

Espaços anisotrópicos e cones convexos com aplicações a linear response

Armando Castro
Universidade Federal da Bahia

Salvador, 07 de novembro de 2019

Motivação: Estados de Equilíbrio

Durante essa palestra f denotará um sistema dinâmico discreto C^r , $r \geq 1$, definido em uma variedade compacta M .

Pelo **princípio variacional**, a pressão topológica

$$P_\phi(f) = \sup\{h_\mu(f) + \int \phi d\mu; \mu \in \mathcal{M}_f^1(X)\},$$

onde h_μ denota a entropia métrica de μ .

Nesse caso, μ é chamado de **estado de equilíbrio para** (f, ϕ) se realizar o supremo acima.

Operador de Perron-Frobenius

Para fixar idéias, vamos supor adicionalmente que nossa dinâmica seja um difeomorfismo local.

Seja $W =$ espaço apropriado de funções

O **operador de Perron-Frobënus** associado a dinâmica f e potencial ϕ é o operador $L_{f,\phi} : W \rightarrow W$ dado por

$$L_{f,\phi}(\varphi)(x) := \sum_{j=1}^{\deg(f)} \varphi(x_j) e^{\phi(x_j)}$$

para $\varphi \in W$, onde $f^{-1}(x) = \{x_1, \dots, x_{\deg(f)}\}$ para todo $x \in M$.

Operador de Perron-Frobenius

Para fixar idéias, vamos supor adicionalmente que nossa dinâmica seja um difeomorfismo local.

Seja $W =$ espaço apropriado de funções

O **operador de Perron-Frobënus** associado a dinâmica f e potencial ϕ é o operador $L_{f,\phi} : W \rightarrow W$ dado por

$$L_{f,\phi}(\varphi)(x) := \sum_{j=1}^{\deg(f)} \varphi(x_j) e^{\phi(x_j)}$$

para $\varphi \in W$, onde $f^{-1}(x) = \{x_1, \dots, x_{\deg(f)}\}$ para todo $x \in M$.

Obs: Se $W = C^0(M)$, com M espaço métrico compacto:

$$L_{f,\phi} : C^0(M) \rightarrow C^0(M)$$

$$(L_{f,\phi})^* : \mathcal{M}(M) \rightarrow \mathcal{M}(M)$$

Operador de Perron-Frobenius

Bowen: Se $W = C^0(M)$ e f expansora:

- $(L_{f,\phi})^* : \mathcal{M}(M) \rightarrow \mathcal{M}(M)$ possui um autovalor dominante associado a uma única automedida de probabilidade boreliana ν .

Operador de Perron-Frobenius

Bowen: Se $W = C^0(M)$ e f expansora:

- $(L_{f,\phi})^* : \mathcal{M}(M) \rightarrow \mathcal{M}(M)$ possui um autovalor dominante associado a uma única automedida de probabilidade boreliana ν .
- $L_{f,\phi} : C^0(M) \rightarrow C^0(M)$ possui um autovalor dominante associada a uma única autofunção normalizada η .

Operador de Perron-Frobenius

Bowen: Se $W = C^0(M)$ e f expansora:

- $(L_{f,\phi})^* : \mathcal{M}(M) \rightarrow \mathcal{M}(M)$ possui um autovalor dominante associado a uma única automedida de probabilidade boreliana ν .
- $L_{f,\phi} : C^0(M) \rightarrow C^0(M)$ possui um autovalor dominante associada a uma única autofunção normalizada η .
- $\mu = \int \eta d\nu$ é o estado de equilíbrio associado a f e ϕ .

Linear response formula

A diferenciabilidade de estados de equilíbrio $\mu_{f,\phi}$ com respeito a dinâmica f e o potencial ϕ , bem como a fórmula dessas derivadas, chama-se *linear response formula*.

Em sentido mais clássico, e fraco, corresponde à diferenciabilidade de:

$$(f, \phi) \mapsto \int_M \varphi d\mu_{f,\phi} \in \mathbb{R},$$

onde $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é algum observável fixado.

Linear response formula- sentido forte

Em sentido forte, corresponde à diferenciabilidade de

$$(f, \phi) \mapsto \mu_{f, \phi} \in E^*,$$

onde portanto, vemos $\mu_{f, \phi}$ como um funcional linear atuando num espaço de funções adequado.

Gap espectral forte

Seja E um Espaço de Banach.

Um operador $L \in \mathcal{L}(E)$ é dito ter a propriedade de lacuna (*gap*) espectral forte se existe um único autovalor λ cujo módulo é igual ao raio espectral (autovalor dominante) com autoespaço associado unidimensional, e todo o resto do espectro de L está contido em uma bola em \mathbb{C} cujo raio é estritamente menor que o raio espectral.

Um pouco de Teoria Espectral

Dado um operador $L \in \mathcal{L}(E)$ com gap espectral, a projeção espectral sobre o autoespaço do autovalor dominante é dada por:

$$P(\cdot) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - L)^{-1} dz \right) (\cdot),$$

onde Γ é uma curva de Jordan que não intersecta $\sigma(L)$ e o autovalor dominante é o único elemento do espectro pertencente a região limitada que tem Γ por fronteira.

Um exemplo surpreendente

Considere o operador de Perron-Frobënius

$\mathcal{L}_{f,\phi} : C^\alpha(S^1, \mathbb{R}) \rightarrow C^\alpha(S^1, \mathbb{R})$ associado a aplicação de duplicação de círculo $f : S^1 \rightarrow S^1$ e ao potencial zero. Em Castro-Varandas, mostramos que nesse caso, $f \mapsto \mathcal{L}_{f,0}$ é descontínuo até mesmo pondo na imagem a topologia forte (pontual), se no domínio consideramos a norma Lipschitz.

Um exemplo surpreendente (continuação)

Considere $S^1 \simeq \mathbb{R}/[-1/2, 1/2)$ e $f_n(x) := 2(x + \frac{1}{10n}) \pmod{1}$, $n \geq 1$, a qual converge C^∞ a $f(x) = 2x \pmod{1}$.

Tome uma função Lipschitz φ tal que $\varphi(x) = |x|$ para $|x| \leq 1/8$ e $\varphi(x) = 0$ para $1/2 \geq |x| \geq 1/5$, e considere o potencial $\phi \equiv 0$. Desse modo, se $0 < x_n < y_n < 1/10n$, temos

$$\begin{aligned} & \text{Lip}((\mathcal{L}_{f_n, \phi} - \mathcal{L}_{f, \phi})(\varphi)) \\ & \geq \frac{|\mathcal{L}_{f_n, \phi}(\varphi)(y_n) - \mathcal{L}_{f_n, \phi}(\varphi)(x_n) + \mathcal{L}(\varphi)(x_n) - \mathcal{L}(\varphi)(y_n)|}{y_n - x_n} \\ & = \frac{||y_n/2 - 1/10n| - |x_n/2 - 1/10n| + |x_n/2| - |y_n/2||}{y_n - x_n} \\ & = \frac{|-y_n - x_n|}{y_n - x_n} = 1 = \text{Lip}(\varphi) \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Cones convexos projetivos

Seja C um cone convexo em um espaço vetorial topológico.
Suponha que $C \cap \overline{C} = \{0\}$. Um tal cone convexo é chamado de *cone projetivo*.

Métricas projetivas

Dado um cone projetivo C , definimos:

$$\alpha(v, w) := \sup \{t > 0; w - t \cdot v \in C\}$$

e

$$\beta(v, w) := \inf \{s > 0; s \cdot v - w \in C\}.$$

A métrica projetiva associada a C é dada por:

$$\theta(v, w) := \log \frac{\beta(v, w)}{\alpha(v, w)}.$$

convencionando-se $\theta = +\infty$ se $\alpha = 0$ ou $\beta = +\infty$.

Métrica Projetiva

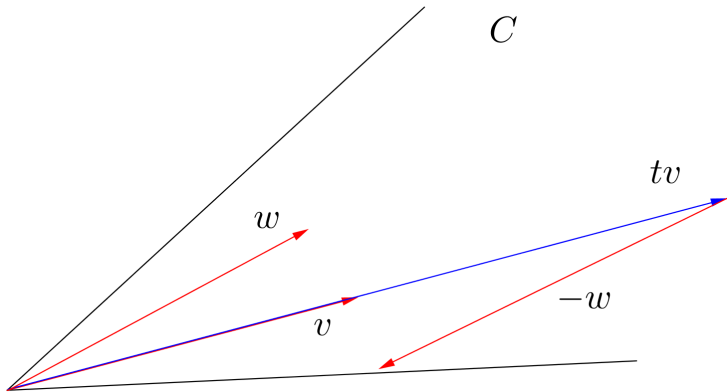


Figura: $\beta(v, w)$.

Métrica Projetiva

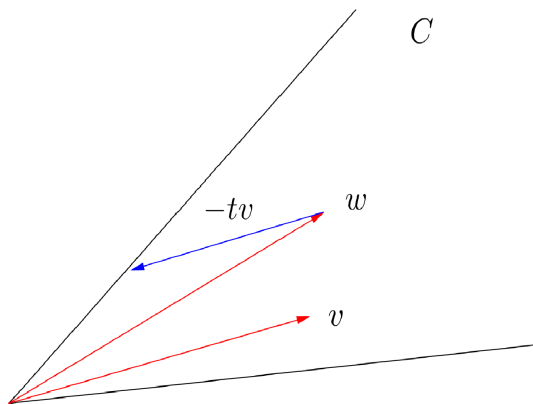


Figura: $\alpha(v, w)$.

Cones Invariantes

Teorema

Sejam E_1 e E_2 espaços vetoriais spaces e sejam $C_1 \subset E_1$ e $C_2 \subset E_2$ cones projetivos. Se $L : E_1 \rightarrow E_2$ é um operador linear tal que $L(C_1) \subset C_2$ e $D = \sup \{ \theta_2(L(v), L(w)); v, w \in C_1 \} < \infty$ então

$$\theta_2(L(v), L(w)) \leq (1 - e^{-D}) \theta_1(v, w),$$

para todos $v, w \in C_1$.

Alguns Exemplos de Cones e suas Métricas projetivas

- O cone $C^+ := \{\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}, \varphi > 0\}$. Nesse caso,
 $\Theta_+(v, w) := \log \sup_{x,y} \left(\frac{v(x)w(y)}{v(y)w(x)} \right)$.
- O cone $C_\kappa := \left\{ \varphi \in C^\alpha(M, \mathbb{R}) : \varphi > 0 \text{ and } \frac{|\varphi|_\alpha}{\inf \varphi} \leq \kappa \right\}$.
Nesse caso $\Theta_\kappa(\varphi, \psi) = \log \frac{B_\kappa(\varphi, \psi)}{A_\kappa(\varphi, \psi)}$, onde

$$A_\kappa(\varphi, \psi) = \inf_{x,y,z \in M} \frac{\kappa|x-y|^\alpha \psi(z) - (\psi(x) - \psi(y))}{\kappa|x-y|^\alpha \varphi(z) - (\varphi(x) - \varphi(y))},$$

e

$$B_\kappa(\varphi, \psi) = \sup_{x,y,z \in M} \frac{\kappa|x-y|^\alpha \psi(z) - (\psi(x) - \psi(y))}{\kappa|x-y|^\alpha \varphi(z) - (\varphi(x) - \varphi(y))}.$$

Métricas projetivas e Espaços Anisotrópicos

Um cone projetivo C induz uma relação de ordem relation \prec dada por

$$v \prec w \Leftrightarrow w - v \in C$$

Suponha que exista $e \in C \setminus \partial C$ tal que para toda $\varphi \in E$, existe uma constante c_φ satisfazendo

$$-c_\varphi e \prec \varphi \prec c_\varphi e.$$

Pondo $\|\varphi\| := \inf\{c_\varphi; -c_\varphi e \prec \varphi \prec c_\varphi e\}$, pode-se checar que isso define uma norma.

Métricas projetivas e Espaços Anisotrópicos

O *espaço anisotrópico associado a C* é obtido completando-se E com respeito a essa norma. Nesse caso, dizemos que e é uma *unidade (unit)* para E .

A técnica de Métricas de Birkhoff: Prós

Pros:

- Uma vez que se obtenha um cone com invariância estrita do teorema de Birkhoff, tem-se unicidade. Eventuais hipóteses de mixing são bem fracas. Nenhuma condição híbrida adicional é necessária para obter um autovalor dominante único com autoespaço unidimensional associado.
- Excelente na obtenção de resultados de estabilidade e *Linear response formula*.

A técnica de Métricas de Birkhoff: Contras

Contras:

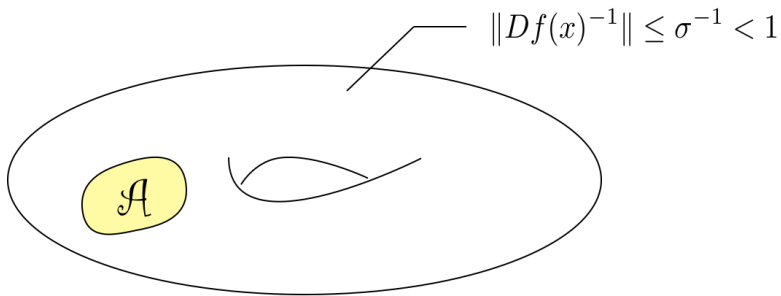
- Difícil adivinhar o cone invariante de funções correto.
- Não tão bom para usar em conjunto com torres. Ok para partições de Markov.

Cones Invariantes e espaços anisotrópicos

Teorema

(Castro, Liverani - Teorema do folclore.) *Se um operador L exibe um cone C estritamente invariante (com respeito à métrica projetiva de C), então ele possui um strong spectral gap com respeito a norma anisotrópica.*

Exemplos



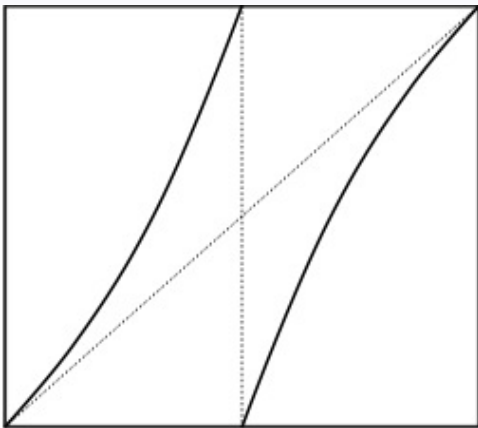


Figura: Manneville-Pomeau-alike

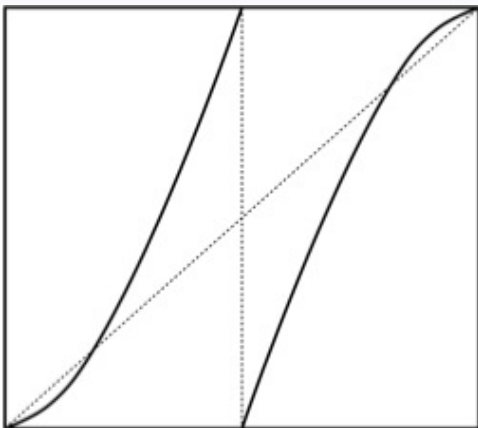


Figura: Manneville-Pomeau-alike - bifurcando.

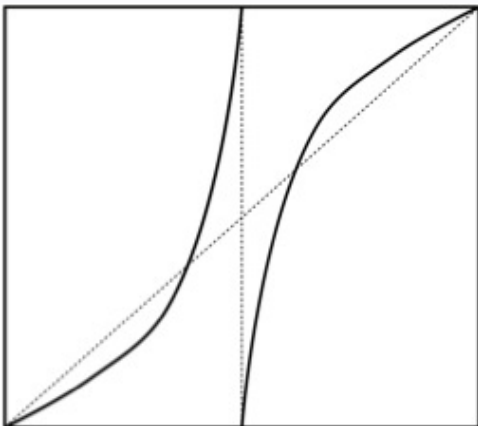


Figura: Manneville-Pomeau-alike - criando um poço

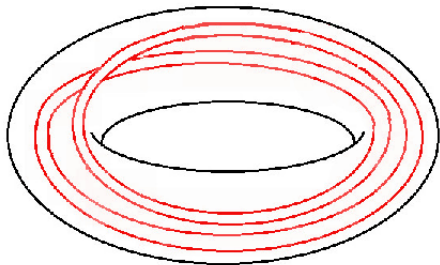


Figura: Solenóide

Teorema do folclore (Castro-Liverani)

Teorema

Suponha que (E, \prec) seja um reticulado completo dotado com uma norma anisotrópica $\|\cdot\|$ associada a um cone convexo C . Se $L : E \rightarrow E$ é um operador linear tal que $L(C) \subset C$ e $\Theta - \text{diam}(L(C)) = D < +\infty$, então L tem uma lacuna espectral forte (strong spectral gap property) operando em $(E, \|\cdot\|)$. Ademais, seu autovalor dominante é positivo.

Corolário/Escólio do teorema do folclore (Castro)

Corolário

Se tomarmos como vetor unidade da norma anisotrópica um autovetor dominante, a norma obtida é adaptada ao operador L .

Receita para obter *linear response formula* via cones/espços anisotrópicos




Ingredientes:

- Obter uma coleção finita de cones de funções estritamente invariantes comuns a uma vizinhança de dinâmicas. Tais cones conterão funções com regularidades diferentes, sendo portanto encaixantes.
- Calcular os espaços anisotrópicos correspondentes, os quais terão regularidade diferente.
- Mostrar a diferenciabilidade do Operador de Perron-Frobënus quando atuando de um espaço anisotrópico de maior regularidade para outro de menor.

Modo de preparar *linear response formula*

- Usar de resultado de Liverani-Gouezel para garantir diferenciabilidade do resolvente atuando entre diferentes espaços anisotrópicos.
- Usar a fórmula das projeções espectrais para arrematar a diferenciabilidade de autovalores dominantes e seus autovetores, do operador de transferência e seu adjunto.

Algumas Referências:

-  T. Bomfim, A. Castro, P. Varandas. Differentiability of thermodynamical quantities in non-uniformly expanding dynamics.
Advances in Mathematics, Volume 292, 478-528, 2016.
-  A. Castro, T. Nascimento. Statistical Properties of the maximal entropy measure for partially hyperbolic attractors.
Ergodic Theory and Dynamical Systems -1 2016
-  A. Castro, P. Varandas. Equilibrium states for non-uniformly expanding maps: decay of correlations and strong stability.
Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non Lineaire, 30:2, 225-249, 2013



Sébastien Gouëzel and Carlangelo Liverani.

Compact Locally Maximal Hyperbolic sets for smooth maps:
fine statistical properties.

Arxiv:math/0606722v1, 2006.



C. Liverani,

Decay of correlations,

Annals of Math., 142, 239–301, 1995.

Obrigado por virem!

Ideia da prova do Teorema do folclore

Mostremos que L possui um autovalor dominante positivo.

Tome $\varphi_n := L^n(\varphi)/\|L^n(\varphi)\|$. φ_n é exponencialmente Cauchy. Mais precisamente:

$$\|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \left(e^{\Theta_C(\varphi_n, \varphi_m)} - 1 \right) \leq (e^{\lambda^{m-n}D} - 1) \leq 2D\lambda^{m-n}$$

Em particular, como E é completo, existe $v = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L^n(\varphi)}{\|L^n(\varphi)\|}$.
Devido a continuidade de L , temos:

$$L(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L^{n+1}(v)}{\|L^n(v)\|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L^{n+1}(v)}{\|L^{n+1}(v)\|} \cdot \frac{\|L^{n+1}(v)\|}{\|L^n(v)\|}.$$

Como o limite inteiro existe (e é igual a $L(v)$) e também existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|L^{n+1}(v)\|}{\|L^n(v)\|} = \gamma$, então existe o limite

$$\frac{\|L^{n+1}(v)\|}{\|L^n(v)\|} =: \gamma,$$

e γ é autovalor de L , para o autovetor v .

Continuação da Prova do Teorema do folclore

Agora, mostremos que o autovalor γ é dominante. Como todas as normas anisotrópicas são equivalentes tomemos a norma anisotrópica tal que $e = v$. Como L preserva a ordem \prec , dado $\psi \in E$, temos

$$\left. \begin{array}{l} cv - \psi \in C, c \geq 0 \\ cv + \psi \in C, c \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L(cv - \psi) = cL(v) - L(\psi) \in C \Rightarrow c\gamma v - L(\psi) \\ L(cv + \psi) = cL(v) + L(\psi) \in C \Rightarrow c\gamma v + L(\psi) \end{array} \right.$$

Logo, $\|L(\psi)\| \leq \gamma\|\psi\|$ e vale $\gamma = \|L\|$ e que γ é o raio espectral de L .

Prova do Teorema do folclore - Lema chave

Para todo $\psi \in E$, temos $\|L^n(\psi)\| \leq \|L\|^n \|\psi\| = \gamma^n \|\psi\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. O lema chave aqui é

Lema

Para todo $\psi \in C$, existe o limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L^n(\psi)\|/\gamma^n$.

Prova do lema chave do Teorema do folclore

Note que $y_n = \|L^n(\psi)\|/\gamma^n$ está entre 0 e 1. Tome uma subsequência convergente $y_{n_j} \rightarrow y_0$. Assuma sem perda de generalidade que $y_0 \neq 0$ (caso contrário nada teríamos a mostrar). Mostremos que outra subsequência qualquer (y_{m_l}) possui o mesmo limite:

$$\left\| v - \frac{L^n(\psi)}{\|L^n(\psi)\|} \right\| \leq 2D\lambda^n \Rightarrow \left\| v - \frac{L^{n_j}(\psi)}{\|L^{n_j}(\psi)\|} \frac{\gamma^{n_j}}{\gamma^{n_j}} \right\| \leq 2D\lambda^{n_j}$$

Logo, como $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{L^{n_j}(\psi)}{\gamma^{n_j}} \frac{\gamma^{n_j}}{\|L^{n_j}(\psi)\|}$ existe, também existe

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{L^{n_j}(\psi)}{\gamma^{n_j}} = y_0 v$$

Suponha que $y_{m_l} \rightarrow \hat{y}$ quando $l \rightarrow +\infty$.

Tome j_0 tal que $\forall j \geq j_0$,

$$\left\| \frac{L^{n_j}(\psi)}{\gamma^{n_j}} - y_0 v \right\| < |y_0 - \hat{y}|/3$$

Para cada j , tome $q_j = m_{k_j}$ tal que $q_j > n_j$ e $q_{j+1} > q_j$. Logo

Continuação da prova do Teorema do folclore

O último lema nos diz que para $\psi \in C$, $\frac{L^n(\psi)}{\gamma^n}$ converge a um vetor v_ψ que é múltiplo de v . Isso porque

$$\frac{L^n(\psi)}{\gamma^n} = \frac{L^n(\psi)}{\|L^n(\psi)\|} \cdot \frac{\|L^n(\psi)\|}{\gamma^n}$$

e os limites of fatores acima existem individualmente.

O autoespaço associado a γ possui dimensão 1: De fato, se houvesse outro autovetor \hat{v} não colinear a v , associado a um autovalor com o mesmo módulo que γ , então para algum $c > 0$ teríamos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L^n(\hat{v})}{\gamma^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L^n(\overbrace{\hat{v} + cv}^{\in C} - cv)}{\|L^n(v)\|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L^n(\hat{v} + cv)}{\gamma^n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L^n(c)}{\gamma^n} \quad (1)$$

E o limite acima vive no espaço gerado por v .

Lema do gap

Lema

O raio espectral de $L|_{E_0}$ é estritamente menor que γ . Ademais,

$\|L|_{E_0}\| \leq (1 - \frac{e^{-D}}{8})\gamma$, onde D é uma cota para o θ_C -diâmetro de $L(C) \subset C$.

Demonstração do Lema do gap

Sem perda de generalidade, troque L por $\hat{L} = L/\gamma$. Seja $\psi \in E_0$, com $\|\psi\| = 1$. Isso quer dizer que para $s > 1$, $s \cdot v \pm \psi \in C$, e ou $s^{-1} \cdot v + \psi$, ou $s^{-1} \cdot v - \psi$ não pertence a C .

Isto implica que para $s > 1$, temos $1 \leq \|s \cdot v \pm \hat{L}(\psi)\| \leq 1 + s$. A segunda desigualdade é devida a $\hat{L}(v) = v$ e $\|\hat{L}(\varphi)\| \leq \|\varphi\|, \forall \varphi \in E$, como já provamos. Para a primeira desigualdade, fixe $s > 1$. Então

$$\|s \cdot v \pm \hat{L}(\psi)\| = \beta(v, s \cdot v \pm \hat{L}(\psi))$$

Note que $s \cdot v - (s \cdot v \pm \hat{L}(\psi)) = \pm \hat{L}(\psi) \notin C$. Logo, $\beta(v, s \cdot v \pm \hat{L}(\psi)) \geq s > 1$.

Demonstração do Lema do gap (continuação)

Por hipótese, $\hat{C} := \hat{L}(C)$ tem θ_C -diâmetro finito D . Para acotar a norma de $\hat{L}(\psi)$, precisamos analisar

$$\inf\{t, t \cdot v \pm L(\psi) \in C\}$$

Como $t \cdot v \pm L(\psi) \in \hat{C}$, para todo $t > 1$, temos $v \pm L(\psi) \in \overline{\hat{C}}$. Por acima, $1 \leq \|v \pm L(\psi)\| \leq 2$. Como $s \cdot v \pm L(\psi) \in \hat{C}$, $\forall s > 1$, temos que

$$e^{-D} \leq \frac{\beta_C(v, s \cdot v \pm L(\psi))}{\alpha_C(v, s \cdot v \pm L(\psi))} \leq e^D \Rightarrow \frac{1}{2}e^{-D} \leq \alpha_C(v, s \cdot v \pm L(\psi)) \leq 2e^D$$

Isso quer dizer que se $(s - 1) < e^{-D}/8$ então

$$s \cdot v \pm L(\psi) - \frac{e^{-D}}{4}v \in C \Rightarrow (1 - 1/8e^{-D})v \pm L(\psi) \in C \Rightarrow$$

$$\|L(\psi)\| \leq \left(1 - \frac{e^{-D}}{8}\right),$$

implicando que $\|\hat{L}|_{E_0}\| \leq \left(1 - \frac{e^{-D}}{8}\right) < 1$

Finalizando o teorema

Vimos que para $\psi \in C \cup -C \cup \{0\}$, existe o

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L^n(\psi)}{\gamma^n} = v_\psi \in \langle v \rangle$$

Afirmamos que $P_v(\psi) := v_\psi$ é a projeção espectral associada a $\langle v \rangle$.

De fato, a imagem de $P_v(\cdot)$ é exatamente $\langle v \rangle$, no qual ela age como identidade. Seja $E_0 := \ker(P_v)$. Então E_0 é um subespaço fechado de codimensão um em soma direta com $\langle v \rangle$. Ademais, $L(E_0) \subset E_0$ e para todo $\varphi \in E_0$, temos $L^n(\varphi)/\gamma^n$ convergindo exponencialmente rápido para 0, com taxa menor ou igual a $\gamma \cdot (1 - \frac{e^{-D}}{8})$.