O espectro dos ultrafiltros em cardinais singulares

Charles Morgan
(UCL, Londres)
charles.morgan @ ucl.ac.uk
ou charles.jg.morgan @ email.com

Plano da palestra

Ultrafiltros

Seja X um conjunto. $U \subseteq \mathcal{P}(X)$ é um *filtro* se

(fechado pra cima)	$\forall A, B \subseteq X\ (A \in U \ \&\ A \subseteq B \implies B \in U)$
(fechado sob $\cap$s)	$\forall A, B \subseteq X\ (A \in U \ \&\ B \in U \implies A \cap B \in U)$
(não trivial)	$\emptyset \notin U$

Ultrafiltros

Seja X um conjunto. $U \subseteq \mathcal{P}(X)$ é um *filtro* se

(fechado pra cima) $\forall A, B \subseteq X \; (A \in U \;\&\; A \subseteq B \implies B \in U)$

(fechado sob $\cap$s) $\forall A, B \subseteq X \; (A \in U \;\&\; B \in U \implies A \cap B \in U)$

(não trivial) $\emptyset \notin U$

U é um *ultrafiltro* se também

(maximalidade) $\forall A \subseteq X \; (A \in U \text{ ou } X \setminus A \in U)$

Ultrafiltros

Seja X um conjunto. $U \subseteq \mathcal{P}(X)$ é um *filtro* se

(fechado pra cima) $\forall A, B \subseteq X \; (A \in U \;\&\; A \subseteq B \implies B \in U)$

(fechado sob $\cap$s) $\forall A, B \subseteq X \; (A \in U \;\&\; B \in U \implies A \cap B \in U)$

(não trivial) $\emptyset \notin U$

U é um *ultrafiltro* se também

(maximalidade) $\forall A \subseteq X \; (A \in U$ ou $X \setminus A \in U)$

U é *uniforme* se

$$\forall A \in U \; (|A| = |X|)$$

Ultrafiltros

Seja X um conjunto. $U \subseteq \mathcal{P}(X)$ é um *filtro* se

(fechado pra cima) $\forall A, B \subseteq X \ (A \in U \ \& \ A \subseteq B \implies B \in U)$

(fechado sob $\cap$s) $\forall A, B \subseteq X \ (A \in U \ \& \ B \in U \implies A \cap B \in U)$

(não trivial) $\emptyset \notin U$

U é um *ultrafiltro* se também

(maximalidade) $\forall A \subseteq X \ (A \in U \text{ ou } X \setminus A \in U)$

U é *uniforme* se

$$\forall A \in U \ (|A| = |X|)$$

Utilidade? Veja o curso de Prof. Samuel; o artigo de David Galvin https://www3.nd.edu/~dgalvin1/pdf/ultrafilters.pdf

O espectro dos ultrafiltros

Seja κ um cardinal infinito.

Um base para U, um ultrafiltro uniforme sob κ, é um conjunto $U' \subseteq U$ tal que $\forall X \in U\ \exists Y \in U'\ (|Y \setminus X| < \kappa)$.

O caŕater de U, $\mathrm{Ch}(U)$, é $\min(\{|U'| : U' \text{ um base para } U\})$.

O espetro de caráters, $\mathrm{Sp}_\chi(\kappa)$, é $\{\mathrm{Ch}(U) : U \text{ ulf. unif. sob } \kappa\}$.

O numero de ultrafiltro para κ, $\mathfrak{u}(\kappa)$ é $\min(\mathrm{Sp}_\chi(\kappa))$.

Cardinais e ordinais

Cardinais Bijeção entre X e Y sse tem a mesma cardinalidade.

Cardinais e ordinais

Cardinais Bijeção entre X e Y sse tem a mesma cardinalidade.

Ordinais – conjuntos em que $\in$ é uma boa ordem. *cf.* Mat. Disc. II (???)

Definição por indução transfinita (von Neumann): "Cada ordinal é o conjunto bem ordinado (pelo $\in$) de todos os ordinais menores"

Cardinais e ordinais

Cardinais Bijeção entre X e Y sse tem a mesma cardinalidade.

Ordinais – conjuntos em que $\in$ é uma boa ordem. *cf.* Mat. Disc. II (???)

Definição por indução transfinita (von Neumann): "Cada ordinal é o conjunto bem ordinado (pelo $\in$) de todos os ordinais menores"

$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots, \omega.2\ (= \omega + \omega)$, $\omega.2 + 1, \omega.2 + 2, \ldots, \omega.3, \omega.4, \ldots, \omega^2\ (= \omega.\omega), \ldots, \omega^3, \omega^4, \ldots,$ $\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots, \varepsilon_0\ (= \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}), \ldots\ldots, \omega_1\ (= \aleph_1), \omega_1 + 1, \ldots,$ $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\omega, \omega_{\omega+1}, \ldots\ldots, \omega_{\omega_1}, \omega_{\omega_1+1}, \ldots$

Cardinais e ordinais

Cardinais Bijeção entre X e Y sse tem a mesma cardinalidade.

Ordinais – conjuntos em que $\in$ é uma boa ordem. *cf.* Mat. Disc. II (???)

Definição por indução transfinita (von Neumann): "Cada ordinal é o conjunto bem ordinado (pelo $\in$) de todos os ordinais menores"

$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, \omega.2\ (=\omega+\omega),$
$\omega.2+1, \omega.2+2, \ldots, \omega.3, \omega.4, \ldots, \omega^2\ (=\omega.\omega), \ldots, \omega^3, \omega^4, \ldots,$
$\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots, \varepsilon_0\ (=\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}), \ldots\ldots, \omega_1\ (=\aleph_1), \omega_1+1, \ldots,$
$\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\omega, \omega_{\omega+1}, \ldots\ldots, \omega_{\omega_1}, \omega_{\omega_1+1}, \ldots$

δ é um ordinal limite se $\forall\alpha < \delta\ \ \alpha+1 < \delta$; se não é um successor.

Cardinais e ordinais

Cardinais Bijeção entre X e Y sse tem a mesma cardinalidade.

Ordinais – conjuntos em que $\in$ é uma boa ordem. *cf.* Mat. Disc. II (???)

Definição por indução transfinita (von Neumann): "Cada ordinal é o conjunto bem ordinado (pelo $\in$) de todos os ordinais menores"

$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots, \omega.2\ (= \omega + \omega)$, $\omega.2 + 1, \omega.2 + 2, \ldots, \omega.3, \omega.4, \ldots, \omega^2\ (= \omega.\omega), \ldots, \omega^3, \omega^4, \ldots,$ $\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots, \varepsilon_0\ (= \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}), \ldots\ldots, \omega_1\ (= \aleph_1), \omega_1 + 1, \ldots,$ $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\omega, \omega_{\omega+1}, \ldots\ldots, \omega_{\omega_1}, \omega_{\omega_1+1}, \ldots$

δ é um ordinal limite se $\forall \alpha < \delta\ \ \alpha + 1 < \delta$; se não é um successor.

Um cardinal κ é um limite forte se $\forall \lambda < \kappa\ \ 2^\lambda < \kappa$.

Cardinais e ordinais

Cardinais Bijeção entre X e Y sse tem a mesma cardinalidade.

Ordinais – conjuntos em que $\in$ é uma boa ordem. *cf.* Mat. Disc. II (???)

Definição por indução transfinita (von Neumann): "Cada ordinal é o conjunto bem ordinado (pelo $\in$) de todos os ordinais menores"

$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots, \omega.2\ (= \omega + \omega)$,
$\omega.2 + 1, \omega.2 + 2, \ldots, \omega.3, \omega.4, \ldots, \omega^2\ (= \omega.\omega), \ldots, \omega^3, \omega^4, \ldots,$
$\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots, \varepsilon_0\ (= \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}), \ldots\ldots, \omega_1\ (= \aleph_1), \omega_1 + 1, \ldots,$
$\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\omega, \omega_{\omega+1}, \ldots\ldots, \omega_{\omega_1}, \omega_{\omega_1+1}, \ldots$

δ é um ordinal limite se $\forall \alpha < \delta\ \ \alpha + 1 < \delta$; se não é um successor.

Um cardinal κ é um limite forte se $\forall \lambda < \kappa\ \ 2^\lambda < \kappa$.

[limite ... $\forall \lambda < \kappa\ \ \lambda^+ < \kappa$.]

Cardinais e ordinais

Cardinais Bijeção entre X e Y sse tem a mesma cardinalidade.

Ordinais – conjuntos em que $\in$ é uma boa ordem. *cf.* Mat. Disc. II (???)

Definição por indução transfinita (von Neumann): "Cada ordinal é o conjunto bem ordinado (pelo $\in$) de todos os ordinais menores"

$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, \omega.2\ (=\omega+\omega),$
$\omega.2+1, \omega.2+2, \ldots, \omega.3, \omega.4, \ldots, \omega^2\ (=\omega.\omega), \ldots, \omega^3, \omega^4, \ldots,$
$\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots, \varepsilon_0\ (=\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}), \ldots\ldots, \omega_1\ (=\aleph_1), \omega_1+1, \ldots,$
$\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\omega, \omega_{\omega+1}, \ldots\ldots, \omega_{\omega_1}, \omega_{\omega_1+1}, \ldots$

δ é um ordinal limite se $\forall\alpha < \delta\ \ \alpha+1 < \delta$; se não é um successor.

Um cardinal κ é um limite forte se $\forall\lambda < \kappa\ \ 2^\lambda < \kappa$.

[limite ... $\forall\lambda < \kappa\ \ \lambda^+ < \kappa$.]

(Escrevemos $\aleph_\alpha$ ou ω_α intercambiávelmente (indexes ordinais α).)

A teoria dos conjuntos

(Oberwolfach 2020 Abstract), “Set theory continues to experience dramatic progress, both in pure set theory, with its fundamental techniques of forcing, large cardinals, and inner model theory, and in applied set theory, with its deep connections to other areas of mathematics. Hot topics include:

A teoria dos conjuntos

(Oberwolfach 2020 Abstract), “Set theory continues to experience dramatic progress, both in pure set theory, with its fundamental techniques of forcing, large cardinals, and inner model theory, and in applied set theory, with its deep connections to other areas of mathematics. Hot topics include:
(Pure Set Theory) Forcing axioms, iteration theorems for various classes of forcings, cardinal characteristics and descriptive set theory of the continuum and of generalized Baire spaces, HOD (the hereditarily ordinal definable sets), inner model theory and the core model induction, singular cardinal combinatorics and cardinal arithmetic (pcf theory), partition theorems, Borel reducibility;

A teoria dos conjuntos

(Oberwolfach 2020 Abstract), "Set theory continues to experience dramatic progress, both in pure set theory, with its fundamental techniques of forcing, large cardinals, and inner model theory, and in applied set theory, with its deep connections to other areas of mathematics. Hot topics include:
(Pure Set Theory) Forcing axioms, iteration theorems for various classes of forcings, cardinal characteristics and descriptive set theory of the continuum and of generalized Baire spaces, HOD (the hereditarily ordinal definable sets), inner model theory and the core model induction, singular cardinal combinatorics and cardinal arithmetic (pcf theory), partition theorems, Borel reducibility;
(Applied Set Theory) Borel and measurable combinatorics, structural Ramsey theory, set theory and operator algebras, topological dynamics and ergodic theory, set theory and Banach spaces, metric structures."

Pesquisa na matemática pura

Porque fazer?

Pesquisa na matemática pura

~~Porque fazer?~~

Porque não?

Pesquisa na matemática pura

~~Porque fazer?~~

~~Porque não?~~

Como é feito?

Internal/external

É a distinção significativa?

Problemas de categorização.

Recombinação de ramos – a teoria não e um arvore.

Viajando entre modelos da teoria dos conjuntos

Absoluto – propriedades de todos os models

Não absoluto – coisas que se ve ou não em modelos determinados.

Viajando entre modelos da teoria dos conjuntos

Absoluto – propriedades de todos os models

Não absoluto – coisas que se ve ou não em modelos determinados.

Duas modas de explorar (coleções de) modelos:

- Forcing . . . uma forma fazer extensões.
  (Formalmente algo parecido a fazer uma extensão libre de um corpo e tomar o quociente por um ideal.)
- Examinar modelos internais.

Cofinalidade

Seja γ, δ ordinais. Uma aplicação $f : \gamma \longrightarrow \delta$ é cofinal se

$$\forall \beta < \delta \; \exists \alpha < \gamma \;\; \beta < f(\alpha).$$

Cofinalidade

Seja γ, δ ordinais. Uma aplicação $f : \gamma \longrightarrow \delta$ é cofinal se

$$\forall \beta < \delta \; \exists \alpha < \gamma \;\; \beta < f(\alpha).$$

Seja κ um cardinal. A cofinalidade de κ, $\mathrm{cf}(\kappa)$, é o mínimo λ tal que existe uma $f : \lambda \longrightarrow \kappa$ que é cofinal.

Cofinalidade

Seja γ, δ ordinais. Uma aplicação $f : \gamma \longrightarrow \delta$ é cofinal se

$$\forall\beta < \delta\ \exists\alpha < \gamma\ \ \beta < f(\alpha).$$

Seja κ um cardinal. A cofinalidade de κ, $\mathrm{cf}(\kappa)$, é o mínimo λ tal que existe uma $f : \lambda \longrightarrow \kappa$ que é cofinal.

κ é singular se $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$; κ é regular se $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

Cardinais singulares e teoria do pcf

Ideologia da teoria de pcf: se $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ e $\langle \kappa_i : i < \lambda \rangle$ é cofinal, então deveriamos estudar $\Pi_{i<\lambda}\kappa_i$ em vez de 2^κ.

Cardinais singulares e teoria do pcf

Ideologia da teoria de pcf: se $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ e $\langle \kappa_i : i < \lambda \rangle$ é cofinal, então deveriamos estudar $\Pi_{i<\lambda}\kappa_i$ em vez de 2^κ.

Escalos, $\langle f_i : i < \lambda^+ \rangle$ t.q. $\forall g \in \Pi_{i<\lambda}\kappa_i \exists i < \lambda \; g < f_i$, são significativos quando existem.

Cardinais grandes e forcing

Cardinais grandes: calibacção (linear) de hipótheses para aumentar os axiomas basicas.

Cardinais grandes e forcing

Cardinais grandes: calibaccão (linear) de hipótheses para aumentar os axiomas basicas.

Determina mais coisas (que ficam absolutas nas modelos aonde o hipótese opte).

Cardinais grandes e forcing

Cardinais grandes: calibaccão (linear) de hipótheses para aumentar os axiomas basicas.

Determina mais coisas (que ficam absolutas nas modelos aonde o hipótese opte).

Embora, dão mais recursos em termos das duas modas principais (forcing, modeis internos) de navegar.

Cardinais grandes e forcing

Cardinais grandes: calibaccão (linear) de hipótheses para aumentar os axiomas basicas.

Determina mais coisas (que ficam absolutas nas modelos aonde o hipótese opte).

Embora, dão mais recursos em termos das duas modas principais (forcing, modeis internos) de navegar.

Observacão fenomenal: Quase todos podem ser enuciados em termos de ultrafiltros.

e.g., κ é mesurável sse existe um ultrafiltro uniforme U sob κ t.q. dado qualquer $\{A_i : i < \lambda\}$ com $\lambda < \kappa$ e $\forall i < \lambda\ A_i \in U$ temos $\bigcap_{i<\lambda} A_i \in U$

Resultados anteriores

São consistentes (relativos aos hipotheses sobre cardinais grandes apropriados ao teorems especificas):

(Garti e Shelah) $\mathrm{cf}(\kappa) = \lambda < \kappa$, o tamanho de 2^κ é artibitrário e $\mathfrak{u}(\kappa) = \kappa^+$.

(Garti, Magidor e Shelah) sendo $\langle \tau_i : i < j \rangle$ uma sequencia incremente de cardinais regulares major de que κ:
$\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$, κ um limite forte, os τ_i ficam regulares e $\{\tau_i : i < j\} \subseteq \mathrm{Sp}_\chi(\kappa)$.

(Garti, Gitik e Shelah) $\mathfrak{u}(\aleph_\omega) < 2^{\aleph_\omega}$ e $\aleph_\omega$ um limite forte.

(Gitik) o caráter de um ultrafiltro uniforme sob um cardinal singular é singular.

Resultados de James Cummings e C.M.

São consistentes (relativos aos hipotheses sobre cardinais grandes apropriados ao teorems especificas):

(arxiv) sendo $\langle \tau_i : i < j \rangle$ uma sequencia incremente de cardinais regulares major de que κ:
$\mathrm{cf}(\kappa) = \lambda < \kappa$, κ um limite forte, $2^{<\kappa} = \kappa$, os τ_i ficam regulares e $\{\tau_i : i < j\} \subseteq \mathrm{Sp}_\chi(\kappa)$.

(em preparação) $\mathfrak{u}(\alpha_{\omega_1}) < 2^{\aleph_{\omega_1}}$ com $\aleph_{\omega_1}$ um limite forte.

Chave aos demostrações

Um analise refinado do forcing de tipo “Radin feito com extenders” de Carmi Merimovich e analise de um novo forcing nesta linha mas com colapsos embutidos que possibilita entender o teoria de pcf nessas extensões.

Obrigado!