

# Grupo de tranças de superfícies orientáveis de genus $g$ finitamente perfurada e grupos cristalográficos

**Renato Diniz**

Universidade Federal de São Carlos- UFSCar

Orientador: Daniel Vendruscolo (UFSCar)/Coorientador: Oscar Ocampo (UFBA)

Novembro de 2019



# 1 Contexto histórico

1 Contexto histórico

2 Preliminares

1 Contexto histórico

2 Preliminares

- Grupo de tranças de superfícies
- Grupos cristalográficos

- 1 Contexto histórico
- 2 Preliminares
  - Grupo de tranças de superfícies
  - Grupos cristalográficos
- 3 Resultados obtidos



# Contexto Histórico



"This bridge between braid theory and the crystallographic groups is new in the literature."

"This bridge between braid theory and the crystallographic groups is new in the literature."

*A quotient of the Artin braids groups related to crystallographic groups*

Gonçalves, D. Guaschi L. J. and Ocampo, O. Journal of Algebra 474, 393-423, **2017**.

# 2 Preliminares

## 2.1 Grupo de tranças (total) e grupo de tranças puras de uma superfície

## 2 Preliminares

### 2.1 Grupo de tranças (total) e grupo de tranças puras de uma superfície

#### Definição (Espaço de configuração)

Seja  $M$  uma superfície compacta (ou para uma superfície com uma quantidade finita de pontos retirados). Definimos o  $n$ -ésimo espaço de configuração de  $M$  do seguinte modo:

$$\mathbb{F}_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid x_i \neq x_j, \text{ se } i \neq j\}.$$

## 2 Preliminares

### 2.1 Grupo de tranças (total) e grupo de tranças puras de uma superfície

#### Definição (Espaço de configuração)

Seja  $M$  uma superfície compacta (ou para uma superfície com uma quantidade finita de pontos retirados). Definimos o  $n$ -ésimo espaço de configuração de  $M$  do seguinte modo:

$$\mathbb{F}_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid x_i \neq x_j, \text{ se } i \neq j\}.$$

#### Grupos de Tranças Pura da superfície $M$

O grupo de tranças puras de  $M$  com  $n$  cordas é definido por:

$$\pi_1(\mathbb{F}_n(M), (p_1, \dots, p_n)),$$

onde  $(p_1, \dots, p_n)$  é um ponto base em  $\mathbb{F}_n(M)$ . Denotamos por  $P_n(M)$ .

O grupo das permutações  $S_n$  age livremente em  $\mathbb{F}_n(M)$  pela permutações das coordenadas. Assim, ao quociente  $\mathbb{F}_n(M)/S_n$  denotaremos por  $\bar{\mathbb{F}}_n(M)$ .

## Grupo de tranças (total) da superfície $M$

O grupo de tranças (total) de  $M$  com  $n$  cordas é definido por

$$B_n(M) = \pi_1(\bar{\mathbb{F}}_n(M), [(p_1, \dots, p_n)]),$$

onde  $[(p_1, \dots, p_n)]$  é um ponto base em  $\bar{\mathbb{F}}_n(M)$ ,  $[(p_1, \dots, p_n)]$  e  $[(p_1, \dots, p_n)]$  denota a classe de  $(p_1, \dots, p_n)$  em  $\bar{\mathbb{F}}(M)$ .

Observemos que, para  $n = 1$ , temos

$$P_1(M) = B_1(M) = \pi_1(M).$$

# 2 Preliminares

## 2.1 Grupo de tranças (algébrico) de uma superfície orientável de genus $g \geq 1$ finitamente perfurada

## 2 Preliminares

2.1 Grupo de tranças (algébrico) de uma superfície orientável de genus  $g \geq 1$  finitamente perfurada

[1, Theorem 1.1] Bellingeri, P. *Apresentação*. 2014.

Sejam  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$  e  $p \geq 1$ . Então o grupo de  $n$  tranças da superfície  $M_{g,p}$  admite a seguinte apresentação



## 2 Preliminares

2.1 Grupo de tranças (algébrico) de uma superfície orientável de genus  $g \geq 1$  finitamente perfurada

[1, Theorem 1.1] Bellingeri, P. *Apresentação*. 2014.

Sejam  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$  e  $p \geq 1$ . Então o grupo de  $n$  tranças da superfície  $M_{g,p}$  admite a seguinte apresentação

**Geradores:**

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g, z_1, z_2, \dots, z_{p-1}$

## 2 Preliminares

2.1 Grupo de tranças (algébrico) de uma superfície orientável de genus  $g \geq 1$  finitamente perfurada

[1, Theorem 1.1] Bellingeri, P. *Apresentação*. 2014.

Sejam  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$  e  $p \geq 1$ . Então o grupo de  $n$  tranças da superfície  $M_{g,p}$  admite a seguinte apresentação

**Geradores:**

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g, z_1, z_2, \dots, z_{p-1}$

**Relações:**

$$(A) \quad \begin{aligned} \sigma_k \sigma_i &= \sigma_i \sigma_k, & \text{se } |k - i| > 1 \\ \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k &= \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n - 2 \end{aligned}$$

# 2 Preliminares

2.1 Grupo de tranças (algébrico) de uma superfície orientável de genus  $g \geq 1$  finitamente perfurada

[1, Theorem 1.1] Bellingeri, P. *Apresentação*. 2014.

Sejam  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$  e  $p \geq 1$ . Então o grupo de  $n$  tranças da superfície  $M_{g,p}$  admite a seguinte apresentação

**Geradores:**

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g, z_1, z_2, \dots, z_{p-1}$

**Relações:**

$$(A) \quad \begin{aligned} \sigma_k \sigma_i &= \sigma_i \sigma_k, & \text{se } |k - i| > 1 \\ \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k &= \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n - 2 \end{aligned}$$

$$(R1) \quad \begin{aligned} a_r \sigma_i &= \sigma_i a_r, & \text{se } 1 \leq r \leq g; i \neq 1; \\ b_r \sigma_i &= \sigma_i b_r, & \text{se } 1 \leq r \leq g; i \neq 1. \end{aligned}$$

$$(R2) \quad \begin{aligned} \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} a_r &= a_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1}, & \text{se } 1 \leq r \leq g; \\ \sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1} b_r &= b_r \sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1}, & \text{se } 1 \leq r \leq g. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (R3) \quad \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1 a_r &= a_r \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1, & \text{se } 1 \leq s < r \leq g. \\
 \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1 b_r &= b_r \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1, & \text{se } 1 \leq s < r \leq g. \\
 \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1 b_r &= b_r \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1, & \text{se } 1 \leq s < r \leq g. \\
 \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1 a_r &= a_r \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1, & \text{se } 1 \leq s < r \leq g.
 \end{aligned}$$

$$(R4) \quad \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} b_r = b_r \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1^{-1}, \quad \text{se } 1 \leq r \leq g.$$

$$(R5) \quad z_j \sigma_i = \sigma_i z_j, \quad \text{se } i \neq j \text{ e } j = 1, \dots, p-1.$$

$$(R6) \quad \sigma_1^{-1} z_i \sigma_1 a_r = a_r \sigma_1^{-1} z_i \sigma_1, \quad \text{se } 1 \leq r \leq g, i = 1, \dots, p-1.$$

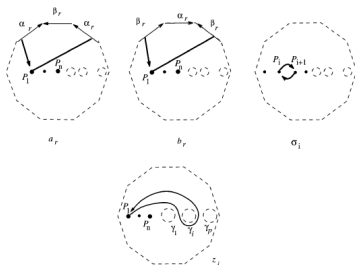
$$\sigma_1^{-1} z_i \sigma_1 b_r = b_r \sigma_1^{-1} z_i \sigma_1, \quad \text{se } 1 \leq r \leq g, i = 1, \dots, p-1.$$

$$(R7) \quad \sigma_1^{-1} z_t \sigma_1 z_l = z_l \sigma_1^{-1} z_t \sigma_1, \quad \text{se } 1 \leq t < l \leq p-1.$$

$$(R8) \quad \sigma_1^{-1} z_t \sigma_1^{-1} z_t = z_t \sigma_1^{-1} z_t \sigma_1^{-1}, \quad \text{se } t = 1, \dots, p-1.$$

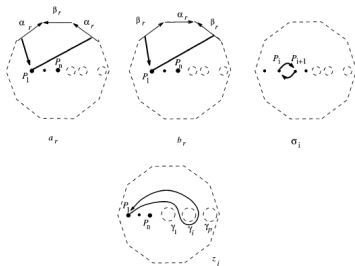
# Interpretação geométrica dos geradores

Figura: [1, Figura 5]



# Interpretação geométrica dos geradores

Figura: [1, Figura 5]



Notação

$$B_n(M_{g,p}).$$

# 2 Preliminares

## 2.1 Grupo de tranças puras (algébrico) de uma superfície orientável de genus $g \geq 1$ finitamente perfurada

## 2 Preliminares

2.1 Grupo de tranças puras (algébrico) de uma superfície orientável de genus  $g \geq 1$  finitamente perfurada

[1, Theorem 5.1] Bellingeri, P. *On presentations of surface braid groups*. **2014**.

Sejam  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$  e  $p \geq 1$ . Então o grupo de tranças puras da superfície  $M_{g,p}$ , admite a seguinte apresentação



## 2 Preliminares

2.1 Grupo de tranças puras (algébrico) de uma superfície orientável de genus  $g \geq 1$  finitamente perfurada

[1, Theorem 5.1] Bellingeri, P. *On presentations of surface braid groups*. 2014.

Sejam  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$  e  $p \geq 1$ . Então o grupo de tranças puras da superfície  $M_{g,p}$ , admite a seguinte apresentação

**Geradores:**  $\mathcal{A}_{i,j}$ , onde  $1 \leq i \leq 2g + p + n - 2$ ,  
 $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$  e  $i < j$ .

# 2 Preliminares

2.1 Grupo de tranças puras (algébrico) de uma superfície orientável de genus  $g \geq 1$  finitamente perfurada

[1, Theorem 5.1] Bellingeri, P. *On presentations of surface braid groups*. 2014.

Sejam  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$  e  $p \geq 1$ . Então o grupo de tranças puras da superfície  $M_{g,p}$ , admite a seguinte apresentação

**Geradores:**  $\mathcal{A}_{i,j}$ , onde  $1 \leq i \leq 2g + p + n - 2$ ,  
 $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$  e  $i < j$ .

**Relações:**

(PR1)  $\mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{r,s}$ , se  $i < j < r < s$ , ou  $r + 1 < i < j < s$ ,  
ou  $i = r + 1 < j < s$ , para  $r$  par, menor do que  $2g$  ou  $r \geq 2g$ .

(PR2)  $\mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}$ , se  $i < j < s$ .

(PR3)  $\mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{j,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}$ , se  $i < j < s$ ;

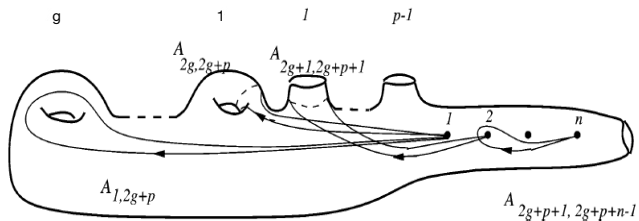
- (PR4)  $\mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{j,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{j,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}$ , se  $i + 1 <$   
 ou  $i + 1 = r < j < s$ , para  $r$  ímpar,  $r < 2g$  ou  $r > 2g$ .
- (ER1)  $\mathcal{A}_{r-1,j}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{r-1,j} = \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{r-1,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{r-1,s}$ , se  $r$  par e  $r \leq 2g$ .
- (ER2)  $\mathcal{A}_{r+1,j}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{r+1,j} = \mathcal{A}_{r+1,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{r+1,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{r+1,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{r+1,s}$ ,  
 se  $r$  ímpar e  $r < 2g$ .

- (PR4)  $\mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{j,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{j,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}$ , se  $i + 1 <$   
ou  $i + 1 = r < j < s$ , para  $r$  ímpar,  $r < 2g$  ou  $r > 2g$ .
- (ER1)  $\mathcal{A}_{r-1,j}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{r-1,j} = \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{r-1,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{r-1,s}$ , se  $r$  par e  $r \leq 2g$ .
- (ER2)  $\mathcal{A}_{r+1,j}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{r+1,j} = \mathcal{A}_{r+1,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{r+1,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{r+1,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{r+1,s}$ ,  
se  $r$  ímpar e  $r < 2g$ .

## Notação

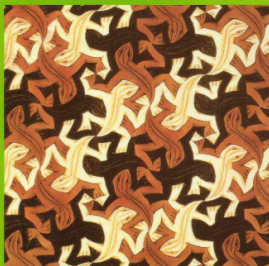
$$P_n(M_{g,p})$$

Figura: [1, Figura 8]



arnaldo garcia  
yves lequain

elementos de álgebra



PROJETO  
EUCLIDES

# 2 Preliminares

## 2.2 Grupos cristalográficos (Caracterização algébrica)

# 2 Preliminares

## 2.2 Grupos cristalográficos (Caracterização algébrica)

Seja  $G$  um grupo. Uma **representação inteira de  $G$  com rank  $n$**  é um homomorfismo  $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ .



## 2 Preliminares

### 2.2 Grupos cristalográficos (Caracterização algébrica)

Seja  $G$  um grupo. Uma **representação inteira de  $G$  com rank  $n$**  é um homomorfismo  $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ .

### Grupos Cristalográficos

Seja  $\Pi$  um grupo. Então  $\Pi$  é um grupo cristalográfico se, e somente se, existe  $n \in \mathbb{N}$  e uma sequência exata curta

# 2 Preliminares

## 2.2 Grupos cristalográficos (Caracterização algébrica)

Seja  $G$  um grupo. Uma **representação inteira de  $G$  com rank  $n$**  é um homomorfismo  $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ .

### Grupos Cristalográficos

Seja  $\Pi$  um grupo. Então  $\Pi$  é um grupo cristalográfico se, e somente se, existe  $n \in \mathbb{N}$  e uma sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \Pi \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \quad (1)$$

tal que:

- $G$  é finito, e

# 2 Preliminares

## 2.2 Grupos cristalográficos (Caracterização algébrica)

Seja  $G$  um grupo. Uma **representação inteira de  $G$  com rank  $n$**  é um homomorfismo  $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ .

### Grupos Cristalográficos

Seja  $\Pi$  um grupo. Então  $\Pi$  é um grupo cristalográfico se, e somente se, existe  $n \in \mathbb{N}$  e uma sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \Pi \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \quad (1)$$

tal que:

- $G$  é finito, e
- a representação  $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ , induzida por conjugação em  $\mathbb{Z}^n$  e definida por  $\varphi(\tau)(x) = \alpha x \alpha^{-1}$ , onde  $x \in \mathbb{Z}^n, \tau \in G$  e  $\alpha \in \Pi$  é tal que  $\pi(\alpha) = \tau$ , é injetiva.

## 2.2 Grupos cristalográficos

- O grupo  $G$  é chamado **grupo de holonomia de  $\Pi$** , e  $\varphi$  é chamada a **representação de holonomia de  $\Pi$** ;

## 2.2 Grupos cristalográficos

- O grupo  $G$  é chamado **grupo de holonomia de  $\Pi$** , e  $\varphi$  é chamada a **representação de holonomia de  $\Pi$** ;
- Sobre grupos de Bieberbach referênciamos o livro *Almost-Bieberbach Groups: Affine and Polynomial Structures*, do autor K. Dekimpe.

### 3.1 O grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é um grupo cristalográfico

#### Teorema 1

Sejam  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$  e  $p \geq 1$ . Existe uma sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(2g+p-1)n} \longrightarrow B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$$

e o grupo  $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$  é um grupo cristalográfico.

# 3.1 O grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é um grupo cristalográfico

Representação de Holonomia

# 3.1 O grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é um grupo cristalográfico

Representação de Holonomia

**Lema 2** (Ação por conjugação de  $B_n(M_{g,p})$  em  $P_n(M_{g,p})$ )

Sejam  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$ ,  $p \geq 1$ ,  $1 \leq i \leq 2g + p - 1$ ,  
 $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$  e  $c = 2g + p$ .

Então a ação por conjugação do grupo de tranças  $B_n(M_{g,p})$ , no subgrupo de tranças puras  $P_n(M_{g,p})$  é dada por:



# 3.1 O grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é um grupo cristalográfico

Representação de Holonomia

**Lema 2** (Ação por conjugação de  $B_n(M_{g,p})$  em  $P_n(M_{g,p})$ )

Sejam  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$ ,  $p \geq 1$ ,  $1 \leq i \leq 2g + p - 1$ ,  
 $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$  e  $c = 2g + p$ .

Então a ação por conjugação do grupo de tranças  $B_n(M_{g,p})$ , no subgrupo de tranças puras  $P_n(M_{g,p})$  é dada por:

$$(a) \quad \sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \mathcal{A}_{c+k-1,c+k} \mathcal{A}_{i,j-1} \mathcal{A}_{c+k-1,c+k}^{-1}, \text{ se } k = j - c.$$

$$(b) \quad \sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{i,j+1} \mathcal{A}_{c,c+1} \mathcal{A}_{i,j} \mathcal{A}_{c,c+1}^{-1}, & \text{se } k = j - c + 1 \text{ e } j - c = 0, \\ \mathcal{A}_{i,j+1}, & \text{se } k = j - c + 1 \text{ e } j - c \neq 0, \end{cases}$$

$$(c) \sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \mathcal{A}_{i,j}, \text{ se } k \leq j - c - 1 \text{ ou } k \geq j - c + 2.$$

$$(d) a_{g-\frac{i}{2}+1} \mathcal{A}_{r,s} a_{g-\frac{i}{2}+1}^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{r,s}, & \text{se } i < c < r < s, \text{ ou } r + 1 < i < c < s, \\ & \text{ou } i = r + 1 < c < s, \text{ para } r \text{ par, menor do que } 2g \text{ ou } r \geq 2g; \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < c < s \text{ e } r = c; \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < c < s \text{ e } r = i; \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i + 1 < r < c < s, \\ & \text{ou } i + 1 = r < j < s, \\ & \text{para } r \text{ ímpar, } r < 2g \text{ ou } r > 2g; \end{cases}$$

quando  $i$  é par e  $1 \leq i \leq 2g$ .

$$(e) \quad b_{g-\frac{i+1}{2}+1} \mathcal{A}_{r,s} b_{g-\frac{i+1}{2}+1}^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{r,s}, & \text{se } i < c < r < s, \text{ ou } r+1 < i < c < s, \\ & \text{ou } i = r+1 < c < s, \text{ para } r \text{ par, menor do que } 2g \text{ ou } r \geq 2g; \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < c < s \text{ e } r = c; \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < c < s \text{ e } r = i \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i+1 < r < c < s \\ & \text{ou } i+1 = r < j < s, \\ & \text{para } r \text{ ímpar, } r < 2g \text{ ou } r > 2g; \end{cases}$$

quando  $i$  é ímpar e  $1 \leq i \leq 2g$ .

$$\begin{aligned}
 \text{(f)} \quad z_i \mathcal{A}_{r,s} z_i^{-1} = & \left\{ \begin{array}{l}
 \mathcal{A}_{r,s}, \text{ se } i < c < r < s, \text{ ou } r + 1 < i < c < s, \text{ ou } i = r + 1 < c < s, \\
 \text{para } r \text{ par, menor do que } 2g \text{ ou } r \geq 2g; \\
 \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i < c < s \text{ e } r = c; \\
 \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i < c < s \text{ e } r = i \\
 \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i + 1 < r < c < s \\
 \text{ou } i + 1 = r < j < s, \\
 \text{para } r \text{ ímpar, } r < 2g \text{ ou } r > 2g;
 \end{array} \right. \\
 & \text{quando } 2g + 1 \leq i \leq 2g + p - 1.
 \end{aligned}$$

## Lema 3 (Representação Integral)

Seja  $g \geq 1, n \geq 1$  e  $p \geq 1$ . Seja o homomorfismo

$$\bar{\pi}: B_n(M_{g,p}) / P'_n(M_{g,p}) \longrightarrow S_n$$

induzido por  $\pi$ .

Se  $\bar{\alpha} \in B_n(M_{g,p}) / P'_n(M_{g,p})$  e  $\bar{\pi}(\bar{\alpha}^{-1}) = \tau \in S_n$ , então

$$\bar{\alpha} \mathcal{A}_{i,j} \bar{\alpha}^{-1} = \mathcal{A}_{i,\tau(j)}$$

em  $P_n(M_{g,p}) / P'_n(M_{g,p})$ , onde  $1 \leq i \leq 2g + p - 1$  e  $2g + p \leq j \leq 2g + p - 1 + n$ .

# 3.1 O grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é um grupo cristalográfico

Apresentação

# 3.1 O grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é um grupo cristalográfico

Apresentação

## **Teorema 4** (Apresentação de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ )

Sejam  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$  e  $p \geq 1$ . O grupo

$$B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$$

admite a seguinte apresentação:

# 3.1 O grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é um grupo cristalográfico

Apresentação

## Teorema 4 (Apresentação de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ )

Sejam  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$  e  $p \geq 1$ . O grupo

$$B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$$

admite a seguinte apresentação:

- 1 Geradores:  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\} \cup \{\mathcal{A}_{i,j} \mid 1 \leq i \leq 2g+p-1, 2g+p \leq j \leq 2g+p+n-1, i < j\}$



# 3.1 O grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é um grupo cristalográfico

Apresentação

## Teorema 4 (Apresentação de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ )

Sejam  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$  e  $p \geq 1$ . O grupo

$$B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$$

admite a seguinte apresentação:

- 1 Geradores:  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\} \cup \{\mathcal{A}_{i,j} \mid 1 \leq i \leq 2g+p-1, 2g+p \leq j \leq 2g+p+n-1, i < j\}$
- 2 Relações
  - (a) relações de Artin: 
$$\begin{aligned} \sigma_k \sigma_i &= \sigma_i \sigma_k, & \text{se } |k-i| > 1; \\ \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k &= \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n-2. \end{aligned}$$

(b)  $\sigma_i^2 = 1$ , para todo  $i = 1, \dots, n - 1$ .

(c)  $\mathcal{A}_{i,j}$  comuta com  $\mathcal{A}_{r,s}$ , para todo  $1 \leq i, r \leq 2g + p - 1$   
 $2g + p \leq j, s \leq 2g + p + n - 1$ .

(d)  $\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{i,j-1}, & \text{se } k = j - 2g - p + 1, \\ \mathcal{A}_{i,j}, & \text{se } k \neq j - 2g - p + 1, j - 2g - p + 2, \\ \mathcal{A}_{i,j+1}, & \text{se } k = j - 2g - p + 2. \end{cases}$

(b)  $\sigma_i^2 = 1$ , para todo  $i = 1, \dots, n - 1$ .

(c)  $\mathcal{A}_{i,j}$  comuta com  $\mathcal{A}_{r,s}$ , para todo  $1 \leq i, r \leq 2g + p - 1$   
 $2g + p \leq j, s \leq 2g + p + n - 1$ .

(d)  $\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{i,j-1}, & \text{se } k = j - 2g - p + 1, \\ \mathcal{A}_{i,j}, & \text{se } k \neq j - 2g - p + 1, j - 2g - p + 2, \\ \mathcal{A}_{i,j+1}, & \text{se } k = j - 2g - p + 2. \end{cases}$

## Corolário 5

A sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(2g+p-1)n} \longrightarrow B_n(M_{g,p}) / P'_n(M_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1,$$

cinde, isto é,

$$B_n(M_{g,p}) / P'_n(M_{g,p}) \cong S_n \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}^{(2g+p-1)n}.$$

## 3.2 Torção do grupo $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$

### Definição

Sejam  $g \geq 1$ ,  $p \geq 1$  e  $n \geq 1$ . O elemento

$$\eta_{j,k} = \sigma_{j+(k-2)}\sigma_{j+(k-2)-1} \cdots \sigma_j$$

em  $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ , com  $k \geq 2$ .

## 3.2 Torção do grupo $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$

Caracterização dos elementos de ordem finita

## 3.2 Torção do grupo $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$

Caracterização dos elementos de ordem finita

### Teorema 6

Seja  $g \geq 1, n \geq 2, p \geq 1$  e  $f = 2g + p - 1$ . Seja  $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t$ , com  $\sum_{j=1}^t k_j \leq n$  e

$$\eta = \eta_{1,k_1} \eta_{1+k_1,k_2} \cdots \eta_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t}$$

em  $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ , e seja  $\theta = \bar{\pi}(\eta^{-1}) \in S_n$  e

$$\mathcal{A} = \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \cdots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \in P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}),$$

onde  $m_{i,f+1}, m_{i,f+2}, \dots, m_{i,f+n} \in \mathbb{Z}$ .

Então  $\eta\mathcal{A}$  possui ordem mmc( $k_1, \dots, k_t$ ) se, e somente se, para cada  $j \in \mathcal{T}_\theta$ , o sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{1,q} = 0, \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{2,q} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{i,q} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{f,q} = 0, \end{array} \right.$$

possui solução no conjunto dos inteiros.

### 3.3 Classe de Conjugação dos elementos de ordem finita de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$



### 3.3 Classe de Conjugação dos elementos de ordem finita de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$

#### Teorema 7

Seja  $g \geq 1, n \geq 1, p \geq 1$ . Dois elementos em  $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$  de ordem  $k$  são conjugados se, e somente se, as permutações associadas as suas imagens em  $S_n$  possuem o mesmo tipo cíclico.

### 3.3 Classe de Conjugação dos elementos de ordem finita de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$






#### Teorema 7




Seja  $g \geq 1, n \geq 1, p \geq 1$ . Dois elementos em  $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$  de ordem  $k$  são conjugados se, e somente se, as permutações associadas as suas imagens em  $S_n$  possuem o mesmo tipo cíclico.

#### Corolário 8

Dois subgrupos cíclicos de  $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$  de ordem  $k$  são conjugados se, e somente se, suas imagens por  $\bar{\pi}$  são conjugadas em  $S_n$ .

# Referências

-  Bellingeri, P. *On presentations of surface braid groups*, Journal of Algebra 274, 543-563. **2014**.
-  Birman J. S. On braids groups, Comm. Pure and Appl. Math 22, 41-72, **1969**.
-  Charlap, L. *Bieberbach Groups and Flat Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1986.
-  Dekimpe, K. *Almost-Bieberbach Groups: Affine and Polynomial Structures*, Lecture Notes in Mathematics, vol.1639, Springer, Berlin, **1996**.
-  Fox, R.H. Neuwirth, The braids groups, Math. Scandinavica 10, 119-126, **1962**.

-  Gonçalves, D. Guaschi L. J. and Ocampo, O. *A quotient of the Artin braids groups related to crystallographic groups*, Journal of Algebra 474, 393-423, **2017**.
-  Johnson, D. L. *Presentations of groups*, 2 ed. Cambridge University Press, Cambridge, 3, 4, 144, 169, 173. **1997**.
-  Murasugi, K., and Kurpita, B. *A study of braids*, vol. 484 of Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, xxii, 3, 9, 14, 18, 52, 53. **1999**.

Muito obrigado