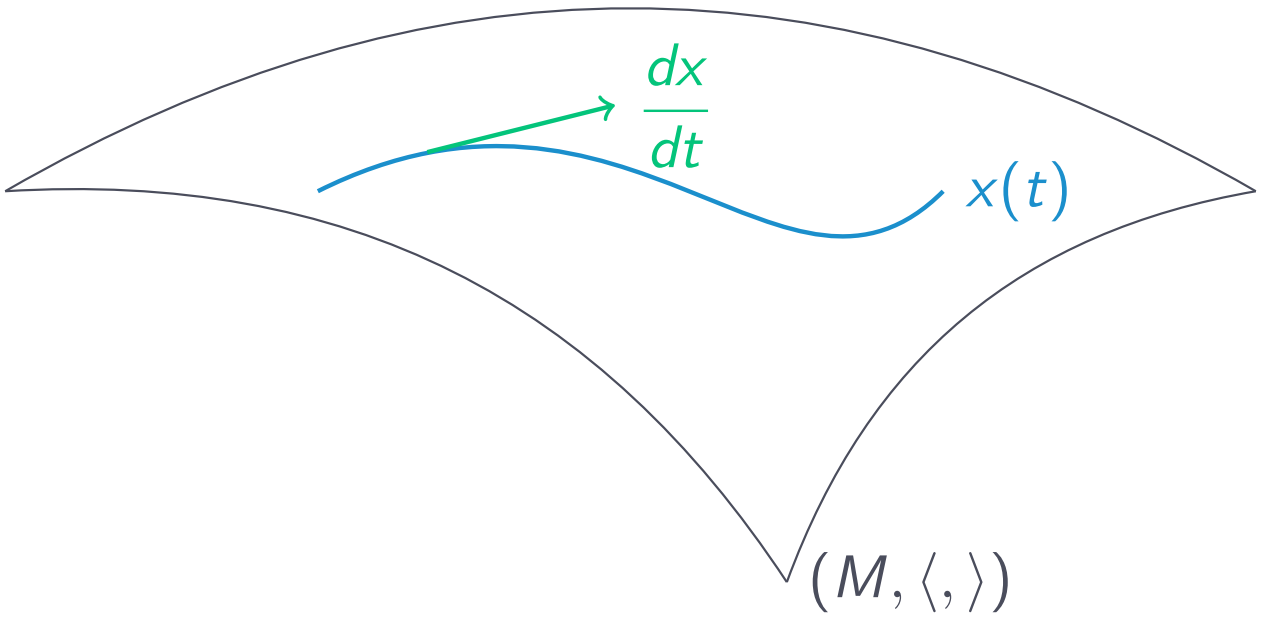
Fundamentos de Geometria Finsler

Benigno Oliveira Alves e Patrícia Marçal

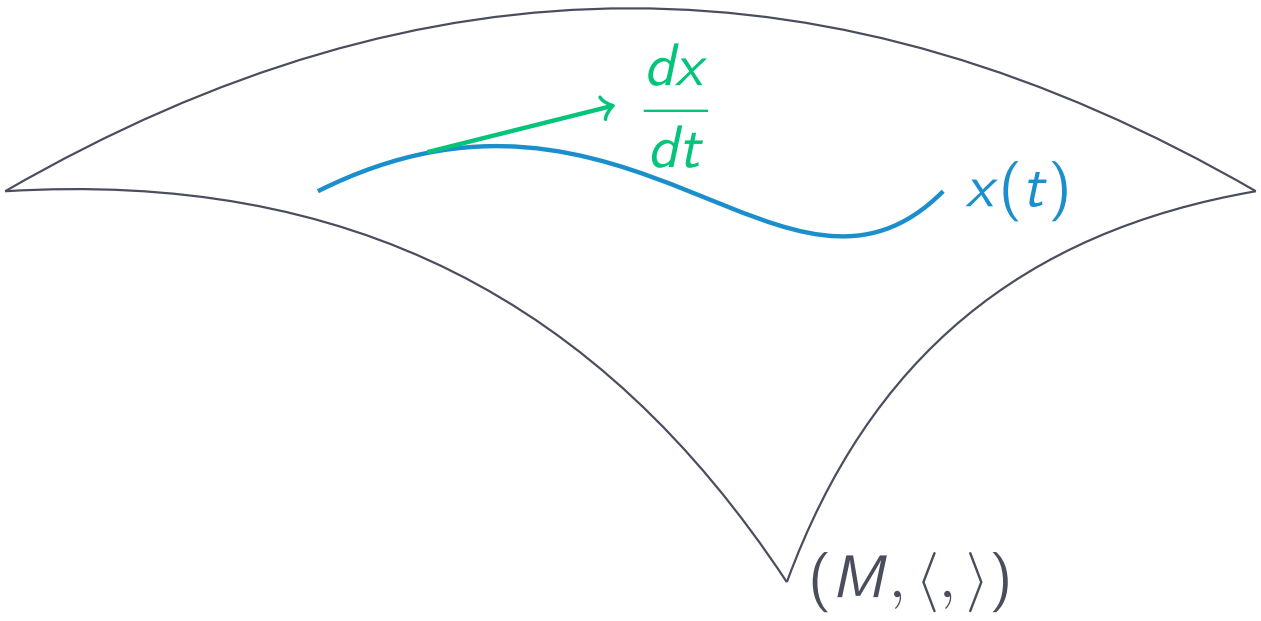
VIII EPGMAT

20 de Novembro de 2023.

Comprimento de arco



Comprimento de arco



$$\ell(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{dx}{dt} \right\| dt$$

Espaço métrico

Positividade: $\|y\| \geq 0$; $\|y\| > 0$, a menos que $y = 0$.

Espaço métrico

Positividade: $\|y\| \geq 0$; $\|y\| > 0$, a menos que $y = 0$.

Homogeneidade: $\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Espaço métrico

Positividade: $\|y\| \geq 0$; $\|y\| > 0$, a menos que $y = 0$.

Homogeneidade: $\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Em particular, temos reversibilidade: $\|y\| = \|-y\|$.

Espaço métrico

Positividade: $\|y\| \geq 0$; $\|y\| > 0$, a menos que $y = 0$.

Homogeneidade: $\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Em particular, temos reversibilidade: $\|y\| = \|-y\|$.

Desigualdade triangular: $\|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|$.

Espaço métrico

Positividade: $\|y\| \geq 0$; $\|y\| > 0$, a menos que $y = 0$.

Homogeneidade: $\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Em particular, temos reversibilidade: $\|y\| = \|-y\|$.

Desigualdade triangular: $\|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|$.

$$d(p, q) = \inf_{x(t)} \ell(x),$$

onde $x(t)$ é diferenciável por partes, com $x(t_0) = p$ e $x(t_1) = q$.

Espaço métrico

Positividade: $\|y\| \geq 0$; $\|y\| > 0$, a menos que $y = 0$.

Homogeneidade: $\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Em particular, temos reversibilidade: $\|y\| = \|-y\|$.

Desigualdade triangular: $\|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|$.

$$d(p, q) = \inf_{x(t)} \ell(x),$$

onde $x(t)$ é diferenciável por partes, com $x(t_0) = p$ e $x(t_1) = q$.

(M, d) é um espaço métrico.

Espaço métrico

Positividade: $\|y\| \geq 0$; $\|y\| > 0$, a menos que $y = 0$.

Homogeneidade: $\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Em particular, temos reversibilidade: $\|y\| = \|-y\|$.

Desigualdade triangular: $\|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|$.

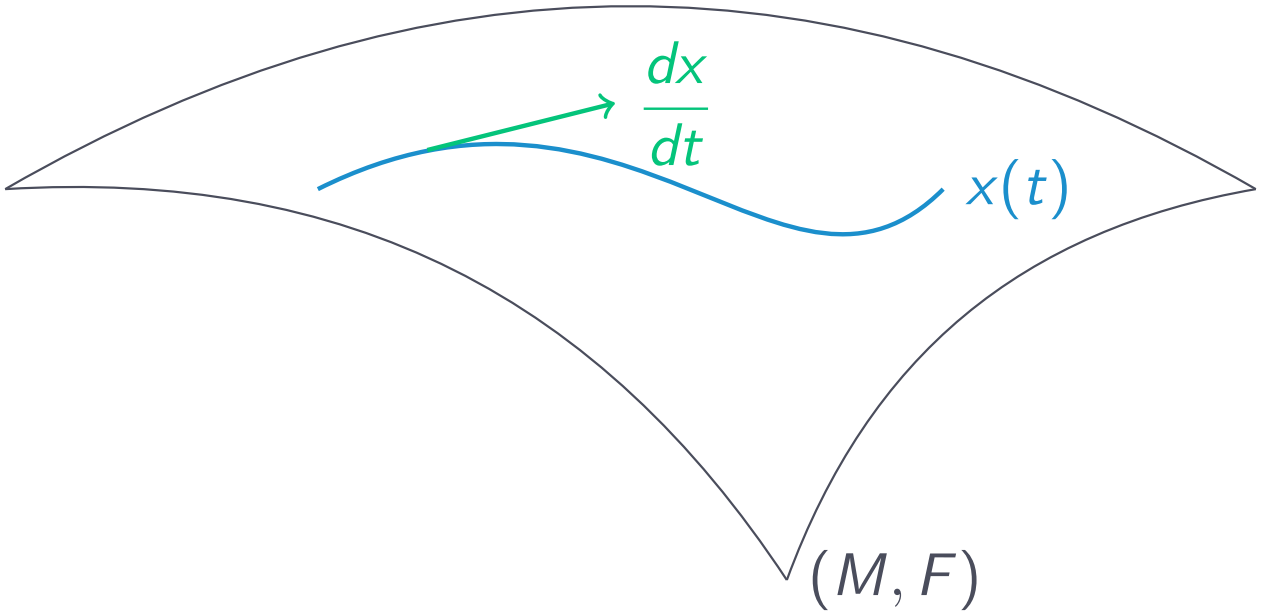
$$d(p, q) = \inf_{x(t)} \ell(x),$$

onde $x(t)$ é diferenciável por partes, com $x(t_0) = p$ e $x(t_1) = q$.

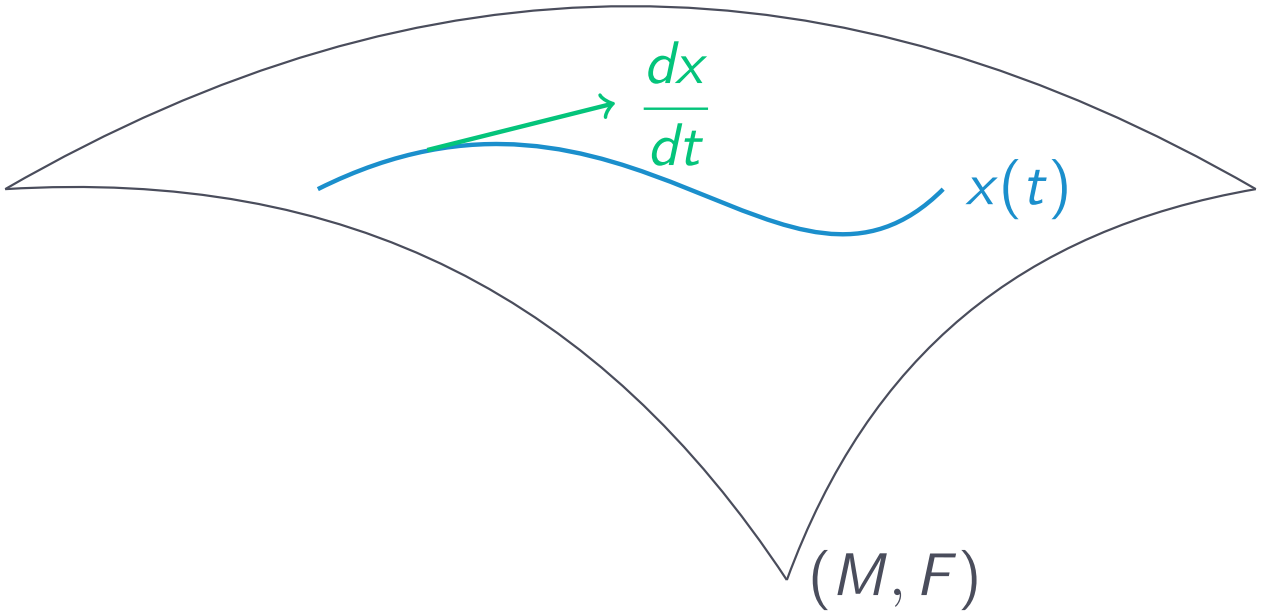
(M, d) é um espaço métrico.

⚠ Para um mapa de ruas, não podem existir ruas de mão única.

Comprimento de arco em espaços gerais



Comprimento de arco em espaços gerais



$$s = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt$$

Comprimento de arco em espaços gerais

a) Para que o comprimento de arco esteja bem-definido:

Comprimento de arco em espaços gerais

a) Para que o comprimento de arco esteja bem-definido:

$F(x, y) \geq 0$; $F(x, y) > 0$, a menos que $y = 0$.

Comprimento de arco em espaços gerais

a) Para que o comprimento de arco esteja bem-definido:

$F(x, y) \geq 0$; $F(x, y) > 0$, a menos que $y = 0$.

b) Para que o comprimento de arco independa da parametrização orientada:

Comprimento de arco em espaços gerais

a) Para que o comprimento de arco esteja bem-definido:

$F(x, y) \geq 0$; $F(x, y) > 0$, a menos que $y = 0$.

b) Para que o comprimento de arco independa da parametrização orientada:

$F(x, y)$ deve ser positiva-homogênea de grau 1 em y,

Comprimento de arco em espaços gerais

a) Para que o comprimento de arco esteja bem-definido:

$F(x, y) \geq 0$; $F(x, y) > 0$, a menos que $y = 0$.

b) Para que o comprimento de arco independa da parametrização orientada:

$F(x, y)$ deve ser positiva-homogênea de grau 1 em y, i.e.

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \ \lambda > 0.$$

Comprimento de arco em espaços gerais

a) Para que o comprimento de arco esteja bem-definido:

$F(x, y) \geq 0$; $F(x, y) > 0$, a menos que $y = 0$.

b) Para que o comprimento de arco independa da parametrização orientada:

$F(x, y)$ deve ser positiva-homogênea de grau 1 em y, i.e.

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \ \lambda > 0.$$

⚠ Não necessariamente reversível.

Comprimento de arco em espaços gerais

a) Para que o comprimento de arco esteja bem-definido:

$F(x, y) \geq 0$; $F(x, y) > 0$, a menos que $y = 0$.

b) Para que o comprimento de arco independa da parametrização orientada:

$F(x, y)$ deve ser positiva-homogênea de grau 1 em y, i.e.

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \ \lambda > 0.$$

⚠ Não necessariamente reversível.

c) Para a existência local de curvas que minimizam o comprimento de arco:

Comprimento de arco em espaços gerais

a) Para que o comprimento de arco esteja bem-definido:

$F(x, y) \geq 0$; $F(x, y) > 0$, a menos que $y = 0$.

b) Para que o comprimento de arco independa da parametrização orientada:

$F(x, y)$ deve ser positiva-homogênea de grau 1 em y, i.e.

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \ \lambda > 0.$$

⚠ Não necessariamente reversível.

c) Para a existência local de curvas que minimizam o comprimento de arco:

$F(x, y)$ deve ser fortemente convexa.

Definição

Suponha M uma variedade.

Definição

Suponha M uma variedade.

Uma função contínua $F : TM \to [0, \infty)$ é uma métrica Finsler se:

Definição

Suponha M uma variedade.

Uma função contínua $F : TM \to [0, \infty)$ é uma métrica Finsler se:

i) F é suave em $TM \setminus 0$;

Definição

Suponha M uma variedade.

Uma função contínua $F : TM \to [0, \infty)$ é uma métrica Finsler se:

i) F é suave em $TM \setminus 0$;

ii) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, para todo $(x, y) \in TM$ e $\lambda > 0$;

Definição

Suponha M uma variedade.

Uma função contínua $F : TM \to [0, \infty)$ é uma métrica Finsler se:

i) F é suave em $TM \setminus 0$;

ii) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, para todo $(x, y) \in TM$ e $\lambda > 0$;

iii) para cada $(x, y) \in TM \setminus 0$, a forma bilinear e simétrica

$$g_y(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(x, y + tu + sv)\Big|_{t=s=0}, \forall u, v \in T_x M,$$

é positiva-definida, chamada forma fundamental.

Definição

Suponha M uma variedade.

Uma função contínua $F : TM \to [0, \infty)$ é uma métrica Finsler se:

i) F é suave em $TM \setminus 0$;

ii) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, para todo $(x, y) \in TM$ e $\lambda > 0$;

iii) para cada $(x, y) \in TM \setminus 0$, a forma bilinear e simétrica

$$g_y(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(x, y + tu + sv)\Big|_{t=s=0}, \forall u, v \in T_x M,$$

é positiva-definida, chamada forma fundamental.

Para cada $p \in M$, $F|_{T_pM}$ é uma norma de Minkowski.

Definição

Suponha M uma variedade.

Uma função contínua $F : TM \to [0, \infty)$ é uma métrica Finsler se:

i) F é suave em $TM \setminus 0$;

ii) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, para todo $(x, y) \in TM$ e $\lambda > 0$;

iii) para cada $(x, y) \in TM \setminus 0$, a forma bilinear e simétrica

$$g_y(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(x, y + tu + sv)\Big|_{t=s=0}, \forall u, v \in T_x M,$$

é positiva-definida, chamada forma fundamental.

Para cada $p \in M$, $F|_{T_pM}$ é uma norma de Minkowski.

☑ ii) $\iff$ b).

Forma fundamental

Considere coordenadas locais (x^i, y^i), $i = 1, \ldots, n$.

Forma fundamental

Considere coordenadas locais (x^i, y^i), $i = 1, \ldots, n$.

$$
\begin{aligned}
g_y(u,v) &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[\frac{1}{2}F^2(x, y + su + tv)\right]\Bigg|_{s=t=0} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\left[\frac{1}{2}F^2(x^k, y^k)\right] u^i v^j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x^k, y^k) u^i v^j
\end{aligned}
$$

Forma fundamental

Considere coordenadas locais (x^i, y^i), $i = 1, \ldots, n$.

$$
\begin{aligned}
g_y(u, v) &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[\frac{1}{2} F^2(x, y + su + tv) \right] \Big|_{s=t=0} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} \left[\frac{1}{2} F^2(x^k, y^k) \right] u^i v^j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x^k, y^k) u^i v^j
\end{aligned}
$$

A matriz Hessiana (g_{ij}) é positiva-definida em cada ponto de $TM \backslash 0$.

Forma fundamental

Considere coordenadas locais (x^i, y^i), $i = 1, \ldots, n$.

$$
\begin{aligned}
g_y(u,v) &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[\frac{1}{2}F^2(x, y + su + tv)\right]\Bigg|_{s=t=0} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\left[\frac{1}{2}F^2(x^k, y^k)\right] u^i v^j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x^k, y^k) u^i v^j
\end{aligned}
$$

A matriz Hessiana (g_{ij}) é positiva-definida em cada ponto de $TM \backslash 0$.

☑ i), iii) $\Rightarrow$ c).

Forma fundamental

Considere coordenadas locais (x^i, y^i), $i = 1, \ldots, n$.

$$
\begin{aligned}
g_y(u, v) &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[\frac{1}{2} F^2(x, y + su + tv) \right] \Bigg|_{s=t=0} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} \left[\frac{1}{2} F^2(x^k, y^k) \right] u^i v^j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x^k, y^k) u^i v^j
\end{aligned}
$$

A matriz Hessiana (g_{ij}) é positiva-definida em cada ponto de $TM \setminus 0$.

☑ i), iii) $\Rightarrow$ c).

⚠ Precisamos verificar positividade e desigualdade triangular.

Teorema de Euler para funções homogêneas

Teorema: Suponha que $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável fora da origem. Então, são equivalentes:

Teorema de Euler para funções homogêneas

Teorema: Suponha que $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável fora da origem. Então, são equivalentes:

- H é positiva-homogênea de grau r, i.e. $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$, $\forall \lambda > 0$.

Teorema de Euler para funções homogêneas

Teorema: Suponha que $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável fora da origem. Então, são equivalentes:

- H é positiva-homogênea de grau r, i.e. $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$, $\forall \lambda > 0$.
- A derivada direcional radial de H é r vezes H, i.e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y^i}(y)\, y^i = rH(y)$.

Teorema de Euler para funções homogêneas

Teorema: Suponha que $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável fora da origem. Então, são equivalentes:

- H é positiva-homogênea de grau r, i.e. $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$, $\forall \lambda > 0$.
- A derivada direcional radial de H é r vezes H, i.e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y^i}(y)\, y^i = rH(y)$.

Demonstração.

Teorema de Euler aplicado a métricas Finsler

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(y)}{\partial y^i} y^i = F(y) \tag{1}$$

Teorema de Euler aplicado a métricas Finsler

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(y)}{\partial y^i} y^i = F(y) \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(y)}{\partial y^i \partial y^j} y^j = 0 \tag{2}$$

Teorema de Euler aplicado a métricas Finsler

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(y)}{\partial y^i} y^i = F(y) \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(y)}{\partial y^i \partial y^j} y^j = 0 \tag{2}$$

$$g_y(y, y) = F^2(y) \tag{3}$$

Teorema de Euler aplicado a métricas Finsler

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(y)}{\partial y^i} y^i = F(y) \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(y)}{\partial y^i \partial y^j} y^j = 0 \tag{2}$$

$$g_y(y, y) = F^2(y) \tag{3}$$

Daqui em diante, deixamos a dependência de F com respeito a x implícita para simplificar a notação.

Positividade

Proposição: $F(y) > 0$ sempre que $y \neq 0$.

Positividade

Proposição: $F(y) > 0$ sempre que $y \neq 0$.

Demonstração.

Positividade

Proposição: $F(y) > 0$ sempre que $y \neq 0$.

Demonstração.

☑

Desigualdade fundamental

Lema: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y^i}(y) w^i \leq F(w)$ para todo $y \neq 0$, e a igualdade vale se, e somente se, $w = \lambda y$ para algum $\lambda \geq 0$.

Desigualdade fundamental

Lema: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y^i}(y) w^i \leq F(w)$ para todo $y \neq 0$, e a igualdade vale se, e somente se, $w = \lambda y$ para algum $\lambda \geq 0$.

Demonstração.

Desigualdade fundamental

Lema: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y^i}(y) w^i \leq F(w)$ para todo $y \neq 0$, e a igualdade vale se, e somente se, $w = \lambda y$ para algum $\lambda \geq 0$.

Demonstração.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz para g_v:

$$[g_v(u_1, u_2)]^2 \leq g_v(u_1, u_1) g_v(u_2, u_2), \tag{4}$$

onde vale igualdade se, e só se, u_1 e u_2 são colineares.

Desigualdade fundamental

Lema: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y^i}(y) w^i \leq F(w)$ para todo $y \neq 0$, e a igualdade vale se, e somente se, $w = \lambda y$ para algum $\lambda \geq 0$.

Demonstração.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz para g_v:

$$[g_v(u_1, u_2)]^2 \leq g_v(u_1, u_1) g_v(u_2, u_2), \tag{4}$$

onde vale igualdade se, e só se, u_1 e u_2 são colineares.

A desigualdade fundamental pode ser interpretada como uma extensão do Teorema de Euler para uma desigualdade, pois aplicada a $w = \lambda y$ com $\lambda > 0$ resulta em (1).

Desigualdade triangular

Proposição: $F(y_1 + y_2) \leq F(y_1) + F(y_2)$ e vale igualdade se, e somente se, $y_2 = \lambda y_1$ ou $y_1 = \lambda y_2$ para algum $\lambda \geq 0$.

Desigualdade triangular

Proposição: $F(y_1 + y_2) \leq F(y_1) + F(y_2)$ e vale igualdade se, e somente se, $y_2 = \lambda y_1$ ou $y_1 = \lambda y_2$ para algum $\lambda \geq 0$.

Demonstração.

Desigualdade triangular

Proposição: $F(y_1 + y_2) \leq F(y_1) + F(y_2)$ e vale igualdade se, e somente se, $y_2 = \lambda y_1$ ou $y_1 = \lambda y_2$ para algum $\lambda \geq 0$.

Demonstração.

☑

Espaço quase-métrico

Positividade: $F(y) \geq 0$; $F(y) > 0$, a menos que $y = 0$.

Espaço quase-métrico

Positividade: $F(y) \geq 0$; $F(y) > 0$, a menos que $y = 0$.

Homogeneidade positiva: $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, $\lambda > 0$.

Espaço quase-métrico

Positividade: $F(y) \geq 0$; $F(y) > 0$, a menos que $y = 0$.

Homogeneidade positiva: $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, $\lambda > 0$.

Desigualdade triangular: $F(y_1 + y_2) \leq F(y_1) + F(y_2)$.

Espaço quase-métrico

Positividade: $F(y) \geq 0$; $F(y) > 0$, a menos que $y = 0$.

Homogeneidade positiva: $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, $\lambda > 0$.

Desigualdade triangular: $F(y_1 + y_2) \leq F(y_1) + F(y_2)$.

$$d(p, q) = \inf_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt,$$

onde $x(t)$ é diferenciável por partes, com $x(t_0) = p$ e $x(t_1) = q$.

Espaço quase-métrico

Positividade: $F(y) \geq 0$; $F(y) > 0$, a menos que $y = 0$.

Homogeneidade positiva: $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, $\lambda > 0$.

Desigualdade triangular: $F(y_1 + y_2) \leq F(y_1) + F(y_2)$.

$$d(p, q) = \inf_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt,$$

onde $x(t)$ é diferenciável por partes, com $x(t_0) = p$ e $x(t_1) = q$.

(M, d) é um espaço quase-métrico.

Espaço quase-métrico

Positividade: $F(y) \geq 0$; $F(y) > 0$, a menos que $y = 0$.

Homogeneidade positiva: $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, $\lambda > 0$.

Desigualdade triangular: $F(y_1 + y_2) \leq F(y_1) + F(y_2)$.

$$d(p, q) = \inf_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt,$$

onde $x(t)$ é diferenciável por partes, com $x(t_0) = p$ e $x(t_1) = q$.

(M, d) é um espaço quase-métrico.

Podemos considerar um mapa de ruas, com ruas de mão única.

Generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz

Proposição: $[g_y(w,y)]^2 \leq g_w(w,w)g_y(y,y)$,

Generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz

Proposição: $[g_y(w,y)]^2 \leq g_w(w,w)g_y(y,y)$, i.e.

$$g_y(w,y) \leq F(w)F(y).$$

Generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz

Proposição: $[g_y(w,y)]^2 \leq g_w(w,w)g_y(y,y)$, i.e.

$$g_y(w,y) \leq F(w)F(y).$$

Demonstração.

Generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz

Proposição: $[g_y(w,y)]^2 \leq g_w(w,w)g_y(y,y)$, i.e.

$$g_y(w,y) \leq F(w)F(y).$$

Demonstração.

Esta desigualdade não é a mesma que (4). Ela é considerada uma generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz de produtos internos para normas de Minkowski.

Generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz

Proposição: $[g_y(w,y)]^2 \leq g_w(w,w)g_y(y,y)$, i.e.

$$g_y(w,y) \leq F(w)F(y).$$

Demonstração.

Esta desigualdade não é a mesma que (4). Ela é considerada uma generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz de produtos internos para normas de Minkowski.

O objeto formal $\sum_{i,j} g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j$ não define um produto interno em cada T_xM, por causa da dependência em $y \neq 0$.

Torção de Cartan

$$
\begin{aligned}
C_y(u,v,w) &= \frac{\partial^3}{\partial r \partial s \partial t}\left[\frac{1}{4}F^2(y+ru+sv+tw)\right]\Bigg|_{r=s=t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}g_{y+tw}(u,v)\right]\Bigg|_{t=0}
\end{aligned}
$$

Torção de Cartan

$$
\begin{aligned}
C_y(u,v,w) &= \frac{\partial^3}{\partial r \partial s \partial t}\left[\frac{1}{4}F^2(y+ru+sv+tw)\right]\Bigg|_{r=s=t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}g_{y+tw}(u,v)\right]\Bigg|_{t=0}
\end{aligned}
$$

Q Uma métrica Finsler é Riemanniana se, e somente se, o tensor de Cartan se anula

Obrigado!