VII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
4 a 8 de novembro de 2019

O Formalimos deDubovitskii-Milyutin

Adson Sampaio Melo *

Resumo

Neste trabalho, apresentamos as condições necessárias de otimalidade para problemas de Otimização obtidas por Dubovitskii e Milyutin na forma de uma equação baseada na Teoria da Análise Funcional. Esse resultado é conhecido como Formalismo de Dubovitskii-Milyutin.

Em 1962, Dubovitskii e Milyutin encontraram condições necessárias de otimalidade para um problema de Otimização restrita na forma de uma equação estabelecida em termos de funcionais lineares. Essas condições são capazes de derivar, como casos especiais dessa, quase todas as condições necessárias de otimalidade anteriormente conhecidas. Como se segue apresentamos esse resultado e para isso consideramos o seguinte problema de Otimização

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar f(x)} \\ &\text{Sujeito a x} \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i, \end{aligned} \tag{1}$$

sendo $f : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$ um espaço de Banach (aqui e no decorrer do texto), $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{X}$ um aberto não vazio, $\mathbb{Q}_i \subseteq \mathbb{X}$, $i = 1, ..., n$, são conjuntos com interior não vazio e $\mathbb{Q}_{n+1} \subseteq \mathbb{X}$ possivelmente não possui pontos interiores.

Numa linguagem mais formal, os conjuntos $\mathbb{Q}_i$, $i = 1, ..., n$, representam as restrições de desigualdades e $\mathbb{Q}_{n+1}$ as restrições de igualdade do problema.

Os seguintes conceitos são fundamentais para a aplicação do Formalismo de Dubovitskii-Milyutin e maiores detalhes podem ser vistos em [1].

Definição 1. *(i) Um subconjunto $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{X}$ é um cone com vértice na origem, quando para todo $t \geq 0$ e $d \in \mathbb{C}$, tivermos $td \in \mathbb{C}$.*

(ii) Seja $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{X}$ um cone com vértice na origem. Definimos o cone dual de $\mathbb{C}$, denotado por , como a seguir

$$\mathbb{C}^* = \{g \in \mathbb{X}'; g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{C}\},$$

sendo $\mathbb{X}'$ o espaço dual topológico de $\mathbb{X}$.

Definição 2. *(i) Dizemos que um vetor $h \in \mathbb{X}$ é uma direção de descida de f no ponto x_0, quando existem uma vizinhança $\mathbb{V}$ de h, $\alpha < 0$ e $t_0 > 0$, tais que para todo $t \in (0, t_0)$ e qualquer $v \in \mathbb{V}$, tivermos $f(x_0 + tv) \leq f(x_0) + t\alpha$. Denotamos por $\mathbb{C}_0$ o conjunto das direçẽs de descida de f no ponto x_0. A função f é dita regular de descida quando $\mathbb{C}_0$ é convexo.*

*e-mail: adsonmelo@ufrb.edu.br

(ii) *Dizemos que um vetor $h \in \mathbb{X}$ é uma direção factével para $\mathbb{Q}_i$, $i = 1, ..., n$, no ponto x_0, quando existem uma vizinhança $\mathbb{V}$ de h e $t_0 > 0$, tais que para todo $t \in (0, t_0)$ e qualquer $v \in \mathbb{V}$, tivermos $x_0 + tv \in \mathbb{Q}_i$. Denotamos por $\mathbb{C}_i$ o conjunto das direções factveis para $\mathbb{Q}_i$ no ponto x_0. A restrição $\mathbb{Q}_i$ é dita regular quando $\mathbb{C}_i$ é convexo.*

(iii) *Dizemos que um vetor $h \in \mathbb{X}$ é uma direção tangente a $\mathbb{Q}_{n+1}$ no ponto x_0, quando existe $t_0 > 0$, tal que para todo $t \in (0, t_0)$ existe um vetor $x(t) = x_0 + th + r(t) \in \mathbb{Q}_{n+1}$ e o vetor $r(t) \in \mathbb{X}$ é tal que $\|r(t)\| = o(t)$. Denotamos por $\mathbb{C}_{n+1}$ o conjunto das direções tangentes a $\mathbb{Q}_{n+1}$ no ponto x_0. A restrição $\mathbb{Q}_{n+1}$ é dita regular quando $\mathbb{C}_{n+1}$ é convexo.*

Observação 1. *(i) O conjunto das direçẽs de descida de f no ponto x_0 é um cone aberto com vértice na origem.*

(ii) *O conjunto das direçẽs factível para $\mathbb{Q}_i$ no ponto x_0 é um cone aberto com vértice na origem.*

O próximo teorema seré fundamental para determinarmos as condições necessárias de otimalidade do Problema (1). A igualdade resultante do teorema é conhecida como Equação de Euler-Lagrange, cuja demonstração é baseada no Teorema de Separação e pode ser encontrada em [1].

Teorema 1 (Equação de Euler-Lagrange)**.** *Sejam $\mathbb{C}_i$, $i = 1, ..., n+1$, cones convexos com vértices na origem, sendo $\mathbb{C}_i$, $i = 1, ..., n$, abertos. Então $\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{C}_i = \emptyset$ se, e somente se, existem funcionais lineares $g_i \in \mathbb{C}_i^*$, $i = 1, ..., n+1$, não todos nulos, tais que*

$$\sum_{i=1}^{n+1} g_i = 0.$$

Agora, recordamos o conceito de minimizador do Problema (1).

Definição 3. *Dizemos que $x_0 \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i$ é um minimizador local do Problema* (1) *quando existe uma vizinhança $\mathbb{V}$ de x_0, tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{V} \cap \mathbb{Q}$.*

Por fim, enunciamos e provamos o resultado principal desse trabalho.

Teorema 2 (Formalismo de Dubovitskii-Milyutin)**.** *Seja $x_0 \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i$ um minimizador local do Problema* (1)*. Suponha que f 'e regular de descida em x_0, com direções de descida no cone $\mathbb{C}_0$; as restrições de desigualdade $\mathbb{Q}_i$, $i = 1, ..., n$, são regulares em x_0, com direçẽs factíveis nos cones $\mathbb{C}_i$, $i = 1, ..., n$, a restrição de igualdade $\mathbb{Q}_{n+1}$ é regular em x_0, com direções tangentes no cone $\mathbb{C}_{n+1}$. Então existem funcionais lineares contínuos $g_i \in \mathbb{C}_i^*$, $i = 0, ..., n+1$, não todos nulos, satisfazendo a equação*

$$\sum_{i=0}^{n+1} g_i = 0.$$

Demonstração. Primeiramente provamos que a condição necessária para x_0 ser um minimizador local de (1) é

$$\bigcap_{i=0}^{n+1} \mathbb{C}_i = \emptyset,$$

isto é, nenhuma direção de descida de f pode ser factível para todas as restrições.

Com efeito, suponhamos que isto é falso, logo existe $h \in \mathbb{C}_i$, $i = 0, ..., n+1$. Da definição dos cones $\mathbb{C}_i$, $i = 0, ..., n$, existem uma vizinhança $\mathbb{V}$ de h e $t_0 > 0$ tal que, para todo $t \in (0, t_0)$ e $v \in \mathbb{V}$, temos

$$x_0 + tv \in \bigcap_{i=0}^{n} \mathbb{Q}_i$$

e $x_0 + tv$ satisfaz a desigualdade

$$f(x_0 + tv) \leq f(x_0) + t\alpha,$$

para algum $\alpha < 0$.

Como h é uma direção tangente, logo o vetor $x(t) = x_0 + th + r(t) \in \mathbb{Q}_{n+1}$, sendo $\|r(t)\| = o(t)$. Seja $t_1 > 0$ tal que para todo $t \in (0, t_1)$, $\frac{1}{t} r(t) \in \mathbb{V} - \{h\}$, isto é, $\overline{h}(t) = h + \frac{1}{t} r(t) \in \mathbb{V}$. Agora para $0 < t < \min\{t_0, t_1\}$ o vetor $x(t) = x_0 + t\overline{h}(t)$ satisfaz

$$x(t) = x_0 + t\overline{h}(t) = x_0 + th + r(t) \in \bigcap_{i=0}^{n} \mathbb{Q}_i$$

e

$$x(t) = x_0 + t\overline{h}(t) = x_0 + th + r(t) \in \mathbb{Q}_{n+1}.$$

Em outras palavras, $x(t) \in \bigcap_{i=0}^{n+1} \mathbb{Q}_i$ e também satisfaz a desigualdade

$$f(x(t)) = f(x_0 + t\overline{h}(t)) \leq f(x_0) + t\alpha < f(x_0).$$

Porém, isto contradiz o fato de x_0 ser um minimizador local do Problema (1). Portanto,

$$\bigcap_{i=0}^{n+1} \mathbb{C}_i = \emptyset.$$

Além disto, $\mathbb{C}_i$, $i = 0, ..., n$ são cones abertos convexos e $\mathbb{C}_{n+1}$ é um cone convexo, logo aplicando o Teorema 1 concluímos o resultado. $\square$

Referências

[1] I. V. Girsanov. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Vol. 67.* Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1972.