O FORMALISMO DE DUBOVITSKII-MILYUTIN

Prof. Dr. Adson Sampaio Melo - CFP - UFRB

4 de novembro de 2019

Resumo

- Apresentamos as condições necessárias de otimalidade para problemas de otimização obtidas por Dubovitskii e Milyutin.
- Esse resultado é conhecido como Formalismo de Dubovitskii-Milyutin.

Resumo

- Apresentamos as condições necessárias de otimalidade para problemas de otimização obtidas por Dubovitskii e Milyutin.
- Esse resultado é conhecido como Formalismo de Dubovitskii-Milyutin.

Um breve histórico

- Em 1962, Dubovitskii e Milyutin encontraram condições necessárias de otimalidade para um problema de Otimização restrita.
- Essas condições são dadas na forma de uma equação em termos de funcionais lineares.

Um breve histórico

- Em 1962, Dubovitskii e Milyutin encontraram condições necessárias de otimalidade para um problema de Otimização restrita.
- Essas condições são dadas na forma de uma equação em termos de funcionais lineares.

O problema de otimização restrita

- $$\begin{aligned} &\text{Minimizar f(x)} \\ &\text{Sujeito a x} \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i \end{aligned} \tag{1}$$
- $f : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$ um espaço de Banach, $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{X}$ um aberto não vazio.
- $\mathbb{Q}_i \subseteq \mathbb{X}$, $i = 1, ..., n$, são conjuntos com interior não vazio.
- $\mathbb{Q}_{n+1} \subseteq \mathbb{X}$ possivelmente não possui pontos interiores.
- Formalmente, os conjuntos $\mathbb{Q}_i$, $i = 1, ..., n$, representam as restrições de desigualdades e $\mathbb{Q}_{n+1}$ as restrições de igualdade do problema.

O problema de otimização restrita

- $$\begin{aligned} &\text{Minimizar f(x)} \\ &\text{Sujeito a x} \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i \end{aligned} \tag{1}$$
- $f : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$ um espaço de Banach, $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{X}$ um aberto não vazio.
- $\mathbb{Q}_i \subseteq \mathbb{X}$, $i = 1, ..., n$, são conjuntos com interior não vazio.
- $\mathbb{Q}_{n+1} \subseteq \mathbb{X}$ possivelmente não possui pontos interiores.
- Formalmente, os conjuntos $\mathbb{Q}_i$, $i = 1, ..., n$, representam as restrições de desigualdades e $\mathbb{Q}_{n+1}$ as restrições de igualdade do problema.

O problema de otimização restrita

- $$\begin{aligned} &\text{Minimizar f(x)} \\ &\text{Sujeito a x} \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i \end{aligned} \tag{1}$$
- $f : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$ um espaço de Banach, $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{X}$ um aberto não vazio.
- $\mathbb{Q}_i \subseteq \mathbb{X}$, $i = 1, ..., n$, são conjuntos com interior não vazio.
- $\mathbb{Q}_{n+1} \subseteq \mathbb{X}$ possivelmente não possui pontos interiores.
- Formalmente, os conjuntos $\mathbb{Q}_i$, $i = 1, ..., n$, representam as restrições de desigualdades e $\mathbb{Q}_{n+1}$ as restrições de igualdade do problema.

O problema de otimização restrita

- $$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{Sujeito a } x \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i \end{aligned} \tag{1}$$
- $f : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$ um espaço de Banach, $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{X}$ um aberto não vazio.
- $\mathbb{Q}_i \subseteq \mathbb{X}$, $i = 1, ..., n$, são conjuntos com interior não vazio.
- $\mathbb{Q}_{n+1} \subseteq \mathbb{X}$ possivelmente não possui pontos interiores.
- Formalmente, os conjuntos $\mathbb{Q}_i$, $i = 1, ..., n$, representam as restrições de desigualdades e $\mathbb{Q}_{n+1}$ as restrições de igualdade do problema.

O problema de otimização restrita

- $$\begin{aligned} &\text{Minimizar f(x)} \\ &\text{Sujeito a x} \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i \end{aligned} \tag{1}$$
- $f : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$ um espaço de Banach, $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{X}$ um aberto não vazio.
- $\mathbb{Q}_i \subseteq \mathbb{X}$, $i = 1, ..., n$, são conjuntos com interior não vazio.
- $\mathbb{Q}_{n+1} \subseteq \mathbb{X}$ possivelmente não possui pontos interiores.
- Formalmente, os conjuntos $\mathbb{Q}_i$, $i = 1, ..., n$, representam as restrições de desigualdades e $\mathbb{Q}_{n+1}$ as restrições de igualdade do problema.

Algumas definições

Definição

(i) *Um subconjunto* $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{X}$ *é um cone com vértice na origem, quando para todo* $t \geq 0$ *e* $d \in \mathbb{C}$*, tivermos* $td \in \mathbb{C}$*.*

(ii) *Seja* $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{X}$ *um cone com vértice na origem. Definimos o cone dual de* $\mathbb{C}$*, denotado por* $\mathbb{C}^*$*, como*

$$\mathbb{C}^* = \left\{ g \in \mathbb{X}'; g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{C} \right\},$$

sendo $\mathbb{X}'$ *o espaço dual topológico de* $\mathbb{X}$*.*

Algumas definições

Definição

Dizemos que $h \in \mathbb{X}$ *é uma direção de descida de* f *no ponto* x_0*, quando existem uma vizinhança* $\mathbb{V}$ *de* h*,* $\alpha < 0$ *e* $t_0 > 0$*, tais que para todo* $t \in (0, t_0)$ *e qualquer* $v \in \mathbb{V}$*, tivermos*

$$f(x_0 + tv) \leq f(x_0) + t\alpha.$$

Denotamos por $\mathbb{C}_0$ *o conjunto das direções de descida de* f *no ponto* x_0*. A função* f *é dita regular de descida quando* $\mathbb{C}_0$ *é convexo.*

Algumas definições

Definição

Dizemos que $h \in \mathbb{X}$ *é uma direção factível para* $\mathbb{Q}_i$, $i = 1, ..., n$, *no ponto* x_0, *quando existem uma vizinhança* $\mathbb{V}$ *de* h *e* $t_0 > 0$, *tais que para todo* $t \in (0, t_0)$ *e qualquer* $v \in \mathbb{V}$, *tivermos*

$$x_0 + tv \in \mathbb{Q}_i.$$

Denotamos por $\mathbb{C}_i$ *o conjunto das direções factíveis para* $\mathbb{Q}_i$ *no ponto* x_0. *A restrição* $\mathbb{Q}_i$ *é dita regular quando* $\mathbb{C}_i$ *é convexo.*

Algumas definições

Definição

Dizemos que $h \in \mathbb{X}$ *é uma direção tangente a* $\mathbb{Q}_{n+1}$ *no ponto* x_0*, quando existe* $t_0 > 0$*, tal que para todo* $t \in (0, t_0)$ *existe um vetor*

$$x(t) = x_0 + th + r(t) \in \mathbb{Q}_{n+1}$$

e o vetor $r(t) \in \mathbb{X}$ *é tal que* $\|r(t)\| = o(t)$*.*
Denotamos por $\mathbb{C}_{n+1}$ *o conjunto das direções tangentes a* $\mathbb{Q}_{n+1}$ *no ponto* x_0*. A restrição* $\mathbb{Q}_{n+1}$ *é dita regular quando* $\mathbb{C}_{n+1}$ *é convexo.*

Equação de Euler-Lagrange

Teorema (Equação de Euler-Lagrange)

Sejam $\mathbb{C}_i$, $i = 1, ..., n+1$, *cones convexos com vértices na origem, sendo* $\mathbb{C}_i$, $i = 1, ..., n$, *abertos. Então* $\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{C}_i = \emptyset$ *se, e somente se, existem funcionais lineares* $g_i \in \mathbb{C}_i^*$, $i = 1, ..., n+1$, *não todos nulos, tais que*

$$\sum_{i=1}^{n+1} g_i = 0.$$

Formalismo de Dubovitskii-Milyutin

Teorema (Formalismo de Dubovitskii-Milyutin)

Seja $x_0 \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i$ *um minimizador local do Problema* (1). *Suponha que* f *é regular de descida em* x_0, *com direções de descida no cone* $\mathbb{C}_0$; *as restrições de desigualdade* $\mathbb{Q}_i$, $i = 1, ..., n$, *são regulares em* x_0, *com direções factíveis nos cones* $\mathbb{C}_i$, $i = 1, ..., n$, *a restrição de igualdade* $\mathbb{Q}_{n+1}$ *é regular em* x_0, *com direções tangentes no cone* $\mathbb{C}_{n+1}$. *Então existem funcionais lineares contínuos* $g_i \in \mathbb{C}_i^*$, $i = 0, ..., n+1$, *não todos nulos, satisfazendo a equação*

$$\sum_{i=0}^{n+1} g_i = 0.$$

Formalismo de Dubovitskii-Milyutin

- A ideia da demonstração é mostrar que

$$\bigcap_{i=0}^{n+1} \mathbb{C}_i = \emptyset,$$

isto é, nenhuma direção de descida de f pode ser factível para todas as restrições.

- $$\bigcap_{i=0}^{n+1} \mathbb{C}_i = \emptyset \Leftrightarrow \exists g_i \in \mathbb{C}_i^*, i = 0, \ldots, n+1 \text{ tais que } \sum_{i=0}^{n+1} g_i = 0.$$

Formalismo de Dubovitskii-Milyutin

- A ideia da demonstração é mostrar que

$$\bigcap_{i=0}^{n+1} \mathbb{C}_i = \emptyset,$$

isto é, nenhuma direção de descida de f pode ser factível para todas as restrições.

-

$$\bigcap_{i=0}^{n+1} \mathbb{C}_i = \emptyset \Leftrightarrow \exists g_i \in \mathbb{C}_i^*, i = 0, ..., n+1 \text{ tais que } \sum_{i=0}^{n+1} g_i = 0.$$

Condições de Otimalidade de Fritz-John

- Suponha $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$.
- $$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) \\ \text{Sujeito a } x \in \{x \in \mathbb{U}; F(x) = 0 \text{ e } g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, ..., k\} \end{array} \tag{2}$$
- $f : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ funções diferenciáveis.

Condições de Otimalidade de Fritz-John

- Suponha $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$.
-

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar f(x)} \\ \text{Sujeito a x} \in \{x \in \mathbb{U}; F(x) = 0 \text{ e } g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, ..., k\} \end{array} \tag{2}$$

- $f : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ funções diferenciáveis.

Condições de Otimalidade de Fritz-John

- Suponha $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$.
-
$$\begin{array}{l} \text{Minimizar f(x)} \\ \text{Sujeito a x} \in \{x \in \mathbb{U}; F(x) = 0 \text{ e } g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, ..., k\} \end{array} \tag{2}$$
- $f : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ funções diferenciáveis.

Condições de Otimalidade de Fritz-John

- Se x_0 é minimizador local do problema (2), então as condições de otimalidade de Fritz-John garante a existência de "funcionais" $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{R}^k_+$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$, não todos nulos, tais que

$$\alpha f'(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i g' i(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F' j(x_0) = 0.$$

I. V. Girsanov. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Vol. 67*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1972.

GRATO POR SUA ATENÇÃO!