VII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
4 a 8 de novembro de 2019

Introdução a Geometria Finsleriana e algumas aplicações

Benigno Oliveira Alves *

Abstract

Dados dois pontos em um mar qual é a trajetória que minimiza o tempo de viagem? Este é o conhecido *problema de navegação de Zermelo.* A ação de campos vetoriais como o vento e a correnteza fazem com que a "linha reta", geodésica de uma métrica Riemanniana, não seja a trajetória desejada. A solução é uma geodésica de uma métrica Finsleriana muito especial, a *métrica de Zermelo* ou *métrica Randers.* Tais métricas possuem inmeras aplicações, por exemplo, propagação de incndio floresta, o *princípio de Fermat* e trajetória de uma partícula carregada sobre ação de um campo magnético. O objetivo deste minicurso é introduzir os conceitos fundamentais da geometria Finsleriana e comentar sobre alguns resultados, usando como exemplo fundamental a métrica de Zermelo.

Em geometria Finsleriana a "métrica", chamada de *tensor fundamental*, depende de uma direção. Essa diferença fundamental com relação a geometria Riemanniana se propaga e implica por exemplo na falta de simetria da distância e na perda de estrutura de espaço vetorial de um subespaço normal. Surge também um novo objeto que mede a variação nesta nova direção, o *tensor de Cartan.* O Lagrangeano, ou "módulo", é apenas de classe C^1 na seção nula, o que não impede de definir um *funcional energia* e em seguida *geodésica* como ponto crítico de tal funcional, analogamente ao caso Riemanniano. Também existe um campo de vetores no fibrado tangente, o *spray geodésico*, que não é suave na seção nula e suas curvas integrais se projetam nas geodésicas. Também é possível definir geodésica através de uma conexão. Observo que não existe uma conexão compatível com a métrica e livre de torção. Uma solução para essa dificuldade é considerar uma família de conexões afins chamada de *conexão de Chern*, que tal como o tensor fundamental depende de uma direção. Desta forma, obtemos uma quase-compatibilidade, aparecendo adicionalmente o tensor de cartan da equação na equação de compatibilidade com a métrica.

A função distância, também definida analogamente ao caso Riemanniano, é um exemplo de *função transnormal.* Tais funções são definidas por uma *equação Eikonal* que estão relacionadas com problemas em propagação de ondas. No caso Riemanniano as fibras desta equação são equidistantes. No caso Finsleriano, sem hipóteses adicionais, a equidistância existe apenas na direção do gradiente, direção que a frente de onda se propaga.

Os pontos acima serão estudados preferencialmente em espaços mais simples, como $\mathbb{R}^3$, afim de tornar acessível a quem cursou disciplinas de clculos e que possui pouco ou nenhum conhecimento prévio de Geometria Diferencial.

*e-mail: `benignoalves@ufba.br`

References

[1] Shen, Zhongmin. Lectures on Finsler geometry. World Scientific, 2001.

[2] Alves, Benigno Oliveira. Sobre folheações Finslerianas singulares. Diss. Universidade de São Paulo, 2017.

[3] Bao, David, S-S. Chern, and Zhongmin Shen. An introduction to Riemann-Finsler geometry. Vol. 200. Springer Science e Business Media, 2012.

[4] Shen, Zhongmin. Differential geometry of spray and Finsler spaces. Springer Science e Business Media, 2013.

[5] Caponio, Erasmo, Miguel Angel Javaloyes, and Miguel Snchez. "Wind Finslerian structures: from Zermelo's navigation to the causality of spacetimes." arXiv preprint arXiv:1407.5494 (2014).

[6] Javaloyes, Miguel Angel. "Chern connection of a pseudo-Finsler metric as a family of affine connections." arXiv preprint arXiv:1303.6263 (2013).

Tipo de Apresentação: O minicurso ser apresentado oralmente com auxílio de slide e lousa.