VIII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
20 a 24 de novembro de 2023

Universalidade e infinitas cópias do conjunto de Mandelbrot dentro dele mesmo

Dely Silva*

Abstract

Consideremos a família quadrática $f_c(z) = z^2 + c$, à qual está associada o conjunto de Mandelbrot $\mathcal{M}$, que consiste de todos os parâmetros c para os quais a órbita futura do ponto crítico fica presa numa bola fechada.

Mostraremos, através de experimentos computacionais, que em qualquer vizinhança infinitesimal da fronteira do conjunto de Mandelbrot, podemos encontrar infinitas cópias do conjunto de Mandelbrot. A matemática por trás deste resultado exige conceitos avançados de Dinâmica Complexa, como renormalização. Neste poster, apresentaremos apenas a parte experimental, com algoritmos na linguagem Python.

References

[1] Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. Tan Lei. *Communications in Mathematical Physics*, 1990.

Tipo de Apresentação:
Poster

*e-mail: `delysilva@ufba.br`

VIII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
20 a 24 de novembro de 2023

Entropia Relativa e Teorema Central do Limite

Eldon Barros dos Reis Júnior *

Abstract

O estudo dos métodos teóricos da entropia em relação ao Teorema Central do Limite remonta a 1959, quando Linnik propôs essa investigação no artigo seminal [Linnik]. Embora tenha demonstrado a convergência fraca, Linnik deixou espaço para uma compreensão mais aprofundada desse fenômeno. Em 1986, Barron contribuiu significativamente para essa área ao apresentar uma prova completa do Teorema Central do Limite para variáveis aleatórias com densidades, incorporando conceitos da Teoria da Informação em seu trabalho, conforme documentado em [Barron]. A relação entre entropia e o Teorema Central do Limite é intrigante, uma vez que a distribuição gaussiana é aquela que maximiza a entropia, desde que a variança seja limitada. Como resultado, podemos reformular o Teorema Central do Limite, estabelecendo que a entropia da convolução de variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) converge para seu valor máximo. Esse fenômeno é conhecido como convergência em entropia relativa ou convergência em distância de Kullback-Leibler. Vale destacar que a convergência no sentido de entropia relativa é um resultado forte, e Barron conseguiu alcançá-lo de maneira natural, mesmo sob condições relativamente fracas. Mais recentemente, em 2021, Gavalakis e Kontoyiannis expandiram essa compreensão, demonstrando um análogo discreto do Teorema Central do Limite no contexto da entropia relativa para variáveis aleatórias sitiadas, como documentado em [GK].

References

[Barron] Barron, A. R., *Entropy and Central Limit Theorem*, The Annals of Probability , p. 336-342, (1986).

[GK] Gavalakis, L., Kontoyiannis, L., *Entropy and The Discrete Central Limit Theorem* , arXiv preprint arXiv:2106.00514, (2021).

[Johnson] Johnson, O., *Information Theory and The Central limit Theorem* , World Scientific, (2004).

[Linnik] Linnik, Yu. V., *An Information-theoretic Proof of the Central Limit Theorem with the Lindeberg Condition* , Theory Probab. Appl. 4 288-299, (1959).

[RF] Riba, J., De Cabrera, F., *A Proof of de Bruijn Identity based on Generalized Price's Theorem*, IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). (2019).

Tipo de Apresentação: POSTER

*e-mail: eldonbrfloyd@gmail.com

VIII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
20 a 24 de novembro de 2023

Ferraduras Parcialmente Hiperbólicas

Francehelder da Silva Santos *
Universidade Federal da Bahia

Abstract

Neste trabalho apresentaremos um exemplo de ferradura parcialmente hiperbólica. No contexto do estudo dos sistemas dinâmicos, a Ferradura de Smale é um exemplo de conjunto hiperbólico que apresenta propriedades interessantes, é invariante, composto apenas por pontos limite e com pontos periódicos denso. Um conjunto hiperbólico de um sistema $f : X \to X$ é um conjunto $H \subset X$ tal que, para todo todo ponto $x \in H$, o espaço tangente pode ser composto como soma direta de dois subespaços, o instável E^u e o estável E^s onde ocorrem expansão e contração respectivamente. No caso de sistemas parcialmente hiperbólicos, surge um terceiro subespaço, E^c, onde pode ocorrer contração e expansão, mas não superando a contração e expansão de E^u e E^s. Este trabalho faz parte do projeto de iniciação científica sob orientação da professora Cristina Lizana.

References

[1] Díaz, Lorenzo J. Ferraduras parcialmente hiperbólicas, Matemática Universitária, junho de 2000, volume 1, número 28, 33-55.

Tipo de Apresentação: pôster

*e-mail: `francehelder@gmail.com`

VIII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
20 a 24 de novembro de 2023

Difeomorfismos Anosov no Toro

Gabriela Kipper Paim *
UFBA

Abstract

Na teoria dos Sistemas Dinâmicos, os resultados envolvendo *hiperbolicidade*, *estabilidade estrutural* e *transitividade* são primordiais para realizarmos a análise de uma dinâmica.
Estes conceitos nos permitem avaliar o comportamento de uma variedade M sob a ação de um difeomorfismo $f{:}M\circlearrowleft$, de seus iterados (f^n) e também de suas respectivas derivadas (Df^n).
Podemos observar, por exemplo, a existência de subespaços invariantes estáveis $(\mathbb{E}^s_p)$ e instáveis $(\mathbb{E}^u_p)$ e, consequentemente, fenômenos de contração e expansão em M; ou, objetivando simplificar o problema, podemos utilizar ferramentas como a conjugação topológica e o Teorema de Hartman-Grobman, a fim de associar esta dinâmica a alguma outra já conhecida ou localmente à de um plano tangente $T_{f(p)}M$ a M.
Os difeomorfismos *Anosov* são um tema pesquisa extenso, por fornecerem uma dinâmica extremamente rica a conjuntos invariantes, através de uma estrutura hiperbólica.
Uma variedade interessante de ser estudada é o toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, não apenas pela sua aparência de *donut*, mas principalmente porque podemos enxergá-lo de diversas formas: como grupo, $\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$; topologicamente, $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$, por exemplo.
Para esta temática, a primeira abordagem é mais conveniente, e daremos um enfoque especial aos automorfismos hiperbólicos, concluindo que difeomorfismos Anosov no toro são transitivos.
Este trabalho faz parte do projeto de iniciação científica sob orientação da Prof. Dra. Cristina Lizana Araneda.

References

[1] ROBINSON, Clark. Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos; CRC Press, 1998.

[2] DEVANEY,Robert. An Introduction To Chaotic Dynamical Systems; CRC Press, 2003.

Tipo de Apresentação: Pôster

*e-mail: gabriela.kipper@ufba.br

VIII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
20 a 24 de novembro de 2023

Classificação das álgebras de Lie e Leibniz de dimensão menor ou igual a 2

Juliana Medeiros Barbosa *
UFBA

Abstract

As álgebras de Lie são essenciais em várias áreas da matemática e da física, permitindo, assim, várias generalizações ao longo dos anos. Dentre elas temos a chamada álgebra de Leibniz, em que associando as propriedades de anti-comutatividade e a indentidade de Jacobi, provenientes da álgebra de Lie, obtemos a identidade de Leibniz, a qual caracteriza a álgebra de Leibniz. Dentro desta teoria, é fundamental concentrarmos-nos na classificação destas classes de álgebra, a menos dos isomorfismos, para obtermos um conhecimento mais profundo delas. No entanto, à medida que a dimensão da álgebra aumenta, o problema se torna muito mais complexo. Com isso, nesta apresentação será classificado, a menos de isomorfismo, as álgebras de Lie e Leibniz de dimensão um e dois sobre um corpo $\mathbb{K}$ qualquer.

References

[1] DE MELO JÚNIOR, A. F. Identidades polinomiais para as álgebras de Leibniz de dimensão menor ou igual a 3. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, UFBA, Salvador, 2017.

Tipo de Apresentação: Pôster

*e-mail: jumedeirosbarbosa@gmail.com

VIII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
20 a 24 de novembro de 2023

Caos, Fractais e Gráficos Computacionais: Uma Abordagem Matemática e Visual

Mauricio de Santana Brito *

Abstract

Os Sistemas de Funções Iteradas (IFS) de contrações e atratores topológicos, como exemplificados pelo operador de Barnsley, estão intrinsecamente ligados à teoria dos fractais e à geração de formas complexas. Um IFS de contrações é uma técnica matemática que descreve a construção de figuras fractais por meio de repetidas transformações contraídas em espaços métricos. O operador de Barnsley é um exemplo notável desse conceito.

No contexto dos atratores topológicos, um atrator é uma região do espaço no qual um sistema dinâmico tende a evoluir ao longo do tempo. Quando se trata de sistemas caóticos, como aqueles representados por IFS de contrações, a aparência do atrator é frequentemente complexa e interessante. O operador de Barnsley, que usa transformações probabilísticas ponderadas, ilustra isso de forma vívida. As transformações são ponderadas com probabilidades específicas, o que significa que algumas delas têm maior probabilidade de serem escolhidas do que outras em cada iteração. Esse processo aleatório com pesos diferentes resulta na formação de padrões complexos e intrincados.

References

[1] BARNSLEY, Michael; HUTCHINSON, John; STENFLO, Örjan. A fractal valued random iteration algorithm and fractal hierarchy. Fractals, v. 13, n. 02, p. 111-146, 2005.

[2] OLIVEIRA, Daniel Reis. **Sobre a Continuidade Absoluta de Medidas Invariantes**.2012. Tese (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ.

[3] SILVA, Thiago Martins. **Fractais e Sistemas Dinâmicos**.2022. Tese (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP.

Tipo de Apresentação: Pôster

*e-mail: mau.brito7@gmail.com

VIII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
20 a 24 de novembro de 2023

A Lógica Modal Clássica: As noções de completude e correteza na semântica de Kripke.

Pedro Lucas Santos dos Reis *
UFBA

Abstract

A lógica Modal é uma dentre tantas outras lógicas que surgem a partir das limitações da lógica clássica. Nela temos essencialmente o acréscimo de operadores (unários) chamados de operadores modais. Diversas são as lógicas modais, entretanto temos, em destaque, a clássica, a regular e a normal. Cada uma dessas lógicas é caracterizada por uma regra, além do modus ponens : Uma lógica L é dita clássica sse $A \leftrightarrow B \in L$ implica $\Box A \leftrightarrow \Box B \in L$ e é dita regular sse $A \rightarrow B \in L$ implica $\Box A \rightarrow \Box B \in L$. Especificamente a lógica normal é definida por conter toda fórmula que é instância do axioma distributivo e é fechada pela regra de necessidade. Existe uma menor lógica normal, denominada lógica K, e ela é essencial para o estudo de extensões axiomáticas. A semântica própria para a lógica é a semântica de Kripke. Nela trabalha-se com um conjunto M de mundos possíveis, uma relação binária R em M e funções de avaliação e. Dado isso, definimos os frames (M, R) e modelos (M, R, e) e com isso podemos trabalhar com a noção de validade de fórmulas em modelos e frames. Definimos a partir de uma classe de frames C e de uma lógica L: A lógica $L(C)$ advinda de C é o conjunto de todas as fórmulas válidas em todos frames de C; E a classe de frames $C(L)$ advinda de L é a classe de todos os frames que validam todos teoremas de L. Daí então pode-se trabalhar com a noção de completude e correteza em lógica modal, que na semântica de Kripke tem duas perspectivas. Uma é com respeito a uma classe de frames: diz-se que uma lógica L é completa e correta com respeito a uma classe de frames C se $L = L(C)$. A segunda noção de completude é mais restrita e diz respeito à lógica ser completa de maneira absoluta: diremos que L é completa se $L = L(C(L))$.

References

[1] BLACKBURN, P.; RIJKE, M.; VENEMA, Y. **Modal Logic**. Cambridge University Press, 2011.

[2] JANSANA, Ramón. **Una introducción a la lógica modal**. Tecnos, 1990.

Tipo de Apresentação: Pôster.

*e-mail: pedroreismatematico@gmail.com, p.reis@ufba.br

VIII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
20 a 24 de novembro de 2023

O subgradiente e o cálculo subdiferencial

Tácio Fernandes Alves *
Universidade Federal da Bahia

Abstract

O subgradiente surge como uma generalização natural do conceito de gradiente para funções convexas não diferenciaveis e cumpre um papel essencial na análise convexa. Tendo aplicações principalmente em otimização convexa, é a partir do conceito do subgradiente que surge o cálculo subdiferencial e teoremas básicos de diferenciabilidade podem ser extendidos a funções convexas não continuas. Com isso em mente, o subgradiente será apresentado junto com alguns resultados essenciais do cálculo subdiferencial.

References

[1] BERTSEKAS, Dimitris. Convex Optimization Theory, Athena Scientific, 2009

[2] IZMAILOV, Alexey; SOLODOV, Mikhail. Otimização. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

[3]] IZMAILOV, Alexey; SOLODOV, Mikhail. Otimização - volume 2. Métodos computacionais. 4. ed. IMPA, 2018.

[4] HIRIART-URRUTY, Jean-Baptiste; LEMARÉCHAL, Claude. Convex Analysis and Minimization Algorithms I. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, v. 305. Berlin: Springer, 1993

Tipo de Apresentação: Pôster

*e-mail: tacfernan@gmail.com