O quociente de Coxeter no grupo de tranças de Artin

Paulo Cesar C. Santos Júnior

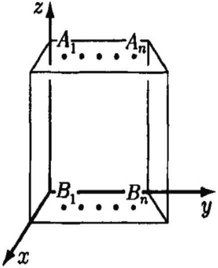
Orientador: **Oscar Ocampo**

Universidade Federal da Bahia- UFBA
Instituto de Matemática e Estatística- IME
Bolsista CAPES

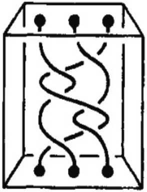
VII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA

Novembro de 2019

Tranças geométricas



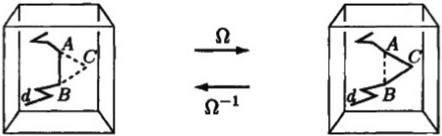
(a) Figura 1



(b) Figura 2

Denotemos por $\mathcal{B}_n$ o conjunto formado por todas as tranças com n cordas.

- Movimento elementar

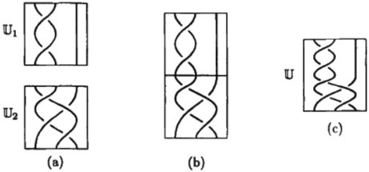


- Tranças equivalentes.

Denotaremos o conjunto de n-tranças não equivalentes por B_n.

Produto de tranças

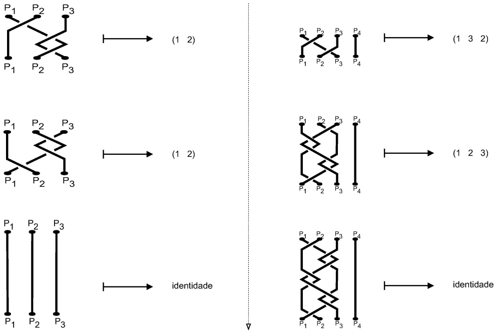
Chamaremos o produto de $\mathbb{U}_1$ com $\mathbb{U}_2$, denotado por $\mathbb{U}_1\mathbb{U}_2$, e é dada por concatenação, como ilustramos a seguir:



O conjunto B_n com a operação produto é um grupo conhecido como grupo de n-tranças de Artin.

O grupo de tranças de Artin

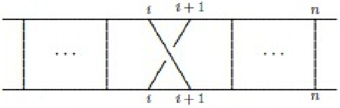
Seja σ o homomorfismo $\sigma\colon B_n \to S_n$ que associa uma trança a uma permutação.



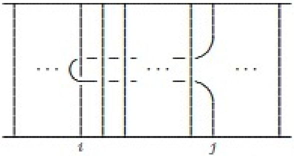
O $\mathrm{Ker}(\sigma) = P_n$ é chamado de grupo de n-tranças puras de Artin.

O grupo de tranças de Artin

- Os geradores de Artin de B_n são denotados por σ_i, para $1 \leq i \leq n-1$.



- Os geradores de Artin de P_n são denotados por $A_{i,j} = \sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}$, para $1 \leq i < j \leq n$.



O grupo de tranças de Artin

Apresentação de Artin para B_n

O grupo de tranças de Artin B_n admite a seguinte apresentação clássica dada por Artin

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \\ \text{para } 1 \leq i \leq n-2; \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ para } |i-j| \geq 2. \end{array} \right\rangle.$$

O quociente $B_n/[P_n, P_n]$

Com essas definições obtemos a seguinte sequência exata curta

$$1 \to P_n \to B_n \xrightarrow{\sigma} S_n \to 1.$$

Ainda mais, denotando por $[P_n, P_n]$ o subgrupo comutador de P_n temos a seguinte sequência exata curta

$$1 \to P_n/[P_n, P_n] \to B_n/[P_n, P_n] \xrightarrow{\overline{\sigma}} S_n \to 1.$$

Gonçalves, Guaschi and Ocampo (2017) mostraram os seguintes resultados

- Sejam $\alpha \in B_n/[P_n, P_n]$ e π a permutação associada a α^{-1}. Assim, $\alpha A_{i,j} \alpha^{-1} = A_{\pi(i),\pi(j)}$ em $P_n/[P_n, P_n]$.
- O grupo $B_n/[P_n, P_n]$ é um grupo cristalográfico.
- Sejam $n \geq 3$ e $k \geq 3$ um inteiro ímpar. Dois elementos de $B_n/[P_n, P_n]$ de ordem k são conjugados se, e somente se, suas permutações associadas são conjugadas.

O quociente de Coxeter em B_n

Coxeter mostrou que $B_n(p) = B_n/\langle \sigma_1^p \rangle$ tem ordem finita se, e somente se, $(n, p) \in \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)\}$.

- n é o número de arestas de cada face;
- p é o número de faces que se encontram em cada vértice.

Grupo	Ordem	Poliedro de Platão associado
$B_3(3)$	24	tetraedro
$B_3(4)$	96	hexaedro
$B_3(5)$	600	octaedro
$B_4(3)$	648	dodecaedro
$B_5(3)$	155520	icosaedro

Quociente tipo-Coxeter em $B_n/[P_n, P_n]$

No que segue denotaremos por $(B_n/[P_n, P_n])(p)$ o grupo $B_n/[P_n, P_n]$ com a relação adicional $\sigma_1^p = 1$ e $(P_n/[P_n, P_n])(p)$ é o grupo $P_n/[P_n, P_n]$ visto em $(B_n/[P_n, P_n])(p)$.

Teorema 1 (Santos Júnior, Ocampo)

Sejam $n \geq 3$ e $k \in \mathbb{N}$.

(a) Se $p = 2k + 1$, então $(B_n/[P_n, P_n])(p)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

(b) Se $p = 2k$, então $(B_n/[P_n, P_n])(p)$ tem ordem $\frac{n(n-1)k}{2} n!$.

Prova (Ideia): Para o item (a), note que $\sigma_i^p = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Assim, $\sigma_i = \sigma_i^{-2k} = A_{i,i+1}^{-k}$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Portanto, $[\sigma_i, \sigma_j] = 1$ para $1 \leq i < j \leq n-1$. Usando as relações de Artin temos, $\sigma_i = \sigma_{i+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Quociente tipo-Coxeter em $B_n/[P_n, P_n]$

No que segue denotaremos por $(B_n/[P_n, P_n])(p)$ o grupo $B_n/[P_n, P_n]$ com a relação adicional $\sigma_1^p = 1$ e $(P_n/[P_n, P_n])(p)$ é o grupo $P_n/[P_n, P_n]$ visto em $(B_n/[P_n, P_n])(p)$.

Teorema 1 (Santos Júnior, Ocampo)

Sejam $n \geq 3$ e $k \in \mathbb{N}$.

(a) Se $p = 2k + 1$, então $(B_n/[P_n, P_n])(p)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

(b) Se $p = 2k$, então $(B_n/[P_n, P_n])(p)$ tem ordem $\frac{n(n-1)k}{2} n!$.

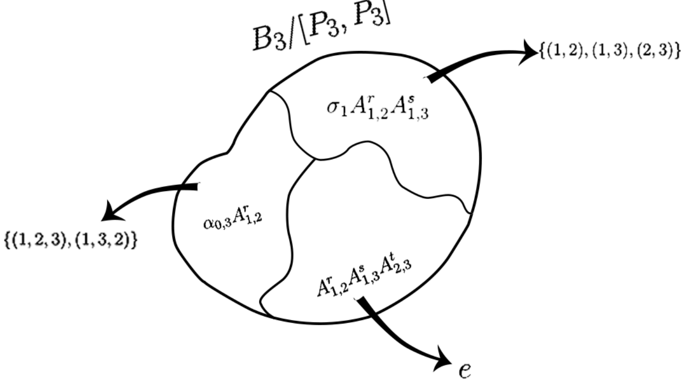
Prova (Ideia): Para o item (b), podemos concluir que $A_{i,i+1}^k = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Consequentemente, $A_{i,j}^k = 1$ para todo $1 \leq i < j \leq n$. Assim, $(P_n/[P_n, P_n])(p)$ é isomorfo a $\underbrace{\mathbb{Z}_k \times \cdots \times \mathbb{Z}_k}_{\frac{n(n-1)}{2}}$ em $(B_n/[P_n, P_n])(p)$. Com isso, o resultado segue. $\square$

Classes de conjugação dos elementos em $B_3/[P_3, P_3]$

- Sejam $n \geq 3$ e $k \geq 3$ um inteiro ímpar. Dois elementos de $B_n/[P_n, P_n]$ de ordem k são conjugados se, e somente se, suas permutações associadas são conjugadas.

Classes de conjugação dos elementos em $B_3/[P_3, P_3]$

- Sejam $n \geq 3$ e $k \geq 3$ um inteiro ímpar. Dois elementos de $B_n/[P_n, P_n]$ de ordem k são conjugados se, e somente se, suas permutações associadas são conjugadas.



Classes de conjugação dos elementos em $B_n/[P_n, P_n]$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in S_n$ tais que α_1, α_2 são conjugados em S_n. Considere $\tilde{\alpha_i} \in B_n/[P_n, P_n]$ tal que $\overline{\sigma}(\tilde{\alpha_i}) = \alpha_i$ para $i = 1, 2$. Os elementos

$$\tilde{\alpha_1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j}^{a_{i,j}} \text{ e } \tilde{\alpha_2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j}^{b_{i,j}}$$

são conjugados em $B_n/[P_n, P_n]$?

Proposição 1 (Santos Júnior, Ocampo)

Sejam θ_1, $\theta_2 \in S_n$ tais que θ_1 e θ_2 são conjugados em S_n. Considere α_1, $\alpha_2 \in B_n/[P_n, P_n]$ tal que $\overline{\sigma}(\alpha_1) = \overline{\sigma}(\alpha_2) = \theta_2$. As seguintes afirmações são equivalentes

(i) α_1 e α_2 são conjugados em $B_n/[P_n, P_n]$;

(ii) $\tilde{\lambda}\alpha_1\tilde{\lambda}^{-1}$ e $\tilde{\lambda}\alpha_2\tilde{\lambda}^{-1}$ são conjugados em $B_n/[P_n, P_n]$,

onde $\tilde{\lambda} \in B_n/[P_n, P_n]$ é tal que $\sigma(\tilde{\lambda}) = \lambda$ e $\lambda\theta_2\lambda^{-1} = \theta_1$.

Classes de conjugação dos elementos em $B_n/[P_n, P_n]$

Se θ é uma permutação em S_n, a ação por conjugação de $B_n/[P_n, P_n]$ em $P_n/[P_n, P_n]$ induz uma ação $\langle\theta\rangle \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ onde $\mathcal{B} = \{A_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ dada por

$$\theta^k(A_{i,j}) = A_{\theta^k(i),\theta^k(j)},$$

para $1 \leq k \leq |\theta|$. Nós denotamos por $\mathcal{O}_\theta(A_{i,j})$ a órbita do elemento $A_{i,j}$ e por T_θ uma transversal para essa ação.

Teorema 2 (Santos Júnior, Ocampo)

Sejam $n \geq 3$, $\beta \in B_n/[P_n, P_n]$ e $\theta = \overline{\sigma}(\beta^{-1})$. Os elementos $\beta \prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j}^{a_{i,j}}$ e $\beta \prod_{A_{r,s} \in T_\theta} A_{r,s}^{S_{r,s}}$ são conjugados em $B_n/[P_n, P_n]$, onde T_θ é uma transversal da ação de $\langle\theta\rangle$ no conjunto $\mathcal{B}$ e $S_{r,s} = \sum_{A_{i,j} \in \mathcal{O}_\theta(A_{r,s})} a_{i,j}$ para todo $A_{r,s} \in T_\theta$.

Classes de conjugação dos elementos em $B_n/[P_n, P_n]$

Prova (Ideia): Seja $X = \prod_{1\leq i<j\leq n} A_{i,j}^{x_{i,j}}$. Os elementos $\beta \prod_{1\leq i<j\leq n} A_{i,j}^{a_{i,j}}$ e $\beta \prod_{A_{r,s}\in T_\theta} A_{r,s}^{S_{r,s}}$ são conjugados se,

$$X\beta \prod_{1\leq i<j\leq n} A_{i,j}^{a_{i,j}} X^{-1} = \beta \prod_{A_{r,s}\in T_\theta} A_{r,s}^{S_{r,s}}.$$

A última equação é equivalente a

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} A_{i,j}^{x_{i,j}} \prod_{1\leq i<j\leq n} A_{i,j}^{a_{\theta^{-1}(i),\theta^{-1}(j)}} \prod_{1\leq i<j\leq n} A_{i,j}^{-x_{\theta^{-1}(i),\theta^{-1}(j)}} \prod_{A_{r,s}\in T_\theta} A_{\theta(r),\theta(s)}^{-S_{r,s}} = 1.$$

Essa equação é verdadeira se o seguinte sistema de equações possui solução

$$(1)\begin{cases} x_{i,j} + a_{\theta^{-1}(i),\theta^{-1}(j)} - x_{\theta^{-1}(i),\theta^{-1}(j)} = 0 \\ x_{\theta(r),\theta(s)} + a_{r,s} - x_{r,s} - S_{r,s} = 0. \end{cases}$$

para todo $1 \leq i \neq \theta(r) < j \neq \theta(s) \leq n$ e para todo $A_{r,s} \in T_\theta$.

Prova (Ideia-Cont.): Note que o sistema anterior tem solução se, e somente se, os seguintes subsistemas possuem solução

$$(2)\left\{\begin{array}{l} x_{\theta^t(r),\theta^t(s)} + a_{\theta^{-(1+m-t)}(r),\theta^{-(1+m-t)}(s)} - x_{\theta^{-(1+m-t)}(r),\theta^{-(1+m-t)}(s)} = 0 \\ k_{\theta(r),\theta(s)} + a_{r,s} - k_{r,s} - S_{r,s} = 0. \end{array}\right.$$

para todo $2 \leq t \leq m$ e para todo $\{r, s\}$ tal que $A_{r,s} \in T_\theta$ onde $m = |\mathcal{O}_\theta(A_{r,s})|$.
Seja $A_{r,s} \in T_\theta$ e considere os elementos
$e_1 = A_{r,s}, e_2 = A_{\theta(r),\theta(s)}, \ldots, e_m = A_{\theta^{m-1}(r),\theta^{m-1}(s)}$ onde $m = |\mathcal{O}_\theta(A_{r,s})|$.
Portanto, a matriz de permutação da órbita de $A_{r,s}$ pela a ação de $\langle\theta\rangle$ com respeito a base ordenada $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ é dada pela matriz $M_{r,s} = (k_{ij})_{m\times m}$

$$k_{ij} = \left\{\begin{array}{l} 1,\ \text{se } (i,j) = (t, t-1),\ \text{para todo t} = 2, 3, \ldots, m; \\ 0,\ \text{caso contrário.} \end{array}\right.$$

Prova (Ideia-Cont.): Assim, podemos escrever os subsistemas de equações como segue

$$(I) \quad [I_{r,s} - M_{r,s}] \begin{pmatrix} x_{r,s} \\ x_{\theta(r),\theta(s)} \\ \vdots \\ x_{\theta^{m-1}(r),\theta^{m-1}(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{\theta^{-1}(r),\theta^{-1}(s)} \\ -a_{r,s} + S_{r,s} \\ \vdots \\ -a_{\theta^{m-2}(r),\theta^{m-2}(s)} \end{pmatrix}$$

onde $I_{r,s} = (Id)_{m\times m}$. Como consequência (I) possui solução se, e somente se, $S_{r,s} = \sum_{A_{i,j}\in\mathcal{O}_\theta(A_{r,s})} a_{i,j}$. $\square$

Classes de conjugação dos elementos em $B_n/[P_n, P_n]$

Exemplo

Seja $\sigma_1\sigma_2 \in B_6/[P_6, P_6]$ e considere $\overline{\sigma}((\sigma_1\sigma_2)^{-1}) = \theta = (1, 2, 3)$. Note que o elemento $\sigma_4\sigma_5$ é um elemento do centralizador de $\sigma_1\sigma_2$. Considere a transversal $T_\theta = \{A_{1,2}, A_{1,4}, A_{1,5}, A_{1,6}, A_{4,5}, A_{4,6}, A_{5,6}\}$, $X = \prod_{1\leq i<j\leq 6} A_{i,j}^{x_{i,j}}$ e $\overline{\sigma}(\sigma_4\sigma_5) = C$.

Temos

$$X(\sigma_4\sigma_5)\sigma_1\sigma_2 \prod_{A_{t,q}\in T_\theta} A_{t,q}^{a_{t,q}}(\sigma_4\sigma_5)^{-1}X^{-1} = \sigma_1\sigma_2 \prod_{A_{t,q}\in T_\theta} A_{t,q}^{b_{t,q}},$$

se, e somente se,

$$X \prod_{A_{t,q}\in T_\theta} A_{\theta(C^{-1}(t)),\theta(C^{-1}(q))}^{a_{t,q}} \sigma_1\sigma_2 X^{-1}(\sigma_1\sigma_2)^{-1} \prod_{A_{t,q}\in T_\theta} A_{\theta(t),\theta(q)}^{-b_{t,q}} = 1.$$

Classes de conjugação dos elementos em $B_n/[P_n, P_n]$

Teorema 3 (Santos Júnior, Ocampo)

Sejam $n \geq 3$, $\beta \in B_n/[P_n, P_n]$ e $\theta = \sigma(\beta^{-1})$. Considere $\tilde{C} \in \overline{\sigma}^{-1}(C_{S_n}(\theta))$ e fixe $\sigma(\tilde{C}) = C$. Se $\tilde{C}\beta\tilde{C}^{-1} = \beta \prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j}^{c_{i,j}}$, os elementos $\beta \prod_{A_{t,q} \in T_\theta} A_{t,q}^{a_{t,q}}$ e $\beta \prod_{A_{t,q} \in T_\theta} A_{t,q}^{b_{t,q}}$ são conjugados se, e somente se,

(i) $\sum_{A_{i,j} \in \mathcal{O}_\theta(A_{t,q})} c_{i,j} + a_{C(t),C(q)} = b_{t,q}$, se $A_{C^{-1}(t),C^{-1}(q)} \notin \mathcal{O}_\theta(A_{t,q})$ para $A_{t,q} \in T_\theta$.

(ii) $\sum_{A_{i,j} \in \mathcal{O}_\theta(A_{t,q})} c_{i,j} + a_{t,q} = b_{t,q}$, se $A_{C^{-1}(t),C^{-1}(q)} \in \mathcal{O}_\theta(A_{t,q})$ para $A_{t,q} \in T_\theta$;

Corolário 1 (Santos Júnior, Ocampo)

Seja $n \geq 3$, $\beta \in B_n/[P_n, P_n]$ tal que $\overline{\sigma}(\beta^{-1}) = \theta = (1, 2, \ldots, n)$. Os elementos $\beta \prod_{A_{t,q} \in T_\theta} A_{t,q}^{a_{t,q}}$ e $\beta \prod_{A_{t,q} \in T_\theta} A_{t,q}^{b_{t,q}}$ são conjugados se, e somente se, $a_{t,q} = b_{t,q}$ para $A_{t,q} \in T_\theta$.

Referências principais

1 COXETER, H. S. M. *Factor groups of the braid group*. In: Proc. Fourth Canadian Math. Congress, Banff. **1957**. p. 95-122.

2 GONÇALVES, Daciberg Lima; GUASCHI, John; OCAMPO, Oscar. *A quotient of the Artin braid groups related to crystallographic groups*. Journal of Algebra, v. 474, p. 393-423, **2017**.

3 MURASUGI, Kunio; KURPITA, Bohdan. *A study of braids*. Springer Science & Business Media, **2012**.

4 SANTOS JÚNIOR, Paulo Cesar Cerqueira. *Um quociente do grupo de tranças de Artin relacionado aos grupos cristalográficos*, Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Federal da Bahia, **2019**.

OBRIGADO!