Construção de um semigrupo de dois produtos únicos definido por relações de permutações de tipo quatérnion

Georg Klein

Trabalho conjunto com

Ferran Cedó e Eric Jespers

04/11, 2019

Para um corpo K e um semigrupo S, temos a álgebra de semigrupo $K[S]$, cujos elementos identificamos com as somas finitas $\sum \alpha_s s$, com $\alpha_s \in K$ e $s \in S$.

Se U for qualquer R-módulo direito, definimos o *aniquilador*

$$\mathrm{ann}_R(U) = \{r \in R \mid xr = 0 \text{ para todo } x \in U\}.$$

O *radical de Jacobson* de R, denotado por $J(R)$, é a interseção de todos os aniquiladores $\mathrm{ann}_R(U)$ de R-módulos direitos simples U.

$J(R)$ é o conjunto dos elementos $x \in R$ tais que $1 + RxR$ seja invertível.

Um semigrupo S é chamado de semigrupo p.u. se, para quaisquer subconjuntos finitos não-vazios X, Y de S com $|X| + |Y| > 2$, existir um elemento no conjunto $XY = \{xy \,|\, x \in X, \, y \in Y\}$, que tem uma representação única da foma xy, onde $x \in X$, $y \in Y$.

Similarmente, S é chamado de semigrupo d.p.u. se, para quaisquer subconjuntos finitos não-vazios X, Y de S com $|X| + |Y| > 2$, existirem ao menos dois elementos no conjunto $XY = \{xy \,|\, x \in X, \, y \in Y\}$, que têm representação única da foma xy, para alguns $x \in X$, $y \in Y$.

Dizemos que uma álgebra de monoide $K[S]$ tem elementos invertíveis triviais se os únicos elementos invertíveis em $K[S]$ forem da forma λs, onde $0 \neq \lambda \in K$, e s é invertível em S.

Para $a \in K[S]$, o suporte $\text{supp}(a)$ é o conjunto dos elementos $s \in S$ com $\alpha_s \neq 0$ em $a = \sum \alpha_s s$.

Seja S um semigrupo p.u.. Então $K[S]$ é um domínio. Se além disso, S for um semigrupo d.p.u. e $K[S]$ for uma álgebra com unidade, então $K[S]$ tem elementos invertíveis triviais.

Demonstração: Se $a, b \in K[S]$ forem tais que $ab = 0$, então não existe um elemento no produto $(\text{supp}(a))\,(\text{supp}(b))$ com representação única xy, com $x \in \text{supp}(a)$, $y \in \text{supp}(b)$. Se S for um semigrupo d.p.u. e $K[S]$ tem uma unidade, então a condição $ab = 1$, $a, b \in K[S]$ implica que existe ao máximo um elemento p.u. no produto de $\text{supp}(a)$ e $\text{supp}(b)$. Assim a afirmação é uma consequência direta da definição de semigrupos p.u. e d.p.u..

Suponha que G seja um grupo p.u. que não é d.p.u.. Isto significa que existem dois subconjuntos finitos A e B do grupo G tais que $|A|+|B|>2$ e no conjunto AB existe exatamente um elemento ab que tem uma representação única da forma xy, onde $x\in A$, e $y\in B$. Seja $C=a^{-1}A$ e $D=Bb^{-1}$. Em CD somente $1\cdot 1$ tem uma representação única. Sejam $E=D^{-1}C$ e $F=DC^{-1}$. Todo elemento em EF pode ser escrito da forma $(d_1^{-1}c_1)(d_2c_2^{-1})$. Se $c_1\neq 1$ ou $d_2\neq 1$, então existem $c_3\in C$ e $d_3\in D$ tais que $c_1d_2=c_3d_3$ e $c_1\neq c_3$, consequentemente o elemento $(d_1^{-1}c_1)(d_2c_2^{-1})$ tem outra representação $(d_1^{-1}c_3)(d_3c_2^{-1})$. Se $c_2\neq 1$ ou $d_1\neq 1$, então existem $c_4\in C$ e $d_4\in D$ tais que $c_2\neq c_4$ e $c_2d_1=c_4d_4$. Temos $d_1^{-1}c_2^{-1}=d_4^{-1}c_4^{-1}$ e assim o elemento $(d_1^{-1}\cdot 1)(1\cdot c_2^{-1})$ tem outra representação $(d_4^{-1}\cdot 1)(1\cdot c_4^{-1})$. Já que $|C|+|D|>2$, em C ou em D existe um elemento outro que 1. Seja por exemplo $1\neq c\in C$, então o elemento $(1\cdot 1)(1\cdot 1)$ em EF tem outra representação $(1\cdot c)(1\cdot c^{-1})$. Obtemos que nenhum elemento em EF tem uma representação única da forma xy com $x\in E$ e $y\in F$, assim G não é um grupo p.u..

Temos o grupo quatérnion generalizado
$Q_{4k} = \langle t, u \mid t^{2k} = u^4 = 1, t^k = u^2, u^{-1}tu = t^{-1} \rangle$, com $n = 4k \geq 8$.

Para representar Q_{4k} como subgrupo regular H de Sym_n, tomamos

$$t = (1, 2, \ldots, 2k-1, 2k)(2k+1, 2k+2, \ldots, 4k-1, 4k),$$

$$\begin{aligned} u \;\; = \;\; & (1, 2k+1, 1+k, 2k+1+k)(2, 4k, 2+k, 4k-k) \cdot \\ & \cdot (3, 4k-1, 3+k, 4k-1-k) \cdots \\ & \cdots (k, 4k-(k-2), k+k, 4k-(k-2)-k) \end{aligned}$$

e $H = \langle t, u \rangle$. É facil verificar que $H \cong Q_{4k}$.

No caso $n = 4k = 8$, temos

$$t = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8),$$

$$u \;\; = \;\; (1, 5, 3, 7)(2, 8, 4, 6)$$

Temos a álgebra $K\langle a_1, \ldots, a_n \mid a_1 a_2 \cdots a_n = a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(n)},\ \sigma \in H \rangle$. Isto é a álgebra de semigrupo $K[S_n(H)]$ sobre o monoide $S_n(H) = \langle a_1, \ldots, a_n \mid a_1 a_2 \cdots a_n = a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(n)},\ \sigma \in H \rangle$.

Uma propriedade importante de S_n é de como pode ser re-escrito um elemento

$$a_{m_1} \cdots a_{m_r} a_{i_1} \cdots a_{i_{n-j+1}} \cdots a_{i_n} a_{l_1} \cdots a_{l_{n-j}} \cdots a_{l_s}$$

usando uma relação

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n} = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$
$$x_{i_{n-j+1}} \cdots x_{i_n} x_{l_1} \cdots x_{l_{n-j}} = x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)}.$$

O numero j de letras na sobreposição da primeira e da segunda palavra pode ser ao maximo 1.

Sejam $c, d, c', d' \in S_n$ elementos tais que que c, c' têm o mesmo comprimento r, $cd = c'd'$ e $c \neq c'$. Então d, d' tem o mesmo comprimento s e existe um inteiro positivo k, inteiros $i_1, \ldots, i_{k-1}, l_{k+n}, \ldots, l_{r+s} \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\sigma, \tau \in H$, tais que $\sigma \neq \tau$, $0 \leq r - k < n - 1$ e

$$\begin{aligned}
c &= \pi\big(x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(r-k+1)}\big)\\
d &= \pi\big(x_{\sigma(r-k+2)} \cdots x_{\sigma(n)} x_{l_{k+n}} \cdots x_{l_{r+s}}\big)\\
c' &= \pi\big(x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(r-k+1)}\big)\\
d' &= \pi\big(x_{\tau(r-k+2)} \cdots x_{\tau(n)} x_{l_{k+n}} \cdots x_{l_{r+s}}\big).
\end{aligned}$$

No caso $n = 8$, por exemplo

$$\begin{aligned}
c &= \pi\big(w_1 x_{\sigma(1)}\big)\\
d &= \pi\big(x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} x_{\sigma(5)} x_{\sigma(6)} x_{\sigma(7)} x_{\sigma(8)} w_2\big)\\
c' &= \pi\big(w_1 x_{\tau(1)}\big)\\
d' &= \pi\big(x_{\tau(2)} x_{\tau(3)} x_{\tau(4)} x_{\tau(5)} x_{\tau(6)} x_{\tau(7)} x_{\tau(8)} w_2\big).
\end{aligned}$$

Suponhamos que $cd' = c''d''$, $c'' \neq c$ e $d'' \neq d'$.

$$cd' = \pi(w_1 x_{\sigma(1)} x_{\tau(2)} x_{\tau(3)} x_{\tau(4)} x_{\tau(5)} x_{\tau(6)} x_{\tau(7)} x_{\tau(8)} w_2) = c''d''$$

o que implicaria que

$$\begin{aligned} c'' &= \pi(w_1 x_{\lambda(1)}) \\ d'' &= \pi(x_{\lambda(2)} x_{\lambda(3)} x_{\lambda(4)} x_{\lambda(5)} x_{\lambda(6)} x_{\lambda(7)} x_{\lambda(8)} w_2). \end{aligned}$$

com $\lambda \neq \tau$, ou

$$\begin{aligned} c &= \pi(\tilde{w}_1 x_{\rho(1)} x_{\rho(2)} x_{\rho(3)} x_{\rho(4)} x_{\rho(5)} x_{\rho(6)} x_{\rho(7)}) \\ d' &= \pi(x_{\rho(n)} \tilde{w}_2) \\ c'' &= \pi(\tilde{w}_1 x_{\kappa(1)} x_{\kappa(2)} x_{\kappa(3)} x_{\kappa(4)} x_{\kappa(5)} x_{\kappa(6)} x_{\kappa(7)}) \\ d'' &= \pi(x_{\kappa(n)} \tilde{w}_2). \end{aligned}$$

com $\rho \neq \kappa$. Em ambos casos existem dois produtos que têm representação única.