Principio estocástico do mínimo para EDPEs com coeficientes localmente monótonos

Edson A. Coayla T. (UFBA)

VII EPGMAT

Salvador, 06 de novembro de 2019

Conteúdo

Introdução

Controle ótimo, EQ e $\mathcal{J}$

Exist de sol da EQ

Exist controle ótimo

Encontrar o ótimo

Princ de Mínimo(c. nece)

EQ. de HJB(c. suf)

Nomenclatura

- $T > 0$ fixo e abreviamos $\mathbb{T} := [0, T]$, $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}\right)$ uma base estocástica com $\mathcal{F}_0$ contendo os conjuntos nulos.
- $\mathbb{E}(X)$ denota a esperança matemática da variável aleatória X.
- Para B um espaço de Banach, $L^2(\Omega \times \mathbb{T}; B)$ com norma $\mathbb{E}(\int_{\mathbb{T}} \|u\|_B^2 dt) < \infty$.
- $\mathcal{O}$, H, V and V' espaços de Banach tal que $V \subset H \cong H' \subset V'$, H é um espaço de Hilbert real e separável V é reflexivo com dual V' e esta incluido densa e continuamente em H. As normas respectivas são $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{V'}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$.
- H com produto interno $(\cdot, \cdot)$ e a dualidade entre V e V' sera denotda por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- $\{W_t\}_{t\geq 0}$ é processo de Wiener cilindrico sobre um espaço de Hibert separável U.
- $(L_2(U; H), \|\cdot\|_2)$ denota o espaço dos operadores Hilbert-Schmidt de U para H.

Introdução

$$\begin{aligned} du(t) &= (A(t)u(t) + B(u(t), \Phi(t)))dt + \Xi(u(t))dW(t) \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1}$$

$A : \mathbb{T} \times V \times \Omega \to V'$, $B : V \times \mathcal{O} \times \Omega \to V'$, $\Phi : \mathbb{T} \times H \times \Omega \to \mathcal{O}$ and $\Xi : \mathbb{T} \times V \times \Omega \to L_2(U; H)$ são progresivamente mensuráveis e satisfazem a condição de ser localmente monótonas. Φ se desempenha como o controle.

Denotaremos por $(\mathcal{P})$ o problema de minimizar uma função costo dada $\mathcal{J}(\Phi)$ com Φ pertencendo a $\mathcal{U}$, o conjunto dos controles associados com o PVI (1), que assumimos ser o conjunto de todas as aplicações $\Phi \in L^2(\Omega \times [0, T]; \mathcal{O})$ tais que (1) tem solução.

O presente trabalho tem o objetivo de estabelecer um princípio estocástico do mínimo para o problema $(\mathcal{P})$.

Existência de solução

Para (1) temos as seguintes condiçõs sobre os coeficientes:Suponha que existe constantes $\beta \geq 0$, $\theta > 0$, $K > 0$ e um processo positivo adaptado $f \in L^1([0, T] \times \Omega; \mathbb{R})$ tal que as seguintes condições se cumprem para todo $\Phi \in \mathcal{O}$, v, v_1, $v_2 \in V$ e q.c. $(t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega$.

A1) (Hemicontinuidade) A aplicação $s \to \langle B(v_1 + sv_2, \Phi), v\rangle + \langle A(v_1 + sv_2, v\rangle$ é contínua sobre $\mathbb{R}$.

A2) (Local monotonicidade)

$$
\begin{aligned}
2\langle A(t, v_1 & , v_1) - A(t, v_2, v_2), v_1 - v_2\rangle + \\
& +2\langle B(v_1, \Phi) - B(v_2, \Phi), v_1 - v_2\rangle + \\
& \|\Xi(t, v_1) - \Xi(t, v_2)\|_2^2 \leq \\
& \leq (K + \rho(v_2))\|v_1 - v_2\|^2,
\end{aligned}
$$

onde $\rho : V \to [0, +\infty)$ é uma função mensurável e localmente limitada em V.

A3) (Coercividade)

$$2\langle A(t)v, v\rangle \quad +2\langle B(v,\Psi), v\rangle + \|\Xi(v)\|_2^2 \leq$$
$$\leq -\theta\|v\|_V^2 + K\|v\|^2 + f(t) + K\|\Psi\|_{\mathcal{O}}^2.$$

A4) (Crescimento)

$$\|A(t))v\|_{V'}^2 + \|B(v,\Psi)\|_{V'}^2 \leq (f(t) + K\|v||_V^2)(1 + \|v\|^\beta) + \|\Psi\|_{\mathcal{O}}^2.$$

Definição

Seja u_0 uma var. aleatória que não depende sobre $W(t)$. O processo estocástico $(u_\Phi(t))_{t\in\mathbb{T}} \in L^2(\Omega\times\mathbb{T};V)$, $\mathcal{F}_t-$ adaptado, com q.c. continuo em H, é uma solução a (1) se:

$$(u_\Phi(t), v) = \quad (u_0, v) + \int_0^t \langle Au_\Phi(s), v\rangle\, ds + \int_0^t (B(u_\Phi(s), \Phi(s)), v) ds + \\ + \int_0^t (v, \Xi(s, u_\Phi(s)) dW(s)) \tag{2}$$

q.c. para todo $v \in V$ and $t \in \mathbb{T}$.

A3) (Coercividade)

$$\begin{aligned} 2\langle A(t)v, v\rangle &+ 2\langle B(v,\Psi), v\rangle + \|\Xi(v)\|_2^2 \leq \\ &\leq -\theta\|v\|_V^2 + K\|v\|^2 + f(t) + K\|\Psi\|_{\mathcal{O}}^2. \end{aligned}$$

A4) (Crescimento)

$$\|A(t))v\|_{V'}^2 + \|B(v,\Psi)\|_{V'}^2 \leq (f(t) + K\|v\|_V^2)(1 + \|v\|^\beta) + \|\Psi\|_{\mathcal{O}}^2.$$

Definição

Seja u_0 uma var. aleatória que não depende sobre $W(t)$. O processo estocástico $(u_\Phi(t))_{t\in\mathbb{T}} \in L^2(\Omega\times\mathbb{T}; V)$, $\mathcal{F}_t-$ adaptado, com q.c. continuo em H, é uma solução a (1) se:

$$\begin{aligned} (u_\Phi(t), v) = \quad & (u_0, v) + \int_0^t \langle Au_\Phi(s), v\rangle\, ds + \int_0^t (B(u_\Phi(s), \Phi(s)), v) ds + \\ & + \int_0^t (v, \Xi(s, u_\Phi(s)) dW(s)) \end{aligned} \tag{2}$$

q.c. para todo $v \in V$ and $t \in \mathbb{T}$.

A existência e unicidade de solução vem de [4, Th. 1.1].

A3) (Coercividade)

$$\begin{aligned} 2\langle A(t)v, v\rangle & +2\langle B(v,\Psi), v\rangle + \|\Xi(v)\|_2^2 \leq \\ & \leq -\theta\|v\|_V^2 + K\|v\|^2 + f(t) + K\|\Psi\|_{\mathcal{O}}^2. \end{aligned}$$

A4) (Crescimento)

$$\|A(t))v\|_{V'}^2 + \|B(v,\Psi)\|_{V'}^2 \leq (f(t) + K\|v\|_V^2)(1+\|v\|^{\beta}) + \|\Psi\|_{\mathcal{O}}^2.$$

Definição

Seja u_0 uma var. aleatória que não depende sobre $W(t)$. O processo estocástico $(u_\Phi(t))_{t\in\mathbb{T}} \in L^2(\Omega\times\mathbb{T}; V)$, $\mathcal{F}_t-$ adaptado, com q.c. continuo em H, é uma solução a (1) se:

$$\begin{aligned} (u_\Phi(t), v) = \; & (u_0, v) + \int_0^t \langle Au_\Phi(s), v\rangle\, ds + \int_0^t (B(u_\Phi(s), \Phi(s)), v) ds + \\ & + \int_0^t (v, \Xi(s, u_\Phi(s)) dW(s)) \end{aligned} \tag{2}$$

q.c. para todo $v \in V$ and $t \in \mathbb{T}$.

A existência e unicidade de solução vem de [4, Th. 1.1].

Existência de controle ótimo

No caso em que o PVI (1) é da forma

$$\begin{aligned} du(t) &= (A(t, u(t), u(t)) + \Phi(u(t)))dt + \Xi(u(t))dW(t) \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{3}$$

O seguinte teorema garante que sob condições nos coeficientes temos a existência de um controle ótimo, a prova pode ser encontrada em [3].

Teorema

Existe um controle ótimo para o problema $(\mathcal{P})$.

Principio estocástico do mínimo

O resto da apresentação é uma adaptação do trabalho H. I. Breckner [2] desenvolvido para a equação estocástica de Navier-Stokes e do trabalho de Al-Hussein [1].
Iremos supor mais condições sobre os coeficientes de (1):

A5) $\Xi(\cdot)$ é Fréchet diferenciável com derivada $\Xi'(u) \in L^2(H, L_2(U; H))$.

A6) $B : V \times \mathcal{O} \to V'$, é tal que a aplicação $B(\cdot, \Phi)$ é Fréchet diferenciável e denotamos por $B_u(u, \Phi)$ sua derivada no ponto u.

A7) Para $u \in V$ fixo, temos

$$\langle B_u(u, \Phi)(v), v_1 - v_2 \rangle \leq K_2 \|v_1 - v_2\|_V \|v\| \rho_1(u),$$

onde $\rho_1 : H \to [0, +\infty)$ é uma função mensurável e localmente limitada em$H$.

A8) $\langle (B_u(u,\Phi) - B_u(v,\Phi_1))(w), z\rangle \le K_3 \|z\|_V \rho_1(u-v)\|w\|$.

A9) $2\langle B_u(v_1,\Phi)(v), v\rangle + 2\|\Xi_u(v_1)(v)\|_2^2 \le \theta_1(\rho_1(v_1))\|v\|^2$.

A10) $\|A(t)(v)\|_{V'}^2 + \|B_u(u,\Phi)(v)\|_{V'}^2 + \|\Xi_u(v)\|_{V'}^2 \le (1 + K_4\|v\|_V^2)(1 + \|u\|^2)$.

A11) $B : V \times \mathcal{O} \times \Omega \to V'$, é uma aplicação tal que para cada $u \in V$ a aplicação $\Phi \in \mathcal{O} \to B(u,\Phi) \in V'$ é Fréchet diferenciável e denotamos por $B_\Phi(u,\Phi)$ sua derivada no ponto Φ a qual satisfaz:

$$\|B_\Phi(u,\Phi)(\Upsilon) - B_\Phi(v,\Phi)(\Upsilon_1)\|_{V'} \le K_5\|\Upsilon - \Upsilon_1\|_{\mathcal{O}}$$

A12) $\|\Xi'(v)(w) - \Xi'(u)(w)\|_2 \le K_6\|w\|,\ \ \Xi'(0) = 0.$

Formulação do problema

Seja $\mathcal{O}_1$ um subconjunto convexo de $\mathcal{O}$. A aplicação $\Phi \in L^2(\Omega \times \mathbb{T}; \mathcal{O})$ tal que $\Phi(t) \in \mathcal{O}_1$ q.t.p. é chamada *controle admissível*. O conjunto dos controles admissíveis será denotedo por $\mathcal{U}$. Consideremos *funcional de custo*:

$$\mathcal{J}(\Phi) := \mathbb{E}\left[\int_0^T \Big(\mathcal{L}(u_\Phi(s), \Phi(s))\Big) ds + (\mathcal{K}(u_\Phi(T)))\right], \ \Phi \in \mathcal{U} \quad (4)$$

sempre que a integral em (4) exista e é finita. Assumiemos que as aplicações $\mathcal{L} : H \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}_+$ and $\mathcal{K} : H \to \mathbb{R}_+$ são mensuráveis e atendem as condicões:

H1) $\mathcal{L}(\cdot,\cdot)$ e $\mathcal{K}(\cdot)$ são contínuas Fréchet diferenciáveis.

H2) As derivadas de Fréchet $\mathcal{L}_u(\cdot,\cdot)$, $\mathcal{L}_\Phi(\cdot,\cdot)$ and $\mathcal{K}'(\cdot)$ satisfazem

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_u(u,\Phi)\| &\leq k_{\mathcal{L}}\|u\|,\ \mathcal{L}_u(0,\Phi)=0,\ \|\mathcal{L}_\Phi(u,\Phi)\| \leq k_{\mathcal{L}}\|\Phi\|_{\mathcal{O}} \text{ and} \\ \|\mathcal{K}'(u)\| &\leq k_{\mathcal{K}}\|u\| \end{aligned}$$

para $\Phi \in \mathcal{O}$, $u \in H$ e $k_{\mathcal{L}}$, $k_{\mathcal{K}}$ constantes positivas.

Seja $\Phi^\star$ um controle ótimo, a correspondente solução $u_{\Phi^\star}$ de (1) será denotado por $u^\star := u_{\Phi^\star}$. Consideremos o problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} dP(t) = \quad & A(t)P(t)dt + (B_u(u^\star(t), \Phi^\star)(P(t)))dt + \\ & +(B_\Phi(u^\star(t), \Phi^\star)(\Phi(t)))dt + \Xi'(u^\star(t))(P(t))dW(t), \\ P(0) \quad & = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Teorema

*Suponha que $\rho_1(u) \leq \|u\|$ e as condições **A1-A12** são satisfeitas. Então, existe uma única solução $(P(t))_{t\in\mathbb{T}}$ para a equação (5) qual é um processo com valores em V, $\mathcal{F} \times \mathcal{B}_\mathbb{T}-$mensurável e adaptado a filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Além disso, existe uma constante c tal que*

$$\mathbb{E}(\exp\left(-\int_0^T \rho_1(u^\star(t))dt\right) \quad \|P(T)\|^2)+$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\int_0^T & (\exp(-\rho_1(u^\star(s))ds)\, \|P(t)\|_V^2 dt) \leq \\
c\mathbb{E}(\int_0^T & \|u^\star(t)\|^2 dt + \mathbb{E}\int_0^T \|\Xi'(u^\star(t)\|_2^2 dt), \\
\mathbb{E}(\left(\exp - \int_0^T \rho_1(u^\star(t))dt\right)^2 & \|P(T)\|^4) + \\
\mathbb{E}(\int_0^T & (\exp(-\rho_1(u^\star(s))ds)\, \|P(t)\|_V^2 dt)^2 \leq \\
c(\mathbb{E}(\int_0^T & \|u^\star(t)\|^2 dt)^2 + \mathbb{E}(\int_0^T \|\Xi'(u^\star(t)\|_2^2 dt))^2
\end{aligned}
$$

Equação Adjunta

Há uma conexão entre BSDEs e o principio de máximo e a equa cão (1). Para explorar esta conexão consideremos o *Hamiltoniano*:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}: &\quad V \times \mathcal{O} \times V \times L_2(U;H) \to \mathbb{R}, \\ \mathcal{H}(u,\Phi,v,Z) &\quad := \mathcal{L}(u,\Phi) + \langle B(u,\Phi), v\rangle + \langle \Xi(u), Z\rangle_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Agora, consideremos a equação associada com (1) qual é dada pelo seguinte problema envolvendo a BSPDE:

$$\begin{aligned} -dv^{\Phi}(t) = &\quad (A^{\star} v^{\Phi}(t) + \nabla_u \mathcal{H}(u^{\Phi}(t), \Phi(t), v^{\Phi}(t), Z^{\Phi}(t)))dt - \\ &\quad Z^{\Phi}(t) dW(t), \\ v^{\Phi}(T) = &\quad \nabla \mathcal{K}(u^{\Phi}(T)), \end{aligned} \tag{7}$$

onde ∇ denote a gradiente.

Definition

Aqui entendemos que o $\mathcal{F}_t-$adaptada par (v, Z) em $L^2(\Omega \times \mathbb{T}; H) \times L^2(\Omega \times \mathbb{T}; L_2(U; H))$ é uma solução de (7) se o seguinte é atendido

$$\begin{aligned}(v^{\Phi}\,(t), y) = (v^{\Phi}(T), y) + \textstyle\int_t^T (\langle A^{\star} v^{\Phi}(s), y\rangle + \\ (\nabla_u \mathcal{L}(u^{\Phi}(s), \Phi(s)), y)_V ds + \textstyle\int_t^T \langle B_u(u^{\Phi}(s), \Phi(t))(y), v^{\Phi}(s)\rangle + \\ (\Xi_u(u^{\Phi}(s))(y), Z^{\Phi}(s))_2) ds - \textstyle\int_t^T (y, Z^{\Phi}(s) dW(s))\end{aligned} \tag{8}$$

q.t.p. para todo $y \in V$ e $t \in \mathbb{T}$.

Principais Estimativas

Seja $\Phi^\star$ um controle ótimo e seja $u^{\Phi^\star}$ a corresponte solução de (1) que será abreviada por $u^\star$. Let Φ be such that $\Phi^\star + \Phi \in \mathcal{U}$. Para $0 \leq \epsilon \leq 1$ o controle:

$$\Phi_\epsilon(t) = \Phi^\star(t) + \epsilon\Phi(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

ao qual é associada a solução de (1), u^{Φ_ϵ}, qual será abreviado por u_ϵ.

Lemma

Com a notação anterior

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}(e(t)(\|(u_\epsilon - u^\star)(t)\|^2) = O(\epsilon^2), \tag{9}$$

onde $e(t) = e^{-\int_0^t K+\rho(u^\star(s))ds}$ *e* K *é a constante em* **A2**.

Lemma

Sob as condições do último lemma e **A5**-**A12**. *Seja* $\Delta_\epsilon(t) = \frac{u_\epsilon(t) - u^\star(t) - \epsilon P(t)}{\epsilon}$ *onde* P *é a solução para a equação (5). Então,*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{t \in \mathbb{T}} \mathbb{E}(\|\Delta_\epsilon(t)\|^2) = 0 \tag{10}$$

Theorem

Assumindo **A5**-**A12**. *Então, para cada* $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\Phi_\epsilon) - \mathcal{J}(\Phi^\star) \quad &= \epsilon \mathbb{E}(\mathcal{K}'(u^\star(T), P(T))) + \\ &\epsilon \mathbb{E}(\int_0^T (\mathcal{L}_u(u^\star(t), \Phi^\star(t)), P(t)) dt) + \\ &\mathbb{E}(\int_0^T (\mathcal{L}(u^\star(t), \Phi_\epsilon(t)) - \mathcal{L}(u^\star(t), \Phi^\star(t))) dt) + o(\epsilon). \end{aligned} \tag{11}$$

Lemma

Suponha que **A1**-**A12**, **H1** *e* **H2** *são satisfeitas. Então, a solução* $(v^\star, Z^\star)$ *da equação (7) satisfaz*

$$\begin{aligned}\epsilon \quad & \mathbb{E}\left(v^\star(T), P(T)\right) + \epsilon\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathcal{L}_u(u^\star(t), \Phi^\star(t))P(t)dt\right] + \\ & \mathbb{E}\left[\int_0^T \mathcal{H}(u^\star(t), \Phi_\epsilon(t), v^\star(t), Z^\star(t)) - \mathcal{H}(u^\star(t), \Phi^\star(t), v^\star(t), Z^\star(t))dt \right. \\ & -\mathbb{E}\left[\int_0^T (v^\star(t), B(u^\star(t), \Phi_\epsilon(t)) - B(u^\star(t), \Phi^\star(t)))dt\right] \geq o(\epsilon).\end{aligned} \tag{12}$$

Lemma

Suponha que **A1**-**A12** *são atendidas. Temos*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(v^\star(T), P(T)\right) &= -\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathcal{L}_u(u^\star(t), \Phi^\star(t))P(t)dt\right] + \\ &\mathbb{E}\left[\int_0^T (v^\star(t), B_\Phi(u^\star(t), \Phi^\star(t))\Phi(t)dt\right].\end{aligned} \tag{13}$$

Agora nosso resultado principal.

Theorem

Suponha que **A1**-**A12**, **H1** *e* **H2** *são satisfeitas. Dado um par ótimo* $(u^\star, \Phi^\star)$. *Então, existe um único par* $(v^\star, Z^\star)$ *solucionando a correspondente adjunta BSE (7) tal que a seguinte desigualdade variacional é satisfeita*

$$(\nabla_\Phi \mathcal{H}(u^\star(t), \Phi^\star(t), v^\star(t), Z^\star(t)), \Phi^\star(t) - \Phi(t))_{\mathcal{O}} \leq 0, \qquad (14)$$

for all $\Phi \in \mathcal{O}_1$, *q.t.p.* $t \in \mathbb{T}$, *q.c.*

Exemplo

1) Equação estocástica do calor:
Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ com $n \geq 1$ um dominio limitado. Tomemos $H = L^2(D)$, $V = H_0^1(D)$ e $V' = H^{-1}(D)$. $A = \Delta$, $B(u, \Phi) = Tu + T_1\Phi$ onde T e T_1 são aplicações lineares.
O funcional de custo é da forma

$$J(\Phi) = \mathbb{E}(\int_0^T \|\Phi(t)\|_{\mathcal{O}}^2 dt) + \mathbb{E}(\mathcal{K}(u_\Phi(T))).$$

Assim o Hamiltoniano é da forma

$$\mathcal{H}(u, \Phi, v, Z) = \|\Phi\|_{\mathcal{O}}^2 + \langle Tu + T_1\Phi, v\rangle + \langle \Xi(u), Z\rangle_2$$

Já que $\mathcal{H}_\Phi(u, \Phi, v, Z)(\cdot) = 2(\Phi, \cdot) + \langle T_1(\cdot), v\rangle$ Temos que o controle $\Phi^\star = -\frac{1}{2}(T_1)^\star v^\star$ é um candidato a resolver a equação (14), já que este controle é admissível, este é um controle ótimo.

Referências

Al-Hussein, A.: Necessary Conditions for Optimal Control of Stochastic Evolution Equations in Hilbert Spaces. Appl Math Optim, 63: 385-400 (2011).

Breckner H. I., Aproximation and Optimal Control of the Stochastic Navier-Stokes Equation, Ph.D. Thesis, Universidade Martin Luther, Halle Wittenberg. disponível em https://sundoc.bibliothek.uni-halle.de/diss-online/99/99H101/prom.pdf.

Coayla-Teran E.A., Magalhães P. M. D. de e Ferreira J., Existence of Optimal Controls for SPDEs with Locally monotone Coefficients, International Journal of Control. Online published: https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1508849 (2018)..

W. Liu and M. Röckner, SPDE in Hilbert space with locally