Flutuações fora do equilíbrio para o processo de exclusão com um elo lento

Mariana Tavares de Aguiar

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

VII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA

Salvador

07 de novembro de 2019

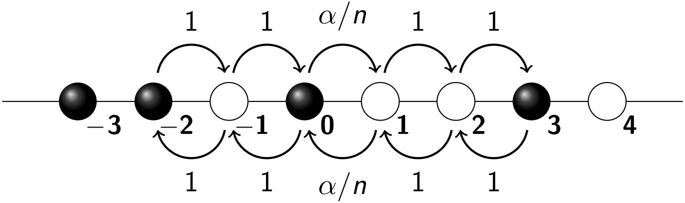
Resultado

- Flutuações fora do equilíbrio para SSEP unidimensional com um elo lento.

  trabalho em conjunto com D. Erhard - UFBA, T. Franco - UFBA, P. Gonçalves - IST, Portugal e A. Neumann - UFRGS.

Processo de Exclusão

- $\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros.
- $\eta = (\eta(x))_{x\in\mathbb{Z}}$: configuração típica do estado de espaços $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$



- Para cada elo, associamos um tempo exponencial de espera, que é independente do tempo de espera de qualquer outro elo.

O *processo de exclusão simples simétrico de vizinhos mais próximos* é um Processo de Markov com espaço de configurações $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ e com taxas de mudança $\xi^N_{x,x+1} > 0$, cujo gerador $\mathcal{L}_n$ age em funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$(\mathcal{L}_n f)(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \xi^n_{x,x+1} \Big(f((\eta)^{x,x+1}) - f(\eta) \Big) ,$$

onde

- $\xi^n_{x,x+1} \; = \; \xi^n_{x+1,x}$: taxas de mudança dadas por

$$\xi^n_{x,x+1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1\,, & \text{se } \; x \neq 0\,, \\ \frac{\alpha}{n}\,, & \text{se } \; x = 0\,. \end{cases}$$

- $\eta^{x,x+1}$: configuração obtida a partir de η pela troca das ocupações das variáveis $\eta(x)$ and $\eta(x+1)$.

Limite Hidrodinâmico para o SSEP

Teorema (Franco, Gonçalves e Neumann, 2013) Suponha que a sequência $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é associada ao perfil $\rho_0(\cdot)$. Então, para cada $t \in [0, T]$, para cada $\delta > 0$ e qualquer função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com suporte compacto,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{\mu_n}\left[\eta_\cdot : \left|\frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{Z}} f(\tfrac{x}{n})\,\eta_t(x) - \int_{\mathbb{R}} f(u)\,\rho(t,u)\,du\right| > \delta\right] \;=\; 0\,,$$

onde $\rho(t,\cdot)$ é a única solução da equação do calor com condições de bordo de Robin, dada por

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,u) = \partial^2_{uu}\rho(t,u), & t \geq 0,\ u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ \partial_u\rho(t,0^+) = \partial_u\rho(t,0^-) = \alpha\big[\rho(t,0^+) - \rho(t,0^-)\big], & t \geq 0, \\ \rho(0,u) = \rho_0(u), & u \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Flutuações no equilíbrio para o SSEP

Teorema (Franco, Gonçalves e Neumann, 2013) Considere um processo de Markov $\{\eta_t : t \geq 0\}$ começando da medida invariante ν_ρ. Então, a sequência de processos $\{\mathcal{Y}_t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em distribuição, quando $n \to +\infty$, com respeito a topologia Skorohod de $\mathcal{D}([0, T], \mathcal{S}'_\beta(\mathbb{R}))$ para um elemento aleatório $\mathcal{Y}_\sqcup$ em $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{S}'_\beta(\mathbb{R}))$, o processo generalizado de Ornstein-Uhlenbeck, o qual é solução de

$$d\mathcal{Y}_t \;=\; \Delta_\beta \mathcal{Y}_t dt + \sqrt{2\chi(\rho)}\nabla_\beta \, d\mathcal{W}_t \, .$$

- Fixe uma medida inicial μ_n em Ω. Para $x \in \mathbb{Z}$ e $t \geq 0$, seja

$$\rho_t^n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}_{\mu_n}\big[\eta_t(x)\big]\,.$$

$\rho_t^n(\cdot)$ é uma solução da equação discreta

$$\partial_t \rho_t^n(x) \;=\; \big(n^2 \mathcal{A}_n \rho_t^n\big)(x)\,, \quad x \in \mathbb{Z}\,, \quad t \geq 0\,,$$

onde

$$(\mathcal{A}_n f)(x) \;:=\; \xi^n_{x,x+1}\Big(f(x+1)-f(x)\Big)+\xi^n_{x-1,x}\Big(f(x-1)-f(x)\Big)\,,\;\; \forall\, x \in \mathbb{Z}\,,$$

- Para $x, y \in \mathbb{Z}$ e $t \in [0, T]$, defina a função correlação de dois pontos

$$\varphi_t^n(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}_{\mu_n}\big[\eta_t(x)\eta_t(y)\big] - \rho_t^n(x)\rho_t^n(y)\,.$$

Defina:

- o campo de flutuações $\mathcal{Y}^n$ como um funcional linear agindo nas funções $f \in \mathcal{S}_\alpha(\mathbb{R})$ via

$$\mathcal{Y}_t^n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x \in \mathbb{Z}} f\left(\tfrac{x}{n}\right)\Big(\eta_t(x) - \rho_t^n(x)\Big)\,.$$

- Q_n medida de probabilidade em $\mathcal{D}([0,T], \mathcal{S}'_\alpha(\mathbb{R}))$

Assuma que existe uma constante $c > 0$ que não depende de n tal que

- $$\sup_{x \in \mathbb{Z}} \left|\rho_0^n(x) - \rho_0\left(\tfrac{x}{n}\right)\right| \;\leq\; \frac{c}{n}\,. \tag{1}$$

- $$\sup_{(x,y) \in V} \left|\varphi_0^n(x,y)\right| \;\leq\; \frac{c}{n}\,. \tag{2}$$

Teorema (Flutuações fora do equilíbrio)

Considere o processo de Markov $\{\eta_t : t \geq 0\}$ começando da sequência de medidas de probabilidade $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ associadas a um perfil, e assuma:

(A) Condições (1) e (2) para a média e covariância, respectivamente.

(B) Existe uma variável aleatória $\mathcal{S}'_\alpha(\mathbb{R})$-avaliada $\mathcal{Y}_0$ tal que $\mathcal{Y}_0^n$ converge em distribuição para $\mathcal{Y}_0$, cuja lei denotamos por $\mathfrak{L}$.

Então, a sequência de processos $\{\mathcal{Y}_t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em distribuição, quando $n \to +\infty$, com respeito a topologia Skorohod de $\mathcal{D}([0, T], \mathcal{S}'_\alpha(\mathbb{R}))$ para um elemento aleatório $\mathcal{Y}$ em $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{S}'_\alpha(\mathbb{R}))$, o processo generalizado de Ornstein-Uhlenbeck, o qual é solução de

$$d\mathcal{Y}_t \;=\; \Delta_\alpha \mathcal{Y}_t dt + \nabla_\alpha \, d\mathcal{W}_t \,,$$

e $\mathcal{Y}_0$ tem lei $\mathfrak{L}$.

Prova das Flutuações Fora do Equilíbrio

Passo 1) Estabelecer a rigidez da sequência $\{\mathcal{Y}_t^n : t \in [0, T]\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Passo 2) Caracterizar os pontos limites.

Passo 3) Unicidade do processo de Ornstein-Uhlenbeck, solução de

$$d\mathcal{Y}_t \;=\; \Delta_\alpha \mathcal{Y}_t dt + \nabla_\alpha \, d\mathcal{W}_t \,.$$

Teorema (Estimativa da derivada discreta) Assuma que existe uma constante $c > 0$ que não depende de n tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{Z}} \left|\rho_0^n(x) - \rho_0\left(\tfrac{x}{n}\right)\right| \;\leq\; \frac{c}{n}\,. \tag{3}$$

Então, existe $\overline{c} > 0$ tal que, para todo $t \in [0, T]$, e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\rho_t^n(x+1) - \rho_t^n(x)\right| \;\leq\; \begin{cases} \frac{\overline{c}}{n}, & \text{if } x \neq 0, \\ \overline{c}, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Teorema (Estimativa da Correlação) Assuma que existe uma constante $c > 0$ que não depende de n tal que

$$\sup_{(x,y)\in V} \left|\varphi_0^n(x,y)\right| \;\leq\; \frac{c}{n}\,. \tag{4}$$

Além disso, assuma que vale (3). Então, existe $\hat{c} > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{t\leq T}\ \sup_{(x,y)\in V} \left|\varphi_t^n(x,y)\right| \;\leq\; \frac{\hat{c}\log n}{n}\,, \tag{5}$$

onde $V := \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} :\ y \geq x+1\}$.

Esboço da prova (Estimativa das correlações)

$\{(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t);\ t \geq 0\}$: passeio aleatório no conjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} :\ y \geq x + 1\}$ com gerador $\mathbf{B}_n$ agindo em funções $f : V \to \mathbb{R}$ via

$$\big(\mathbf{B}_n f\big)(u) \overset{\text{def}}{=} \sum_{v \in V} c_n(u, v)\big[f(v) - f(u)\big]\,,\ \ \forall\, u \in V\,.$$

Aqui,

$$c_n(u, v) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\alpha}{n}, & \text{if } \ (u, v) \in \mathcal{U}, \\ 1, & \text{if } \ u \notin U \text{ or } v \notin U. \end{cases}$$

Pela equação de Kolmogorov, temos que

$$\partial_t \varphi_t^n(x,y) \;=\; \mathbb{E}_{\mu_n}\big[n^2 \mathcal{L}_n(\eta_t(x)\eta_t(y))\big] - \partial_t(\rho_t^n(x)\rho_t^n(y))\,.$$

e φ_t^n é solução da seguinte equação:

$$\partial_t \varphi_t^n(x,y) \;=\; n^2 \mathbf{B}_n \varphi_t^n(x,y) + g_t^n(x,y)\,,$$

onde

$$g_t^n(x,y) \;=\; -(\nabla_n^+ \rho_t^n(x))^2 \Big(\mathbf{1}_{\{D\setminus(0,1)\}} + \frac{\alpha}{n}\mathbf{1}_{\{(0,1)\}}\Big)\,.$$

Pelo Princípio de Duhamel,

$$\varphi_t^n(x,y) \;=\; \mathbf{E}_{(x,y)}\Big[\varphi_0^n(\mathbf{X}_{tn^2},\mathbf{Y}_{tn^2}) + \int_0^t g_{t-s}^n(\mathbf{X}_{sn^2},\mathbf{Y}_{sn^2})\,ds\Big]\,.$$

Para qualquer $s \le t$,

$$\mathbf{E}_{(x,y)}[g^n_{t-s}(\mathbf{X}_{sn^2}, \mathbf{Y}_{sn^2})] = \sum_{z \neq 0} \big[-(\nabla^+_n \rho^n_{t-s}(z))^2 \big] \mathbf{P}_{(x,y)}[(\mathbf{X}_{sn^2}, \mathbf{Y}_{sn^2}) = (z, z+1)]$$
$$+ \frac{\alpha}{n} \big[-(\nabla^+_n \rho^n_{t-s}(0))^2 \big] \mathbf{P}_{(x,y)}[(\mathbf{X}_{sn^2}, \mathbf{Y}_{sn^2}) = (0,1)] \,.$$

Consequentemente, para todo $(x,y) \in V$,

$$S_n \int_0^t \Big(\mathbf{P}_{(x,y)}[(\mathbf{X}_{sn^2}, \mathbf{Y}_{sn^2}) \in D \backslash \{(0,1)\}] + S_{n,0} \frac{\alpha}{n} \mathbf{P}_{(x,y)}[(\mathbf{X}_{sn^2}, \mathbf{Y}_{sn^2}) = (0,1)] \Big) ds,$$

onde

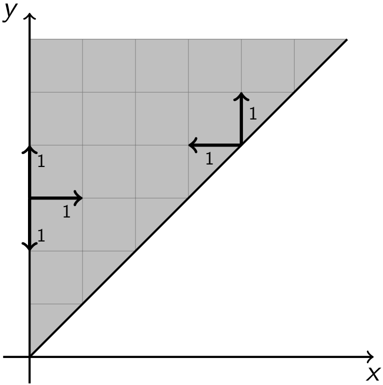
$$S_n \;=\; \sup_{t \geq 0} \; \sup_{z \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}} (\nabla^+_n \rho^n_t(z))^2 \quad \text{and} \quad S_{n,0} \;=\; \sup_{t \geq 0} (\nabla^+_n \rho^n_t(0))^2 \,.$$

Então,

$$\sup_{t\leq T} |\varphi_t^n(x,y)|$$
$$\leq \frac{C}{n} + C\Big(\frac{1}{n^2}(\mathbf{E}_{(x,y)}[L_{n^2T}(D\setminus\{(0,1)\})] + \frac{1}{n}\mathbf{E}_{(x,y)}[L_{n^2T}(\{(0,1)\})]\Big).$$

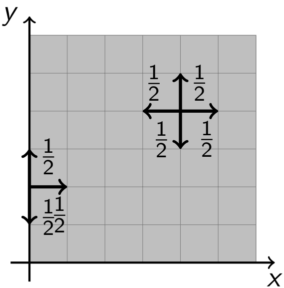
Portanto, basta provar que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(x,y)}\Big[L_{tn^2}\Big(D\backslash\{(0,1)\}\Big)\Big] \ &\leq \ cn\sqrt{t}, \quad \text{e} \\ \mathbf{E}_{(x,y)}\Big[L_{tn^2}\Big(\{(0,1)\}\Big)\Big] \ &\leq \ c\log(tn^2). \end{aligned}$$

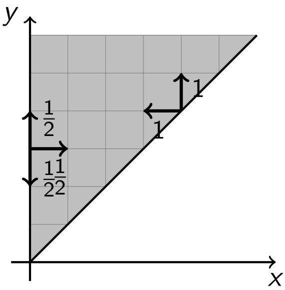


Taxas de $(\mathbf{X}^{\triangledown}, \mathbf{Y}^{\triangledown})$.

Precisamos provar que existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $t \geq 0$ e todo $(x, y) \in W$, $\mathbf{E}^{\triangledown}_{(x,y)}\big[L_t(\partial W)\big] \ \leq \ c\sqrt{t}$.

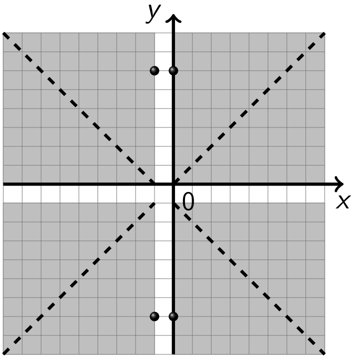


Taxas de $\big(\mathbf{X}^{\square}, \mathbf{Y}^{\square}\big)$.



Taxas de $\big([\mathbf{X}^{\square}], [\mathbf{Y}^{\square}]\big)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\triangledown}_{(x,y)}\big[L_t(\partial W)\big] &\leq \mathbf{E}^{[\square]}_{([x],[y])}\big[L_{2t}([\partial W])\big] \\
&\leq \mathbf{E}^{\square}_{(x,y)}\big[L_{2t}(\partial \mathbb{Z}^2_{\geq 0})\big] + \mathbf{E}^{\square}_{(x,y)}\big[L_{2t}(\partial W_{\mathrm{diag}})\big].
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\triangledown}_{(x,y)}\big[L_t(\partial W)\big] \;&\le\; \mathbf{E}^{\square}_{(x,y)}\big[L_{2t}(\partial \mathbb{Z}^2_{\ge 0})\big] + \mathbf{E}^{\square}_{(x,y)}\big[L_{2t}(\partial W_{\mathrm{diag}})\big] \\
&\le\; \mathbf{E}^{(X,Y)}_{(x,y)}\big[L_{2t}(A)\big] \le c\sqrt{t}
\end{aligned}
$$

Portanto, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{(x,y)}\Big[L_{tn^2}\Big(D\backslash\{(0,1)\}\Big)\Big] \\
&\leq \mathbf{E}_{(x,y)}\big[\mathbf{1}_{\{\tau_{2i}<tn^2\}}\big]\sup_{(x,y)\in W}\mathbf{E}_{(x,y)}\Big[\int_0^{tn^2}\mathbf{1}_{\{(\mathbf{X}_s^{\triangledown},\mathbf{Y}_s^{\triangledown})\in D\backslash\{(0,1)\}\}}\,ds\Big] \\
&\leq c\sqrt{t}n.
\end{aligned}
$$

Obrigada pela atenção!

CAPES
Coordenação de Aprefeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

Esse trabalho foi financiado pela CAPES.