# *Alguns problemas "simples" mas difíceis*

Lúcia R. Junqueira

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

lucia@ime.usp.br

## *Introdução*

Tanto o início da Topologia Geral como da Teoria dos Conjuntos se devem a trabalhos de Cantor. A primeira definição satisfatória de um espaço topológico foi dada por Hausdorff em 1914. No período entre 1920 e 1930 foram mostrados alguns dos teoremas fundamentais da Topologia, importantes até hoje, dos quais destacamos:

**Teorema de Tychonoff:** O produto de espaços compactos é compacto.

**Teorema da Metrização de Alexandroff-Urysohn:** Todo espaço regular com base enumerável é metrizável.

**Teorema da Extensão de Tietze-Uryshon:** Se $X$ é normal, então toda função contínua definida em um subespaço fechado de $X$ com valores em $[0,1]$ pode ser estendida continuamente a $X$.

# *Introdução*

Tanto o início da Topologia Geral como da Teoria dos Conjuntos se devem a trabalhos de Cantor. A primeira definição satisfatória de um espaço topológico foi dada por Hausdorff em 1914. No período entre 1920 e 1930 foram mostrados alguns dos teoremas fundamentais da Topologia, importantes até hoje, dos quais destacamos:

**Teorema de Tychonoff:** O produto de espaços compactos é compacto.

**Teorema da Metrização de Alexandroff-Urysohn:** Todo espaço regular com base enumerável é metrizável.

**Teorema da Extensão de Tietze-Uryshon:** Se $X$ é normal, então toda função contínua definida em um subespaço fechado de $X$ com valores em $[0,1]$ pode ser estendida continuamente a $X$.

## Introdução

Tanto o início da Topologia Geral como da Teoria dos Conjuntos se devem a trabalhos de Cantor. A primeira definição satisfatória de um espaço topológico foi dada por Hausdorff em 1914. No período entre 1920 e 1930 foram mostrados alguns dos teoremas fundamentais da Topologia, importantes até hoje, dos quais destacamos:

**Teorema de Tychonoff:** O produto de espaços compactos é compacto.

**Teorema da Metrização de Alexandroff-Urysohn:** Todo espaço regular com base enumerável é metrizável.

**Teorema da Extensão de Tietze-Uryshon:** Se $X$ é normal, então toda função contínua definida em um subespaço fechado de $X$ com valores em $[0,1]$ pode ser estendida continuamente a $X$.

# *Introdução*

Tanto o início da Topologia Geral como da Teoria dos Conjuntos se devem a trabalhos de Cantor. A primeira definição satisfatória de um espaço topológico foi dada por Hausdorff em 1914. No período entre 1920 e 1930 foram mostrados alguns dos teoremas fundamentais da Topologia, importantes até hoje, dos quais destacamos:

**Teorema de Tychonoff:** O produto de espaços compactos é compacto.

**Teorema da Metrização de Alexandroff-Urysohn:** Todo espaço regular com base enumerável é metrizável.

**Teorema da Extensão de Tietze-Uryshon:** Se $X$ é normal, então toda função contínua definida em um subespaço fechado de $X$ com valores em $[0, 1]$ pode ser estendida continuamente a $X$.

# *Introdução*

Esses teoremas falam de três dos principais conceitos em Topologia Geral: *metrização*, *compacidade* e *normalidade*.

Veremos um problema relacionado a cada um deles.

Um critério usado para escolher os problemas, além de gosto pessoal, é que os enunciados sejam simples, no sentido de que eles usam, na sua formulação, apenas conceitos "básicos", vistos em um curso introdutório de Topologia Geral.

Entretanto, eles são problemas muito difíceis. Eles precisam de ferramentas sofisticadas da Teoria dos Conjuntos para se obter soluções (completas ou parciais), o que também ilustra o trabalho de pesquisa na área de Topologia Conjuntista.

Durante toda a palestra assumiremos que os espaços são de Hausdorff.

# Introdução

Esses teoremas falam de três dos principais conceitos em Topologia Geral: *metrização*, *compacidade* e *normalidade*.

Veremos um problema relacionado a cada um deles.

Um critério usado para escolher os problemas, além de gosto pessoal, é que os enunciados sejam simples, no sentido de que eles usam, na sua formulação, apenas conceitos "básicos", vistos em um curso introdutório de Topologia Geral.

Entretanto, eles são problemas muito difíceis. Eles precisam de ferramentas sofisticadas da Teoria dos Conjuntos para se obter soluções (completas ou parciais), o que também ilustra o trabalho de pesquisa na área de Topologia Conjuntista.

Durante toda a palestra assumiremos que os espaços são de Hausdorff.

# Introdução

Esses teoremas falam de três dos principais conceitos em Topologia Geral: *metrização*, *compacidade* e *normalidade*.

Veremos um problema relacionado a cada um deles.

Um critério usado para escolher os problemas, além de gosto pessoal, é que os enunciados sejam simples, no sentido de que eles usam, na sua formulação, apenas conceitos "básicos", vistos em um curso introdutório de Topologia Geral.

Entretanto, eles são problemas muito difíceis. Eles precisam de ferramentas sofisticadas da Teoria dos Conjuntos para se obter soluções (completas ou parciais), o que também ilustra o trabalho de pesquisa na área de Topologia Conjuntista.

Durante toda a palestra assumiremos que os espaços são de Hausdorff.

## *Introdução*

Nós vamos também estar falando sobre resultados de consistência e de independência.

ZFC são os axiomas que a maioria dos matemáticos usam no dia a dia. Mas existem afirmações que não podem ser provadas nem refutadas usando esses axiomas. Por exemplo:

Lembrando, a Hipótese do Contínuo (CH) diz que não existe nenhum conjunto $A$ tal que $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$.

Gödel mostrou que CH é consistente com ZFC, o que significa que assumir ZFC + CH não nos leva a uma contradição.

Mas Cohen mostrou que $\neg$CH também é consistente com ZFC, do qual concluímos que ele é independente de ZFC. Para isso ele criou a técnica do forcing.

# *Introdução*

Nós vamos também estar falando sobre resultados de consistência e de independência.

ZFC são os axiomas que a maioria dos matemáticos usam no dia a dia. Mas existem afirmações que não podem ser provadas nem refutadas usando esses axiomas. Por exemplo:

Lembrando, a Hipótese do Contínuo (CH) diz que não existe nenhum conjunto $A$ tal que $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$.

Gödel mostrou que CH é consistente com ZFC, o que significa que assumir ZFC + CH não nos leva a uma contradição.

Mas Cohen mostrou que $\neg$CH também é consistente com ZFC, do qual concluímos que ele é independente de ZFC. Para isso ele criou a técnica do forcing.

# *Introdução*

Nós vamos também estar falando sobre resultados de consistência e de independência.

ZFC são os axiomas que a maioria dos matemáticos usam no dia a dia. Mas existem afirmações que não podem ser provadas nem refutadas usando esses axiomas. Por exemplo:

Lembrando, a Hipótese do Contínuo (CH) diz que não existe nenhum conjunto $A$ tal que $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$.

Gödel mostrou que CH é consistente com ZFC, o que significa que assumir ZFC + CH não nos leva a uma contradição.

Mas Cohen mostrou que $\neg$CH também é consistente com ZFC, do qual concluímos que ele é independente de ZFC. Para isso ele criou a técnica do forcing.

## *Introdução*

Nós vamos também estar falando sobre resultados de consistência e de independência.

ZFC são os axiomas que a maioria dos matemáticos usam no dia a dia. Mas existem afirmações que não podem ser provadas nem refutadas usando esses axiomas. Por exemplo:

Lembrando, a Hipótese do Contínuo (CH) diz que não existe nenhum conjunto $A$ tal que $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$.

Gödel mostrou que CH é consistente com ZFC, o que significa que assumir ZFC + CH não nos leva a uma contradição.

Mas Cohen mostrou que $\neg$CH também é consistente com ZFC, do qual concluímos que ele é independente de ZFC. Para isso ele criou a técnica do forcing.

# *Introdução*

Nós vamos também estar falando sobre resultados de consistência e de independência.

ZFC são os axiomas que a maioria dos matemáticos usam no dia a dia. Mas existem afirmações que não podem ser provadas nem refutadas usando esses axiomas. Por exemplo:

Lembrando, a Hipótese do Contínuo (CH) diz que não existe nenhum conjunto $A$ tal que $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$.

Gödel mostrou que CH é consistente com ZFC, o que significa que assumir ZFC + CH não nos leva a uma contradição.

Mas Cohen mostrou que $\neg$CH também é consistente com ZFC, do qual concluímos que ele é independente de ZFC. Para isso ele criou a técnica do forcing.

# *Introdução*

Quando CH falha, surgem várias perguntas naturais sobre os cardinais menores que o contínuo, que será denotado por $\mathfrak{c}$.

Por exemplo, pode o Teorema da Categoria de Baire ser generalizado para intersecções de $< \mathfrak{c}$ abertos densos?

O Axioma de Martin (MA), que também é independente de ZFC, foi formulado para responder algumas dessas perguntas, mas ele foi (e continua sendo) usado para se obter respostas parciais para vários problemas em Topologia e em outras áreas da Matemática.

CH e MA são os dois únicos axiomas que irei mencionar nessa palestra.

# *Introdução*

Quando CH falha, surgem várias perguntas naturais sobre os cardinais menores que o contínuo, que será denotado por $\mathfrak{c}$.

Por exemplo, pode o Teorema da Categoria de Baire ser generalizado para intersecções de $< \mathfrak{c}$ abertos densos?

O Axioma de Martin (MA), que também é independente de ZFC, foi formulado para responder algumas dessas perguntas, mas ele foi (e continua sendo) usado para se obter respostas parciais para vários problemas em Topologia e em outras áreas da Matemática.

CH e MA são os dois únicos axiomas que irei mencionar nessa palestra.

# Introdução

Quando CH falha, surgem várias perguntas naturais sobre os cardinais menores que o contínuo, que será denotado por $\mathfrak{c}$.

Por exemplo, pode o Teorema da Categoria de Baire ser generalizado para intersecções de $< \mathfrak{c}$ abertos densos?

O Axioma de Martin (MA), que também é independente de ZFC, foi formulado para responder algumas dessas perguntas, mas ele foi (e continua sendo) usado para se obter respostas parciais para vários problemas em Topologia e em outras áreas da Matemática.

CH e MA são os dois únicos axiomas que irei mencionar nessa palestra.

# *Introdução*

Quando CH falha, surgem várias perguntas naturais sobre os cardinais menores que o contínuo, que será denotado por $\mathfrak{c}$.

Por exemplo, pode o Teorema da Categoria de Baire ser generalizado para intersecções de $< \mathfrak{c}$ abertos densos?

O Axioma de Martin (MA), que também é independente de ZFC, foi formulado para responder algumas dessas perguntas, mas ele foi (e continua sendo) usado para se obter respostas parciais para vários problemas em Topologia e em outras áreas da Matemática.

CH e MA são os dois únicos axiomas que irei mencionar nessa palestra.

# *O problema de Katětov*

Dizemos que um espaço topológico $(X, \tau)$ é metrizável se existe uma métrica em $X$ tal que a topologia associada a ela é $\tau$.

O Teorema de Metrização de Alexandroff-Urysohn, nos dá uma condição para um espaço ser metrizável, mas não uma caracterização. Os primeiros teoremas desse tipo surgiram só por volta de 1950.

O problema que vamos apresentar trata do caso especial dos espaços compactos, para o qual temos o seguinte:

*Teorema (Šneider, 1945)*

Se $X$ é compacto e a diagonal $\{(x, x) : x \in X\}$ é $G_\delta$, então $X$ é metrizável.

# *O problema de Katětov*

Dizemos que um espaço topológico $(X, \tau)$ é metrizável se existe uma métrica em $X$ tal que a topologia associada a ela é $\tau$.

O Teorema de Metrização de Alexandroff-Urysohn, nos dá uma condição para um espaço ser metrizável, mas não uma caracterização. Os primeiros teoremas desse tipo surgiram só por volta de 1950.

O problema que vamos apresentar trata do caso especial dos espaços compactos, para o qual temos o seguinte:

*Teorema (Šneider, 1945)*

Se $X$ é compacto e a diagonal $\{(x, x) : x \in X\}$ é $G_\delta$, então $X$ é metrizável.

# *O problema de Katětov*

Dizemos que um espaço topológico $(X, \tau)$ é metrizável se existe uma métrica em $X$ tal que a topologia associada a ela é $\tau$.

O Teorema de Metrização de Alexandroff-Urysohn, nos dá uma condição para um espaço ser metrizável, mas não uma caracterização. Os primeiros teoremas desse tipo surgiram só por volta de 1950.

O problema que vamos apresentar trata do caso especial dos espaços compactos, para o qual temos o seguinte:

*Teorema (Šneider, 1945)*

Se $X$ é compacto e a diagonal $\{(x, x) : x \in X\}$ é $G_\delta$, então $X$ é metrizável.

# *O problema de Katětov*

Dizemos que um espaço topológico $(X, \tau)$ é metrizável se existe uma métrica em $X$ tal que a topologia associada a ela é $\tau$.

O Teorema de Metrização de Alexandroff-Urysohn, nos dá uma condição para um espaço ser metrizável, mas não uma caracterização. Os primeiros teoremas desse tipo surgiram só por volta de 1950.

O problema que vamos apresentar trata do caso especial dos espaços compactos, para o qual temos o seguinte:

*Teorema (Šneider, 1945)*

Se $X$ é compacto e a diagonal $\{(x, x) : x \in X\}$ é $G_\delta$, então $X$ é metrizável.

# *O problema de Katětov*

Katětov mostrou:

*Teorema (Katětov, 1948)*

Se $X$ é compacto, então $X$ é metrizável se e somente se $X^3$ é heridiatariamente normal.

O $X^3$ aparece porque Katětov na verdade mostrou que se o produto de dois espaços compactos é hereditariamente normal, então os dois são perfeitamente normais. O teorema anterior segue como corolário.

A pergunta natural é:

*Problema (de Katětov)*

Um espaço compacto é metrizável se e somente se $X^2$ é heridiatariamente normal?

# *O problema de Katětov*

Katětov mostrou:

*Teorema (Katětov, 1948)*

Se $X$ é compacto, então $X$ é metrizável se e somente se $X^3$ é heridiatariamente normal.

O $X^3$ aparece porque Katětov na verdade mostrou que se o produto de dois espaços compactos é hereditariamente normal, então os dois são perfeitamente normais. O teorema anterior segue como corolário.

A pergunta natural é:

*Problema (de Katětov)*

Um espaço compacto é metrizável se e somente se $X^2$ é heridiatariamente normal?

# *O problema de Katětov*

A primeira resposta parcial foi dada por Nyikos em 1977. Ele construiu um contra-exemplo assumindo $MA + \neg CH$. Outros contra-exemplos consistentes foram construídos depois usando $CH$ (por Nyikos e Gruenhage), e, posteriormente, enfraquecimentos dele (por Justin Moore).

Entretanto, em 2001, Larson e Todorcevic, mostraram que é consistente que a resposta do problema seja sim.

Assim temos que não é possível decidir se a resposta do problema é sim ou não usando apenas os axiomas de ZFC.

# *O problema de Katětov*

A primeira resposta parcial foi dada por Nyikos em 1977. Ele construiu um contra-exemplo assumindo $MA + \neg CH$. Outros contra-exemplos consistentes foram construídos depois usando $CH$ (por Nyikos e Gruenhage), e, posteriormente, enfraquecimentos dele (por Justin Moore).

Entretanto, em 2001, Larson e Todorcevic, mostraram que é consistente que a resposta do problema seja sim.

Assim temos que não é possível decidir se a resposta do problema é sim ou não usando apenas os axiomas de ZFC.

# *O problema de Katětov*

A primeira resposta parcial foi dada por Nyikos em 1977. Ele construiu um contra-exemplo assumindo $MA + \neg CH$. Outros contra-exemplos consistentes foram construídos depois usando $CH$ (por Nyikos e Gruenhage), e, posteriormente, enfraquecimentos dele (por Justin Moore).

Entretanto, em 2001, Larson e Todorcevic, mostraram que é consistente que a resposta do problema seja sim.

Assim temos que não é possível decidir se a resposta do problema é sim ou não usando apenas os axiomas de ZFC.

# O problema de Efimov

Assumimos que todos os espaços sejam infinitos.
Quais exemplos de espaços compactos vocês conseguem pensar?

Provavelmente o mais simples é uma sequência convergente com o ponto limite:

$$X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \text{ onde } x_n \to x$$

Em 1929, Alexandroff e Urysohn perguntaram se havia alguma espaço compacto Hausdorff que não continha nenhuma sequência convergente.

# *O problema de Efimov*

Assumimos que todos os espaços sejam infinitos.
Quais exemplos de espaços compactos vocês conseguem pensar?

Provavelmente o mais simples é uma sequência convergente com o ponto limite:

$$X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \text{ onde } x_n \to x$$

Em 1929, Alexandroff e Urysohn perguntaram se havia alguma espaço compacto Hausdorff que não continha nenhuma sequência convergente.

# *O problema de Efimov*

Assumimos que todos os espaços sejam infinitos.
Quais exemplos de espaços compactos vocês conseguem pensar?

Provavelmente o mais simples é uma sequência convergente com o ponto limite:

$$X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \text{ onde } x_n \to x$$

Em 1929, Alexandroff e Urysohn perguntaram se havia alguma espaço compacto Hausdorff que não continha nenhuma sequência convergente.

## *O problema de Efimov*

Assumimos que todos os espaços sejam infinitos.
Quais exemplos de espaços compactos vocês conseguem pensar?

Provavelmente o mais simples é uma sequência convergente com o ponto limite:

$$X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \text{ onde } x_n \to x$$

Em 1929, Alexandroff e Urysohn perguntaram se havia alguma espaço compacto Hausdorff que não continha nenhuma sequência convergente.

# O problema de Efimov

O problema foi resolvido, de forma independente, por Tychonoff (1935) e Čech (1937). Eles usaram o mesmo exemplo embora apresentados de forma bem diferentes: $\beta\mathbb{N}$.
$\beta\mathbb{N}$ é a compactificação de Stone-Čech de $\mathbb{N}$ ( $\mathbb{N}$ com a topologia discreta). Uma maneira de construí-lo é difinir $\beta\mathbb{N}$ como sendo o conjunto de todos os ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ e os abertos como sendo todos os conjuntos da forma

$$V(A) = \{u \in \beta\mathbb{N} : A \in u\},$$

para $A \subseteq \mathbb{N}$.

# *O problema de Efimov*

O problema foi resolvido, de forma independente, por Tychonoff (1935) e Čech (1937). Eles usaram o mesmo exemplo embora apresentados de forma bem diferentes: $\beta\mathbb{N}$.
$\beta\mathbb{N}$ é a compactificação de Stone-Čech de $\mathbb{N}$ ( $\mathbb{N}$ com a topologia discreta). Uma maneira de construí-lo é difinir $\beta\mathbb{N}$ como sendo o conjunto de todos os ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ e os abertos como sendo todos os conjuntos da forma

$$V(A) = \{u \in \beta\mathbb{N} : A \in u\},$$

para $A \subseteq \mathbb{N}$.

# *O problema de Efimov*

As seguintes propridades de $\beta\mathbb{N}$ mostram que ele é o "oposto" de uma sequência convergente:

1. Não tem sequências convergentes não trivais.
2. $|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^\omega}$
3. A menor base de $\beta\mathbb{N}$ tem tamanho $2^\omega$.

# O problema de Efimov

Mas será que não é possível conseguir um exemplo "mais simples" de um espaço compacto sem sequências convergentes?

De certa forma, essa foi a pergunta feita por Efimov em 1969:

*Problema (de Efimov)*

É verdade que todo espaço compacto infinito contém uma sequência convergente não trivial ou uma cópia de $\beta\mathbb{N}$?

O problema ainda não foi totalmente resolvido. Até o momento, apenas exemplos consistentes com ZFC são conhecidos.

## *O problema de Efimov*

Mas será que não é possível conseguir um exemplo "mais simples" de um espaço compacto sem sequências convergentes?
De certa forma, essa foi a pergunta feita por Efimov em 1969:

### *Problema (de Efimov)*

É verdade que todo espaço compacto infinito contém uma sequência convergente não trivial ou uma cópia de $\beta\mathbb{N}$?

O problema ainda não foi totalmente resolvido. Até o momento, apenas exemplos consistentes com ZFC são conhecidos.

# O problema de Efimov

Mas será que não é possível conseguir um exemplo "mais simples" de um espaço compacto sem sequências convergentes?
De certa forma, essa foi a pergunta feita por Efimov em 1969:

### Problema (de Efimov)

É verdade que todo espaço compacto infinito contém uma sequência convergente não trivial ou uma cópia de $\beta\mathbb{N}$?

O problema ainda não foi totalmente resolvido. Até o momento, apenas exemplos consistentes com ZFC são conhecidos.

# *O problema de Efimov*

Os primeiros exemplos foram feitos por Fedorčuk que publicou três construções em três artigos entre 1975 e 1977, cada um assumindo um axioma adicional diferente. Um deles usa a Hipótese do Contínuo.

Outros exemplos foram contruídos posteiromente, mas sempre assumindo algum axioma adicional. Em particular, há uma construção feita por Dow e Shelah, publicada em 2013, usando MA.

Alan Dow possui também artigos bem recentes sobre o problema de Efimov, incluindo um com Will Brian publicado em 2022 e um publicado em 2024.

Como não temos nenhum resultado de consistência que diga que um exemplo não existe, é possível exista um em ZFC.

# *O problema de Efimov*

Os primeiros exemplos foram feitos por Fedorčuk que publicou três construções em três artigos entre 1975 e 1977, cada um assumindo um axioma adicional diferente. Um deles usa a Hipótese do Contínuo.

Outros exemplos foram contruídos posteiromente, mas sempre assumindo algum axioma adicional. Em particular, há uma construção feita por Dow e Shelah, publicada em 2013, usando MA.

Alan Dow possui também artigos bem recentes sobre o problema de Efimov, incluindo um com Will Brian publicado em 2022 e um publicado em 2024.

Como não temos nenhum resultado de consistência que diga que um exemplo não existe, é possível exista um em ZFC.

# *O problema de Efimov*

Os primeiros exemplos foram feitos por Fedorčuk que publicou três construções em três artigos entre 1975 e 1977, cada um assumindo um axioma adicional diferente. Um deles usa a Hipótese do Contínuo.

Outros exemplos foram contruídos posteiromente, mas sempre assumindo algum axioma adicional. Em particular, há uma construção feita por Dow e Shelah, publicada em 2013, usando MA.

Alan Dow possui também artigos bem recentes sobre o problema de Efimov, incluindo um com Will Brian publicado em 2022 e um publicado em 2024.

Como não temos nenhum resultado de consistência que diga que um exemplo não existe, é possível exista um em ZFC.

## *O problema de Efimov*

Os primeiros exemplos foram feitos por Fedorčuk que publicou três construções em três artigos entre 1975 e 1977, cada um assumindo um axioma adicional diferente. Um deles usa a Hipótese do Contínuo.

Outros exemplos foram contruídos posteiromente, mas sempre assumindo algum axioma adicional. Em particular, há uma construção feita por Dow e Shelah, publicada em 2013, usando MA.

Alan Dow possui também artigos bem recentes sobre o problema de Efimov, incluindo um com Will Brian publicado em 2022 e um publicado em 2024.

Como não temos nenhum resultado de consistência que diga que um exemplo não existe, é possível exista um em ZFC.

# *O problema de Dowker*

A classe dos espaços normais é uma das mais importantes, mas uma das mais difíceis de estudar. Por exemplo, ela não se comporta bem com relação a várias operações topológicas, como acontece com outros axiomas de separação mais fracos (ou mesmo alguns mais fortes). Por exemplo:

Dados dois espaços topológicos $X$ e $Y$, podemos considerar a topologia produto em $X \times Y$.

É natural perguntar quais propriedades de $X$ e $Y$ serão preservadas. Em particular:

**Pergunta:** Se $X$ e $Y$ são espaços normais, $X \times Y$ é normal?

**Resposta:** Não, a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ é normal mas $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é.

## *O problema de Dowker*

A classe dos espaços normais é uma das mais importantes, mas uma das mais difíceis de estudar. Por exemplo, ela não se comporta bem com relação a várias operações topológicas, como acontece com outros axiomas de separação mais fracos (ou mesmo alguns mais fortes). Por exemplo:

Dados dois espaços topológicos $X$ e $Y$, podemos considerar a topologia produto em $X \times Y$.

É natural perguntar quais propriedades de $X$ e $Y$ serão preservadas. Em particular:

**Pergunta:** Se $X$ e $Y$ são espaços normais, $X \times Y$ é normal?

**Resposta:** Não, a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ é normal mas $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é.

# *O problema de Dowker*

A classe dos espaços normais é uma das mais importantes, mas uma das mais difíceis de estudar. Por exemplo, ela não se comporta bem com relação a várias operações topológicas, como acontece com outros axiomas de separação mais fracos (ou mesmo alguns mais fortes). Por exemplo:

Dados dois espaços topológicos $X$ e $Y$, podemos considerar a topologia produto em $X \times Y$.

É natural perguntar quais propriedades de $X$ e $Y$ serão preservadas. Em particular:

**Pergunta:** Se $X$ e $Y$ são espaços normais, $X \times Y$ é normal?

**Resposta:** Não, a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ é normal mas $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é.

# *O problema de Dowker*

A classe dos espaços normais é uma das mais importantes, mas uma das mais difíceis de estudar. Por exemplo, ela não se comporta bem com relação a várias operações topológicas, como acontece com outros axiomas de separação mais fracos (ou mesmo alguns mais fortes). Por exemplo:

Dados dois espaços topológicos $X$ e $Y$, podemos considerar a topologia produto em $X \times Y$.

É natural perguntar quais propriedades de $X$ e $Y$ serão preservadas. Em particular:

**Pergunta:** Se $X$ e $Y$ são espaços normais, $X \times Y$ é normal?

**Resposta:** Não, a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ é normal mas $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é.

# *O problema de Dowker*

Mas e se tivermos $Y$ com mais propriedades? Vamos considerar um com muitas propriedades boas: $Y = [0, 1]$.

Essa foi a pergunta feita por Dowker em 1951:

*Problema (de Dowker)*

Se $X$ é normal, então $X \times [0, 1]$ é normal?

Um contra-exemplo para esse problema é chamado de *Espaço de Dowker*.

O primeiro exemplo consistente foi construído por Mary Ellen Rudin em 1955. Em 1972 ela construiu o primeiro (e um dos únicos) exemplo em ZFC (ou seja, sem assumir axiomas adicionais).

# *O problema de Dowker*

Mas e se tivermos $Y$ com mais propriedades? Vamos considerar um com muitas propriedades boas: $Y = [0, 1]$.

Essa foi a pergunta feita por Dowker em 1951:

*Problema (de Dowker)*

Se $X$ é normal, então $X \times [0, 1]$ é normal?

Um contra-exemplo para esse problema é chamado de *Espaço de Dowker*.

O primeiro exemplo consistente foi construído por Mary Ellen Rudin em 1955. Em 1972 ela construiu o primeiro (e um dos únicos) exemplo em ZFC (ou seja, sem assumir axiomas adicionais).

# O problema de Dowker

Mas e se tivermos $Y$ com mais propriedades? Vamos considerar um com muitas propriedades boas: $Y = [0, 1]$.

Essa foi a pergunta feita por Dowker em 1951:

*Problema (de Dowker)*

Se $X$ é normal, então $X \times [0, 1]$ é normal?

Um contra-exemplo para esse problema é chamado de *Espaço de Dowker*.

O primeiro exemplo consistente foi construído por Mary Ellen Rudin em 1955. Em 1972 ela construiu o primeiro (e um dos únicos) exemplo em ZFC (ou seja, sem assumir axiomas adicionais).

# *O problema de Dowker*

No entanto esse exemplo construído por ela não tinha propridades muito boas e era "grande". Daí começou a procura por um exemplo "menor", com propriedades "melhores", o que deu origem ao que ficou conhecido como o *problema do espaço de Dowker pequeno*.

Por exemplo, surgiu o seguinte problema:

*Problema*

Existe uma espaço de Dowker de cardinalidade no máximo $\mathfrak{c} = 2^{\omega}$?

Depois de várias construções de exemplos consistentes, esse problema foi finalmente resolvido por Balogh em 1996. Ele contruiu em ZFC um exemplo de um Espaço de Dowker de cardinalidade $\mathfrak{c}$.

# O problema de Dowker

No entanto esse exemplo construído por ela não tinha propridades muito boas e era "grande". Daí começou a procura por um exemplo "menor", com propriedades "melhores", o que deu origem ao que ficou conhecido como o *problema do espaço de Dowker pequeno*.

Por exemplo, surgiu o seguinte problema:

*Problema*

Existe uma espaço de Dowker de cardinalidade no máximo $\mathfrak{c} = 2^\omega$?

Depois de várias construções de exemplos consistentes, esse problema foi finalmente resolvido por Balogh em 1996. Ele contruiu em ZFC um exemplo de um Espaço de Dowker de cardinalidade $\mathfrak{c}$.

# O problema de Dowker

No entanto esse exemplo construído por ela não tinha propridades muito boas e era "grande". Daí começou a procura por um exemplo "menor", com propriedades "melhores", o que deu origem ao que ficou conhecido como o *problema do espaço de Dowker pequeno*.

Por exemplo, surgiu o seguinte problema:

### *Problema*

Existe uma espaço de Dowker de cardinalidade no máximo $\mathfrak{c} = 2^{\omega}$?

Depois de várias construções de exemplos consistentes, esse problema foi finalmente resolvido por Balogh em 1996. Ele contruiu em ZFC um exemplo de um Espaço de Dowker de cardinalidade $\mathfrak{c}$.

# *O problema de Dowker*

Agora, o "tamanho" do contínuo não é determinado em ZFC, ele pode ser "pequeno"ou "grande", dependendo do modelo de ZFC que se considera.

Kojman e Shelah, usando a teoria pcf de Shelah, construíram, em 1998, uma espaço de Dowker de cardinalidade $\aleph_{\omega+1}$. Esse é um exemplo em ZFC e é o único que tem o seu tamanho determinado em ZFC.

Entretanto ele é uma modificação (na verdade é um subespaço) do exemplo de M.E. Rudin.

De certa forma, os únicos exemplos de espaço de Dowker que temos em ZFC são o da M.E. Rudin, que tem tamanho $\aleph_\omega^\omega$ e o do Balogh, que tem tamanho $2^\omega$. As outras construções que aparecem na literatura são feitas a partir de ou modificações destes.

# *O problema de Dowker*

Agora, o "tamanho" do contínuo não é determinado em ZFC, ele pode ser "pequeno"ou "grande", dependendo do modelo de ZFC que se considera.

Kojman e Shelah, usando a teoria pcf de Shelah, construíram, em 1998, uma espaço de Dowker de cardinalidade $\aleph_{\omega+1}$. Esse é um exemplo em ZFC e é o único que tem o seu tamanho determinado em ZFC.

Entretanto ele é uma modificação (na verdade é um subespaço) do exemplo de M.E. Rudin.

De certa forma, os únicos exemplos de espaço de Dowker que temos em ZFC são o da M.E. Rudin, que tem tamanho $\aleph_\omega^\omega$ e o do Balogh, que tem tamanho $2^\omega$. As outras construções que aparecem na literatura são feitas a partir de ou modificações destes.

# *O problema de Dowker*

Agora, o "tamanho" do contínuo não é determinado em ZFC, ele pode ser "pequeno"ou "grande", dependendo do modelo de ZFC que se considera.

Kojman e Shelah, usando a teoria pcf de Shelah, construíram, em 1998, uma espaço de Dowker de cardinalidade $\aleph_{\omega+1}$. Esse é um exemplo em ZFC e é o único que tem o seu tamanho determinado em ZFC.

Entretanto ele é uma modificação (na verdade é um subespaço) do exemplo de M.E. Rudin.

De certa forma, os únicos exemplos de espaço de Dowker que temos em ZFC são o da M.E. Rudin, que tem tamanho $\aleph_\omega^\omega$ e o do Balogh, que tem tamanho $2^\omega$. As outras construções que aparecem na literatura são feitas a partir de ou modificações destes.

# O problema de Dowker

Agora, o "tamanho" do contínuo não é determinado em ZFC, ele pode ser "pequeno"ou "grande", dependendo do modelo de ZFC que se considera.

Kojman e Shelah, usando a teoria pcf de Shelah, construíram, em 1998, uma espaço de Dowker de cardinalidade $\aleph_{\omega+1}$. Esse é um exemplo em ZFC e é o único que tem o seu tamanho determinado em ZFC.

Entretanto ele é uma modificação (na verdade é um subespaço) do exemplo de M.E. Rudin.

De certa forma, os únicos exemplos de espaço de Dowker que temos em ZFC são o da M.E. Rudin, que tem tamanho $\aleph_\omega^\omega$ e o do Balogh, que tem tamanho $2^\omega$. As outras construções que aparecem na literatura são feitas a partir de ou modificações destes.

# O problema de Dowker

Ainda tem problemas a serem resolvidos.
Por exemplo, até o momento temos apenas exemplos consistentes para as seguintes perguntas:

### Problema

Existe um espaço de Dowker de cardinalidade $\aleph_1$.

### Problema

Existe uma espaço de Dowker que satisfaça o primeiro axioma da enumerabilidade?

### Problema

Existe uma espaço de Dowker separável?

## *O problema de Dowker*

Ainda tem problemas a serem resolvidos.
Por exemplo, até o momento temos apenas exemplos consistentes para as seguintes perguntas:

### *Problema*

Existe um espaço de Dowker de cardinalidade $\aleph_1$.

### *Problema*

Existe uma espaço de Dowker que satisfaça o primeiro axioma da enumerabilidade?

### *Problema*

Existe uma espaço de Dowker separável?

# *O problema de Dowker*

Ainda tem problemas a serem resolvidos.
Por exemplo, até o momento temos apenas exemplos consistentes para as seguintes perguntas:

### *Problema*

Existe um espaço de Dowker de cardinalidade $\aleph_1$.

### *Problema*

Existe uma espaço de Dowker que satisfaça o primeiro axioma da enumerabilidade?

### *Problema*

Existe uma espaço de Dowker separável?

# O problema de Dowker

Ainda tem problemas a serem resolvidos.
Por exemplo, até o momento temos apenas exemplos consistentes para as seguintes perguntas:

### Problema

Existe um espaço de Dowker de cardinalidade $\aleph_1$.

### Problema

Existe uma espaço de Dowker que satisfaça o primeiro axioma da enumerabilidade?

### Problema

Existe uma espaço de Dowker separável?

# O problema de Dowker

Existem "vários" exemplos consistentes construídos que respondem as perguntas anteriores de forma negativamente, usando axiomas diferentes.

Por exemplo, tem um espaço de Dowker construído por Juhász, Kunen e Rudin, usando CH, que é primeiro enumerável e de cardinalidade $\omega_1$.

No entanto, não se sabe ainda se é possível construir um exemplo sem assumir axiomas adicionais para nenhuma delas.

Aparentemente, os exemplos em ZFC construídos por Rudin e por Balogh não tem como serem usados para resolver esses problemas. Precisa ser desenvolvida alguma ferramenta nova para isso.

# *O problema de Dowker*

Existem "vários" exemplos consistentes construídos que respondem as perguntas anteriores de forma negativamente, usando axiomas diferentes.

Por exemplo, tem um espaço de Dowker construído por Juhász, Kunen e Rudin, usando CH, que é primeiro enumerável e de cardinalidade $\omega_1$.

No entanto, não se sabe ainda se é possível construir um exemplo sem assumir axiomas adicionais para nenhuma delas.

Aparentemente, os exemplos em ZFC construídos por Rudin e por Balogh não tem como serem usados para resolver esses problemas. Precisa ser desenvolvida alguma ferramenta nova para isso.

# O problema de Dowker

Existem "vários" exemplos consistentes construídos que respondem as perguntas anteriores de forma negativamente, usando axiomas diferentes.

Por exemplo, tem um espaço de Dowker construído por Juhász, Kunen e Rudin, usando CH, que é primeiro enumerável e de cardinalidade $\omega_1$.

No entanto, não se sabe ainda se é possível construir um exemplo sem assumir axiomas adicionais para nenhuma delas.

Aparentemente, os exemplos em ZFC construídos por Rudin e por Balogh não tem como serem usados para resolver esses problemas. Precisa ser desenvolvida alguma ferramenta nova para isso.

# *O problema de Dowker*

Existem "vários" exemplos consistentes construídos que respondem as perguntas anteriores de forma negativamente, usando axiomas diferentes.

Por exemplo, tem um espaço de Dowker construído por Juhász, Kunen e Rudin, usando CH, que é primeiro enumerável e de cardinalidade $\omega_1$.

No entanto, não se sabe ainda se é possível construir um exemplo sem assumir axiomas adicionais para nenhuma delas.

Aparentemente, os exemplos em ZFC construídos por Rudin e por Balogh não tem como serem usados para resolver esses problemas. Precisa ser desenvolvida alguma ferramenta nova para isso.

# *O problema de Dowker*

Existem "vários" exemplos consistentes construídos que respondem as perguntas anteriores de forma negativamente, usando axiomas diferentes.

Por exemplo, tem um espaço de Dowker construído por Juhász, Kunen e Rudin, usando CH, que é primeiro enumerável e de cardinalidade $\omega_1$.

No entanto, não se sabe ainda se é possível construir um exemplo sem assumir axiomas adicionais para nenhuma delas.

Aparentemente, os exemplos em ZFC construídos por Rudin e por Balogh não tem como serem usados para resolver esses problemas. Precisa ser desenvolvida alguma ferramenta nova para isso.

# Bônus: O Problema de Michael

*Definição*

Dizemos que um espaço é de Lindelöf se todo recobrimento aberto possui um recobrimento enumerável.

Todo espaço regular de Lindelöf é normal e a Reta de Sorgenfrey é de Lindelöf. Temos então que a propridade de Lindelöf também não é preservada por produtos.

O principal problema relacionado a esse assunto, ainda em aberto é:

*Problema (de Michael)*

Existe um espaço de Lindelöf $X$ tal que $X \times \mathbb{P}$, sendo $\mathbb{P}$ os irracionais, é de Lindelöf?

Até o momento existem apenas exemplos consistentes. No problema, é equivalente perdir que o produto seja normal.

# *Bônus: O Problema de Michael*

*Definição*

Dizemos que um espaço é de Lindelöf se todo recobrimento aberto possui um recobrimento enumerável.

Todo espaço regular de Lindelöf é normal e a Reta de Sorgenfrey é de Lindelöf. Temos então que a propridade de Lindelöf também não é preservada por produtos.

O principal problema relacionado a esse assunto, ainda em aberto é:

*Problema (de Michael)*

Existe um espaço de Lindelöf $X$ tal que $X \times \mathbb{P}$, sendo $\mathbb{P}$ os irracionais, é de Lindelöf?

Até o momento existem apenas exemplos consistentes. No problema, é equivalente perdir que o produto seja normal.

# Bônus: O Problema de Michael

## Definição

Dizemos que um espaço é de Lindelöf se todo recobrimento aberto possui um recobrimento enumerável.

Todo espaço regular de Lindelöf é normal e a Reta de Sorgenfrey é de Lindelöf. Temos então que a propridade de Lindelöf também não é preservada por produtos.

O principal problema relacionado a esse assunto, ainda em aberto é:

## Problema (de Michael)

Existe um espaço de Lindelöf $X$ tal que $X \times \mathbb{P}$, sendo $\mathbb{P}$ os irracionais, é de Lindelöf?

Até o momento existem apenas exemplos consistentes. No problema, é equivalente perdir que o produto seja normal.

# Bônus: O Problema de Michael

## Definição

Dizemos que um espaço é de Lindelöf se todo recobrimento aberto possui um recobrimento enumerável.

Todo espaço regular de Lindelöf é normal e a Reta de Sorgenfrey é de Lindelöf. Temos então que a propridade de Lindelöf também não é preservada por produtos.

O principal problema relacionado a esse assunto, ainda em aberto é:

## Problema (de Michael)

Existe um espaço de Lindelöf $X$ tal que $X \times \mathbb{P}$, sendo $\mathbb{P}$ os irracionais, é de Lindelöf?

Até o momento existem apenas exemplos consistentes. No problema, é equivalente perdir que o produto seja normal.

## *Bônus: O Problema de Michael*

### *Definição*

Dizemos que um espaço é de Lindelöf se todo recobrimento aberto possui um recobrimento enumerável.

Todo espaço regular de Lindelöf é normal e a Reta de Sorgenfrey é de Lindelöf. Temos então que a propridade de Lindelöf também não é preservada por produtos.
O principal problema relacionado a esse assunto, ainda em aberto é:

### *Problema (de Michael)*

Existe um espaço de Lindelöf $X$ tal que $X \times \mathbb{P}$, sendo $\mathbb{P}$ os irracionais, é de Lindelöf?

Até o momento existem apenas exemplos consistentes. No problema, é equivalente perdir que o produto seja normal.

## *Referências*


[1] Elliot M. Pearl (editor), *Open Problems in Topology II*, Elsevier, 2007.

[2] P. Larson and S. Todorcevic, *Katětov´s Problem*, Transactions of the American Mathematical Society **354** (2001), 1783–1791.

[3] M. E. Rudin, *Lectures on Set Theoretic Topology*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 23, AMS, 1975.

OBRIGADA!