Universalidade: O princípio fundamental da teoria das probabilidades

Dirk Erhard

UFBA

Espaço de probabilidade

Duas regras fundamentais:

[1] A probabilidade de A ou B é a soma das probabilidades se eles não podem ocorrer ao mesmo tempo, ou seja

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \quad \text{se } A \cap B = \emptyset.$$

Espaço de probabilidade

Duas regras fundamentais:

[1] A probabilidade de A ou B é a soma das probabilidades se eles não podem ocorrer ao mesmo tempo, ou seja

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \quad \text{se } A \cap B = \emptyset.$$

[2] A probabilidade que algo acontece é 1, ou seja,

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

onde Ω é o espaço amostral, i.e., o conjunto de todos os eventos possíveis.

PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS

SIMETRIA:

Se resultados diferentes forem equivalentes, eles devem ter a mesma probabilidade.

PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS

SIMETRIA:

Se resultados diferentes forem equivalentes, eles devem ter a mesma probabilidade.

UNIVERSALIDADE:

Se um resultado for a consequência de muitos eventos aleatórios, então os detalhes de cada um desses eventos não importa.

Teorema central do limite

https://www.youtube.com/watch?v=4HpvBZnHOVI

Soma de Rieman no intervalo $[0,1]$

- Partição de $[0,1]$: $\underline{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_k)$ com $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$.

Soma de Rieman no intervalo $[0,1]$

- Partição de $[0,1]$: $\underline{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_k)$ com $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$.
- Soma de Rieman de uma função $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$R(\varphi, \underline{t}) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(t_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Soma de Rieman no intervalo $[0, 1]$

- Partição de $[0, 1]$: $\underline{t} = (t_0, t_1, \dots, t_k)$ com $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$.
- Soma de Rieman de uma função $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$R(\varphi, \underline{t}) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(t_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Theorem

Seja $\underline{t}^n$ uma sequência de partições de $[0, 1]$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} mesh(\underline{t}^n) := \lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le k_n} (t_i^n - t_{i-1}^n) = 0.$$

Então, para cada função contínua $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} R(\varphi, \underline{t}^n) = \int_0^1 \varphi(x)\, dx.$$

Reformulação I

• $p_1, \dots p_k \in [0,1]$ tal que $\sum_i p_i = 1$ e $\underline{t} = (t_0, \dots, t_k)$ uma partição. Então

$$\mu_{\underline{t}}(\cdot) = \sum_i p_i \delta_{t_i}(\cdot)$$

defina uma medida de probabilidade.

Reformulação I

- $p_1, \dots p_k \in [0,1]$ tal que $\sum_i p_i = 1$ e $\underline{t} = (t_0, \dots, t_k)$ uma partição. Então

$$\mu_{\underline{t}}(\cdot) = \sum_i p_i \delta_{t_i}(\cdot)$$

defina uma medida de probabilidade.

- Integral ou esperança:

$$\int \varphi \, d\mu_{\underline{t}} = \sum_i \varphi(t_i) p_i.$$

Reformulação II

- Consideramos aqui $p_i = t_i - t_{i-1}$, ou seja

$$\mu_{\underline{t}}(\cdot) = \sum_i p_i \delta_{t_i}(\cdot) \quad \text{com } p_i = t_i - t_{i-1}$$

Reformulação II

- Consideramos aqui $p_i = t_i - t_{i-1}$, ou seja

$$\mu_{\underline{t}}(\cdot) = \sum_i p_i \delta_{t_i}(\cdot) \quad \text{com } p_i = t_i - t_{i-1}$$

- Partição uniforma: Se $\underline{t} = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1)$, então $\mu_{\underline{t}}$ é a distribuição uniforma em $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$.

Reformulação III

Observação chave:

$$R(\varphi, \underline{t}) = \sum_i \varphi(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \int \varphi \, d\mu_{\underline{t}}$$

Reformulação III

Observação chave:

$$R(\varphi, \underline{t}) = \sum_i \varphi(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \int \varphi \, d\mu_{\underline{t}}$$

Theorem

Seja $\underline{t}^n$ uma sequência de partições tal que $mesh(\underline{t}^n) \to 0$ e seja $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, então

$$\int \varphi \, d\mu_{\underline{t}^n} = \int_0^1 \varphi(x) \, dx.$$

Reformulação III

Observação chave:

$$R(\varphi, \underline{t}) = \sum_i \varphi(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \int \varphi \, d\mu_{\underline{t}}$$

Theorem

Seja $\underline{t}^n$ uma sequência de partições tal que $mesh(\underline{t}^n) \to 0$ e seja $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, então

$$\int \varphi \, d\mu_{\underline{t}^n} = \int_0^1 \varphi(x) \, dx.$$

- Limite: $d\mu_{\underline{t}^n} \to dx$.
- Universalidade: O limite não depende da escolha específica da partição.

DESCOBERTA DO MOVIMENTO BROWNIANO

Jan Ingenhousz (1785: pó de carvão em álcool)
Robert Brown (1827: pequenos grãos de pólen suspensos em água)
`https://www.youtube.com/watch?v=cDcprgWiQEY`

Joseph Fourier

Cientista, participou na expedição de Napoleão no Egito (1798-1801), governador e secretário do Instituto do Egito, prefeito de Isère.

Joseph Fourier

Cientista, participou na expedição de Napoleão no Egito (1798-1801), governador e secretário do Instituto do Egito, prefeito de Isère.

Lei de Fourier: A difusão de calor se desenvolve conforme a equação do calor

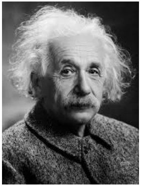
$$\partial_t u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u.$$

Einstein e Smoluchowski

Independente um do outro (em 1905-1906) desenvolveram a teoria do movimento Browniano baseado no trabalho de Lord Rayleigh.

Einstein e Smoluchowski

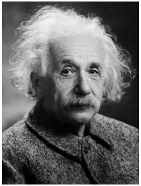
Independente um do outro (em 1905-1906) desenvolveram a teoria do movimento Browniano baseado no trabalho de Lord Rayleigh.



Física: O movimento aleatório é causado pelas colisões com as partículas de água.
Matemática: A probabilidade de encontrar uma partícula num certo lugar pode ser descrita pela solução da equação do calor.

Einstein e Smoluchowski

Independente um do outro (em 1905-1906) desenvolveram a teoria do movimento Browniano baseado no trabalho de Lord Rayleigh.



Física: O movimento aleatório é causado pelas colisões com as partículas de água.
Matemática: A probabilidade de encontrar uma partícula num certo lugar pode ser descrita pela solução da equação do calor.

A existência de átomos foi provada usando as predições quantitativas baseadas na teoria do movimento Browniano (Perrin 1908, prêmio Nobel em 1926).

Mais sobre o movimento Browniano

O movimento Browniano foi usado por Bachelier (1900) e mais tarde por Black e Scholes (1973, prêmio Nobel de Economia em 1997) para modelar a evolução do preço de uma ação no mercado de ações .

Equação de KPZ anisotropica

- A equação

$$\partial_t u = \Delta u + (\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2 + \xi,$$

onde ξ é um ruido branco é conjecturada de ser um outro objeto universal.

Equação de KPZ anisotropica

- A equação
$$\partial_t u = \Delta u + (\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2 + \xi,$$
onde ξ é um ruido branco é conjecturada de ser um outro objeto universal.
- Problema: A equação não faz sentido.

Equação de KPZ anisotropica

- A equação

$$\partial_t u = \Delta u + (\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2 + \xi,$$

onde ξ é um ruido branco é conjecturada de ser um outro objeto universal.

- Problema: A equação não faz sentido.

Theorem

Seja ξ_n uma approximação suave de ξ e sejam ν_n e λ_n constantes apropriados, então

$$\partial_t u^n = \nu_n \Delta u^n + \lambda_n [(\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2] + \sqrt{\nu_n} \xi_n \tag{1}$$

tem subsequências convergentes.