Observe que a categoria de Feixes coincide com os $G$-sets.

- A categoria **Set** é um Topos de Grothendieck pois é equivalente a categoria $\mathbf{pSh}(\star)$

# Exemplos de topos de Grothendieck

- A categoria de Feixes ou pré-feixes sobre locale ou topologias de Grothendieck são exemplos de topos de Grothendieck.

- Seja $G$ um grupo visto como categoria, ou seja, possui apenas um único objeto e os morfismos são os elementos do grupo. A composição é a operação de multiplicação do grupo $G$. Sendo assim a categoria de pré-feixes sobre $G$ é um topos de Grothendieck. Observe que a categoria de Feixes coincide com os $G$-sets.

- A categoria **Set** é um Topos de Grothendieck pois é equivalente a categoria $\mathbf{pSh}(\star)$

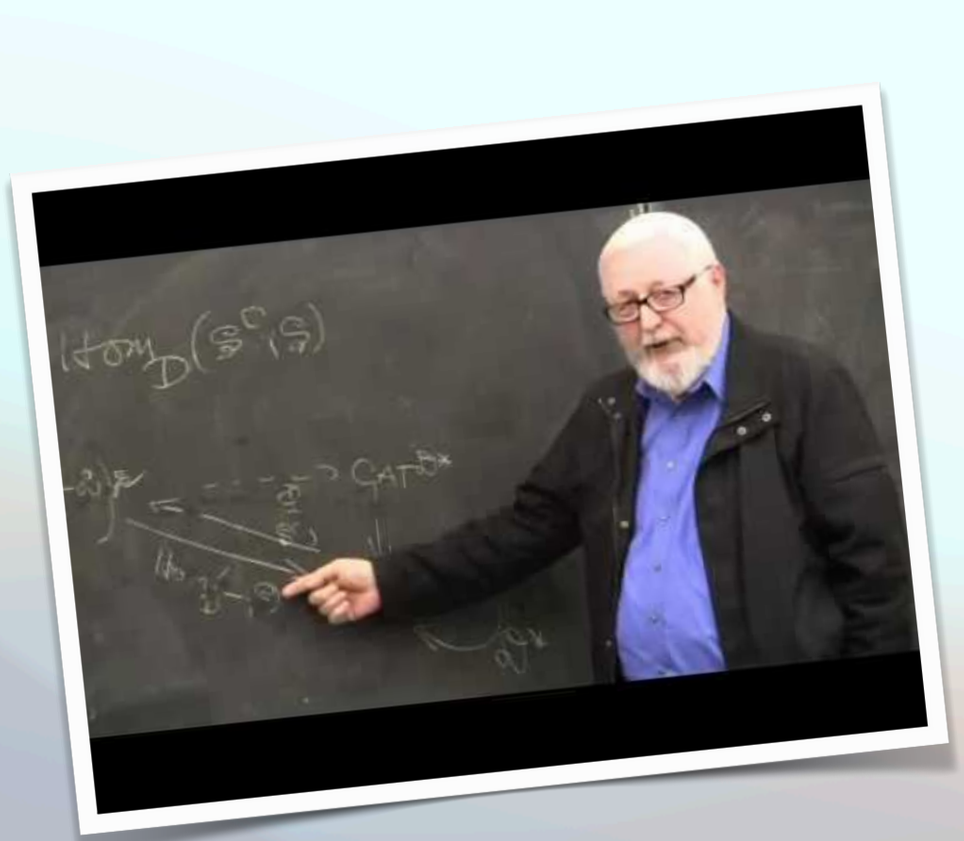
Onde está a lógica??

# Teorias de Lawvere

Como a categoria de conjuntos pode ser visto como um topos de Grothendieck, Lawvere prova que qualquer categoria de estruturas algébricas que são axiomatizada por equações é equivalente a um topos de Grothendieck.

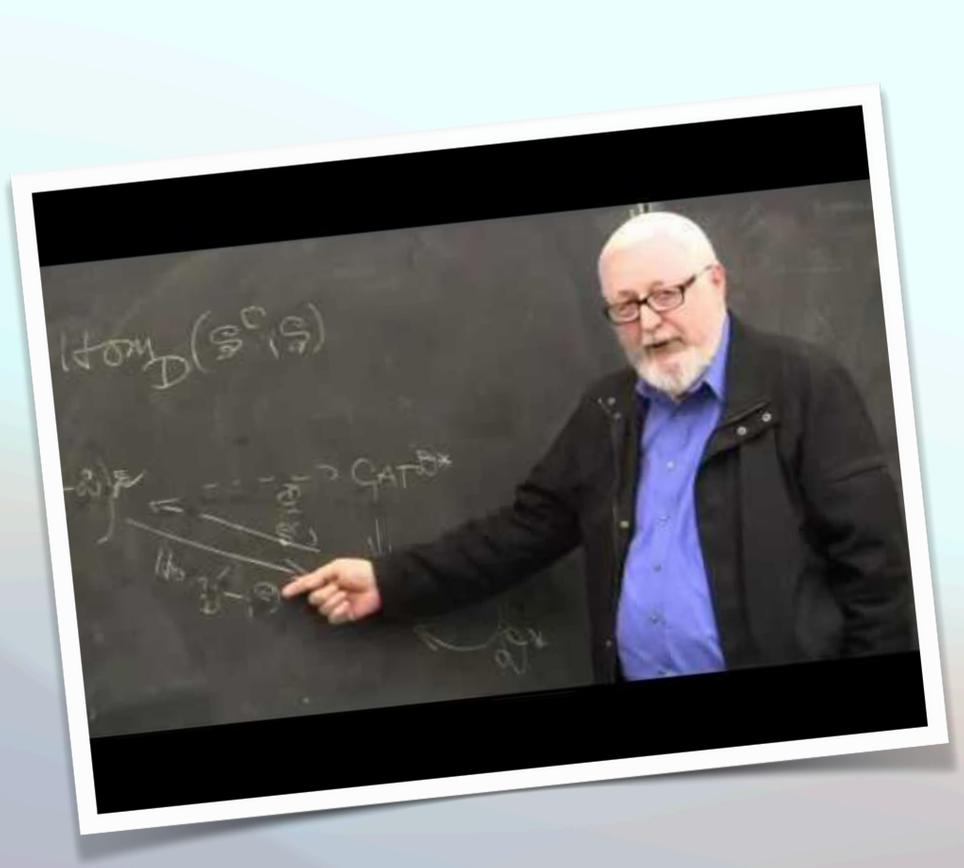
# Teorias de Lawvere

Como a categoria de conjuntos pode ser visto como um topos de Grothendieck, Lawvere prova que qualquer categoria de estruturas algébricas que são axiomatizada por equações é equivalente a um topos de Grothendieck.



# Teorias de Lawvere

Como a categoria de conjuntos pode ser visto como um topos de Grothendieck, Lawvere prova que qualquer categoria de estruturas algébricas que são axiomatizada por equações é equivalente a um topos de Grothendieck.



Basta obter uma categoria “esboço” da estrutura algébrica em que se deseja obter a equivalência da sua categoria com a categoria de feixes sobre a categoria “esboço”.

# Grupos como diagramas

Um grupo consiste de um conjunto $G$ possuindo uma operação binária $m : G \times G \to G$, uma operação unária $i : G \to G$ e uma constante $e \in G$, ou seja, uma operação de aridade zero $e : \{*\} \to G$ satisfazendo os seguintes axiomas equacionais

- $\forall x, y, z \; m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$ (associatividade)
- $\forall x \; m(x, e(*)) = x = m(e(*), x)$ (neutro)
- $\forall x \; m(x, i(x)) = e(*) = m(i(x), x)$ (inverso)

# Grupos como diagramas

Um grupo consiste de um conjunto $G$ possuindo uma operação binária $m : G \times G \to G$, uma operação unária $i : G \to G$ e uma constante $e \in G$, ou seja, uma operação de aridade zero $e : \{*\} \to G$ satisfazendo os seguintes axiomas equacionais

- $\boxed{\forall x, y, z \; m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z)) \text{ (associatividade)}}$
- $\forall x \; m(x, e(*)) = x = m(e(*), x)$ (neutro)
- $\forall x \; m(x, i(x)) = e(*) = m(i(x), x)$ (inverso)

# Grupos como diagramas

Um grupo consiste de um conjunto $G$ possuindo uma operação binária $m : G \times G \to G$, uma operação unária $i : G \to G$ e uma constante $e \in G$, ou seja, uma operação de aridade zero $e : \{*\} \to G$ satisfazendo os seguintes axiomas equacionais

- $\forall x, y, z \; m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$ (associatividade)
- $\forall x \; m(x, e(*)) = x = m(e(*), x)$ (neutro)
- $\forall x \; m(x, i(x)) = e(*) = m(i(x), x)$ (inverso)

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "1_G \times m"] \arrow[d, "m \times 1_G"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}$$

# Grupos como diagramas

Um grupo consiste de um conjunto $G$ possuindo uma operação binária $m : G \times G \to G$, uma operação unária $i : G \to G$ e uma constante $e \in G$, ou seja, uma operação de aridade zero $e : \{*\} \to G$ satisfazendo os seguintes axiomas equacionais

- $\forall x, y, z \; m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$ (associatividade)
- $\boxed{\forall x \; m(x, e(*)) = x = m(e(*), x) \text{ (neutro)}}$
- $\forall x \; m(x, i(x)) = e(*) = m(i(x), x)$ (inverso)

# Grupos como diagramas

Um grupo consiste de um conjunto $G$ possuindo uma operação binária $m : G \times G \to G$, uma operação unária $i : G \to G$ e uma constante $e \in G$, ou seja, uma operação de aridade zero $e : \{*\} \to G$ satisfazendo os seguintes axiomas equacionais

- $\forall x, y, z \; m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$ (associatividade)
- $\boxed{\forall x \; m(x, e(*)) = x = m(e(*), x) \text{ (neutro)}}$
- $\forall x \; m(x, i(x)) = e(*) = m(i(x), x)$ (inverso)

$$\begin{tikzcd}
G \times \{*\} \arrow[d, "1_G \times e"'] & & \{*\} \times G \arrow[d, "e \times 1_G"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G \arrow[ul, "\sim"'] \arrow[ur, "\sim"] & G \times G \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

# Grupos como diagramas

Um grupo consiste de um conjunto $G$ possuindo uma operação binária $m : G \times G \to G$, uma operação unária $i : G \to G$ e uma constante $e \in G$, ou seja, uma operação de aridade zero $e : \{*\} \to G$ satisfazendo os seguintes axiomas equacionais

- $\forall x, y, z \; m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$ (associatividade)
- $\forall x \; m(x, e(*)) = x = m(e(*), x)$ (neutro)
- $\forall x \; m(x, i(x)) = e(*) = m(i(x), x)$ (inverso)

# Grupos como diagramas

Um grupo consiste de um conjunto $G$ possuindo uma operação binária $m : G \times G \to G$, uma operação unária $i : G \to G$ e uma constante $e \in G$, ou seja, uma operação de aridade zero $e : \{*\} \to G$ satisfazendo os seguintes axiomas equacionais

- $\forall x, y, z \; m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$ (associatividade)
- $\forall x \; m(x, e(*)) = x = m(e(*), x)$ (neutro)
- $\forall x \; m(x, i(x)) = e(*) = m(i(x), x)$ (inverso)

$$
\begin{tikzcd}
 & \{*\} \arrow[dl, "e"'] & & G \arrow[ll, "!"'] \arrow[rr, "!"] \arrow[d, "\Delta"] & & \{*\} \arrow[dr, "e"] & \\
G & & & G \times G \arrow[dl, "i \times 1_G"] \arrow[dr, "1_G \times i"'] & & & G \\
 & & G \times G \arrow[ul, "m"] & & G \times G \arrow[ur, "m"'] & &
\end{tikzcd}
$$

# Teorias de Lawvere

Seja $\mathcal{C}$ categoria com produtos finitos e objeto terminal 1 (para cada objeto $c$ de $\mathcal{C}$, existe único morfismo $c \xrightarrow{!} 1$) com morfismos

- $m : g \times g \longrightarrow g$
- $i : g \longrightarrow g$
- $e : 1 \longrightarrow g$

Com os seguintes diagramas comuntando.

$$\begin{tikzcd}
g \times g \times g \arrow[r, "1_g \times m"] \arrow[d, "m \times 1_g"'] & g \times g \arrow[d, "m"] \\
g \times g \arrow[r, "m"'] & g
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[dr, "e"'] & & g \arrow[ll, "!"'] \arrow[rr, "!"] \arrow[d, "\Delta"] & & \{*\} \arrow[dl, "e"] \\
& g & g \times g \arrow[dl, "i \times 1_g"] \arrow[dr, "1_g \times i"'] & & \\
& g \times g \arrow[uul, "m"] & & g \times g \arrow[uur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
g \times \{*\} \arrow[d, "1_g \times e"'] & & \{*\} \times g \arrow[d, "e \times 1_g"] \\
g \times g \arrow[r, "m"'] & g \arrow[ul, "\sim"'] \arrow[ur, "\sim"] & g \times g \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

# Teorias de Lawvere

Dado um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ que preserva produto, $G = F(g)$ possui estrutura de grupo definido pelas funções obtidas pelos morfismos $m$, $i$ e $e$ e os diagramas comutativos.

# Teorias de Lawvere

Dado um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ que preserva produto, $G = F(g)$ possui estrutura de grupo definido pelas funções obtidas pelos morfismos $m$, $i$ e $e$ e os diagramas comutativos.

$\mathcal{C}$ é uma categoria pequena e portanto pode ser visto com estrutura de topologia de Grothendieck e $F$ como um pré-feixe sobre $\mathcal{C}$.

# Teorias de Lawvere

Dado um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ que preserva produto, $G = F(g)$ possui estrutura de grupo definido pelas funções obtidas pelos morfismos $m$, $i$ e $e$ e os diagramas comutativos.

$\mathcal{C}$ é uma categoria pequena e portanto pode ser visto com estrutura de topologia de Grothendieck e $F$ como um pré-feixe sobre $\mathcal{C}$.

A categoria de grupos **Grp** é equivalente categorialmente a uma categoria de pré-feixes e portanto um topos de Grothendieck.

# Teorias de Lawvere

Lawvere estende tal construção para toda teoria algébreica equacional (anéis, módulos, etc.) e prova que a categoria de modelos dessas teorias são topos de Grothendieck.

# Teorias de Lawvere

Lawvere estende tal construção para toda teoria algébreica equacional (anéis, módulos, etc.) e prova que a categoria de modelos dessas teorias são topos de Grothendieck.

Vai além! Define abstratamente o que é necessário em uuma categoria para que seus objetos sejam "modelos" de teorias algébricas equacionais. Chegando na noção de **Topos Elementar**.

# Teorias de Lawvere

Lawvere estende tal construção para toda teoria algébreica equacional (anéis, módulos, etc.) e prova que a categoria de modelos dessas teorias são topos de Grothendieck.

Vai além! Define abstratamente o que é necessário em uuma categoria para que seus objetos sejam "modelos" de teorias algébricas equacionais. Chegando na noção de **Topos Elementar**.

Vai ainda mais além! Mostra a internalização da própria lógica em um topos elementar.

# Lógica Categorial de Primeira Ordem

M. Makkai, G.E. Reyes

- Seja $\mathbb{T}_{Rings}$ a teoria de Lawvere para anéis. Assim temos que os feixes

$$M : \mathbb{T}_{Rings} \to \mathbf{Set}$$

é o topos de Grothendieck de **Rings**.

- Cada anel de **Rings** possui um sistema de localização (Atiyah-MacDonald). Assim **Rings** tem uma topologia de Grothendieck.

# Lógica Categorial de Primeira Ordem

M. Makkai, G.E. Reyes

- Seja $\mathbb{T}_{Rings}$ a teoria de Lawvere para anéis. Assim temos que os feixes

$$M : \mathbb{T}_{Rings} \to \mathbf{Set}$$

é o topos de Grothendieck de **Rings**.

- Seja $\mathbb{T}$ uma teoria de primeira ordem na linguam $\mathcal{L}$. Os funtores

$$M : \mathbb{T} \to \mathbf{Set}$$

é o topos de Grothendieck de $\mathbf{Mod}(\mathbb{T})$.

- Cada anel de **Rings** possui um sistema de localização (Atiyah-MacDonald). Assim **Rings** tem uma topologia de Grothendieck.

# Lógica Categorial de Primeira Ordem

M. Makkai, G.E. Reyes

- Seja $\mathbb{T}_{Rings}$ a teoria de Lawvere para anéis. Assim temos que os feixes

$$M : \mathbb{T}_{Rings} \to \mathbf{Set}$$

é o topos de Grothendieck de **Rings**.

- Seja $\mathbb{T}$ uma teoria de primeira ordem na linguam $\mathcal{L}$. Os funtores

$$M : \mathbb{T} \to \mathbf{Set}$$

é o topos de Grothendieck de $\mathbf{Mod}(\mathbb{T})$.

- Cada anel de **Rings** possui um sistema de localização (Atiyah-MacDonald). Assim **Rings** tem uma topologia de Grothendieck.

- Sistema de Localização para cada modelo em $\mathbf{Mod}(\mathbb{T})$. Assim possuindo uma topologia de Grothendieck.

# Lógica Categorial de Primeira Ordem

## Variedade algébrica

# Lógica Categorial de Primeira Ordem

## Variedade algébrica

## Fórmulas satisfatíveis

# Lógica Categorial de Primeira Ordem

## Variedade algébrica

Sejam $p_1, \ldots, p_n$ polinômios com coef. inteiros. Considere o funtor

$$S : \mathbf{Rings} \to \mathbf{Set}$$

definido nos objetos como

$$S(A) = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A^n : \ \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \textit{ é raiz de } p_1, \ldots, p_n \textit{ em } A\}$$

## Fórmulas satisfatíveis

# Lógica Categorial de Primeira Ordem

## Variedade algébrica

Sejam $p_1, \ldots, p_n$ polinômios com coef. inteiros. Considere o funtor

$$S : \mathbf{Rings} \to \mathbf{Set}$$

definido nos objetos como

$$S(A) = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A^n : \ \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \textit{ é raiz de } p_1, \ldots, p_n \textit{ em } A\}$$

## Fórmulas satisfatíveis

Seja $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ fórmula (coerente) nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Considere o funtor

$$S : \mathbf{Mod}(\mathbb{T}) \to \mathbf{Set}$$

definido nos objetos como

$$S_\varphi(A) = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A^n : \ A \models \varphi^A(a_1, \ldots, a_n)\}$$

# Referências


[**Bor1**] F. Borceux; *Handbook of Categorical Algebra 2: Categories and Structure*, Cambridge University Press 1994.

[**Bor2**] F. Borceux; *Handbook of Categorical Algebra 3: Categories and Sheaves*, Cambridge University Press 1994.

[**Car**] O. Caramelo; *Theories, Sites, Toposes: Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic "bridges"* , Oxford University Press 2018.

[**Kro**] R. Krömer; *Tool and Object: A History and Philosophy of Category Theory*, Birkhäuser Basel 2007.

[**MR**] M. Makkai, G. E. Reyes, *First Order Categorical Logic: Model-Theoretical Methods in the Theory of Topoi and Related Category*, Springer-Verlang 1977.

[**Zam**] F. Zalamea; *Grothendieck: Una guia a la obra matemática e filosófica*, Universidad Nacional de Colombia 2019.

Obrigado!