Como simular o movimento Browniano em casa (e sem um computador)

IX Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA

Guilherme Reis - IMPA - guilherme.dwg@gmail.br

Motivação

Vídeo do tabuleiro de Galton: `https://www.youtube.com/watch?v=EvHiee7gs9Y`

Motivação

Vídeo do tabuleiro de Galton: `https://www.youtube.com/watch?v=EvHiee7gs9Y`

Passo 0: revisar o básico de probabilidade.

Motivação

Vídeo do tabuleiro de Galton: `https://www.youtube.com/watch?v=EvHiee7gs9Y`

Passo 0: revisar o básico de probabilidade.

Passo 1: modelar

esse experimento usando probabilidade.

Motivação

Vídeo do tabuleiro de Galton: `https://www.youtube.com/watch?v=EvHiee7gs9Y`
Passo 0: revisar o básico de probabilidade.
Passo 1: modelar
esse experimento usando probabilidade.
Pergunta 1: porque
aparece essa curva em formato de sino?

Motivação

Vídeo do tabuleiro de Galton: `https://www.youtube.com/watch?v=EvHiee7gs9Y`
Passo 0: revisar o básico de probabilidade.
Passo 1: modelar
esse experimento usando probabilidade.
Pergunta 1: porque
aparece essa curva em formato de sino?
Pergunta
2: como pode surgir algo determinístico
de um experimento tão caótico?

Motivação

Vídeo do tabuleiro de Galton: `https://www.youtube.com/watch?v=EvHiee7gs9Y`

Passo 0: revisar o básico de probabilidade.

Passo 1: modelar esse experimento usando probabilidade.

Pergunta 1: porque aparece essa curva em formato de sino?

Pergunta 2: como pode surgir algo determinístico de um experimento tão caótico?

Pergunta 3: o que é o movimento Browninano e qual a relação com o tabuleiro de Galton.

Uma breve introdução à probabilidade

O experimento probabilístico mais simples: lançamento de uma moeda.

Uma breve introdução à probabilidade

O experimento probabilístico mais simples: lançamento de uma moeda.

Resultado do experimento: cara (0) ou coroa (1) com a mesma chance.

Uma breve introdução à probabilidade

O experimento probabilístico mais simples: lançamento de uma moeda.

Resultado do experimento: cara (0) ou coroa (1) com a mesma chance.

Seja $X \in \{0, 1\}$ o resultado do lançamento de uma moeda honesta.

Uma breve introdução à probabilidade

O experimento probabilístico mais simples: lançamento de uma moeda.
Resultado do experimento: cara (0) ou coroa (1) com a mesma chance.
Seja $X \in \{0, 1\}$ o resultado do lançamento de uma moeda honesta.
Então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X = 0] &= \mathbb{P}[\text{resultado do lançamento é cara}] = 1/2, \\ \mathbb{P}[X = 1] &= \mathbb{P}[\text{resultado do lançamento é coroa}] = 1/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Experimentos independentes

Queremos repetir um experimento aleatório muitas vezes.

Experimentos independentes

Queremos repetir um experimento aleatório muitas vezes.
Por exemplo, vamos lançar a mesma moeda repetidas vezes.

Experimentos independentes

Queremos repetir um experimento aleatório muitas vezes.
Por exemplo, vamos lançar a mesma moeda repetidas vezes.
Matematicamente, sejam $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... os resultados sucessivos dos lançamentos de uma mesma moeda.

Experimentos independentes

Queremos repetir um experimento aleatório muitas vezes.
Por exemplo, vamos lançar a mesma moeda repetidas vezes.
Matematicamente, sejam $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... os resultados sucessivos dos lançamentos de uma mesma moeda.
Dizemos que $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... têm a mesma distribuição pois

$$\mathbb{P}[X^{(i)} = 0] = \mathbb{P}[X^{(i)} = 1] = 1/2, \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Experimentos independentes

Queremos repetir um experimento aleatório muitas vezes.
Por exemplo, vamos lançar a mesma moeda repetidas vezes.
Matematicamente, sejam $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... os resultados sucessivos dos lançamentos de uma mesma moeda.
Dizemos que $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... têm a mesma distribuição pois

$$\mathbb{P}[X^{(i)} = 0] = \mathbb{P}[X^{(i)} = 1] = 1/2, \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Um resultado possível é $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, X^{(4)}) = (0, 1, 1, 1)$.

Experimentos independentes

Queremos repetir um experimento aleatório muitas vezes.
Por exemplo, vamos lançar a mesma moeda repetidas vezes.
Matematicamente, sejam $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... os resultados sucessivos dos lançamentos de uma mesma moeda.
Dizemos que $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... têm a mesma distribuição pois

$$\mathbb{P}[X^{(i)} = 0] = \mathbb{P}[X^{(i)} = 1] = 1/2, \forall\, i \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

Um resultado possível é $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, X^{(4)}) = (0, 1, 1, 1)$.
Assumimos que os lançamentos sucessivos dessa moeda são independentes: intuitivamente isso quer dizer que um lançamento dessa moeda não influencia em outros lançamentos.

Distribuição Binomial

Sejam $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... os lançamentos repetidos e independentes de uma moeda.

Distribuição Binomial

Sejam $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... os lançamentos repetidos e independentes de uma moeda.

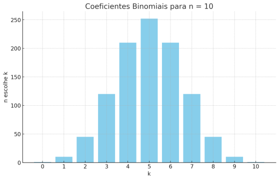
Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} X^{(i)} = \#\{1 \leq i \leq n : X^{(i)} = 1\}$. Dizemos que S_n tem distribuição Binomial.

Distribuição Binomial

Sejam $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... os lançamentos repetidos e independentes de uma moeda.
Seja $S_n = \sum_{i=1}^n X^{(i)} = \#\{1 \le i \le n : X^{(i)} = 1\}$. Dizemos que S_n tem distribuição Binomial.
A razão do nome vem do fato (exercício) de que
$\mathbb{P}[S_n = k] = \binom{n}{k} \dfrac{1}{2^n}$.

Distribuição Binomial

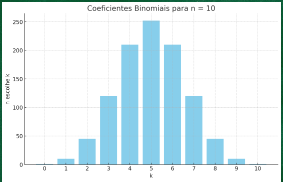
Sejam $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ os lançamentos repetidos e independentes de uma moeda.
Seja $S_n = \sum_{i=1}^n X^{(i)} = \#\{1 \leq i \leq n : X^{(i)} = 1\}$. Dizemos que S_n tem distribuição Binomial.
A razão do nome vem do fato (exercício) de que
$\mathbb{P}[S_n = k] = \binom{n}{k} \dfrac{1}{2^n}$.



Isso nos sugere que a curva que aparece no tabuleiro de Galton está relacionada com os coeficientes binomiais. Mas como?

Distribuição Binomial

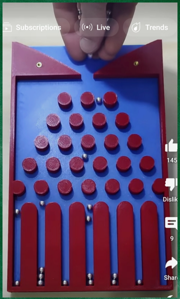
Sejam $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ os lançamentos repetidos e independentes de uma moeda.
Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} X^{(i)} = \#\{1 \leq i \leq n : X^{(i)} = 1\}$. Dizemos que S_n tem distribuição Binomial.
A razão do nome vem do fato (exercício) de que
$\mathbb{P}[S_n = k] = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$.



Isso nos sugere que a curva que aparece no tabuleiro de Galton está relacionada com os coeficientes binomiais. Mas como?
Antes de responder essa pergunta precisamos modelar o tabuleiro de Galton.

Um tabuleiro de Galton menor

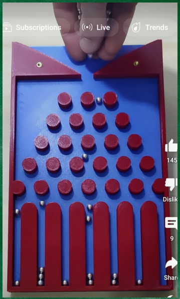
Vídeo: `https://www.youtube.com/shorts/qPnhHqqfSFs`.



Um tabuleiro de Galton menor

Vídeo: `https://www.youtube.com/shorts/qPnhHqqfSFs`.

Modelo para uma bolinha.

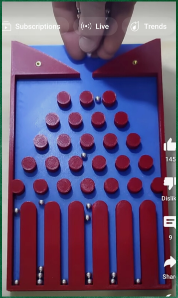


Um tabuleiro de Galton menor

Vídeo: `https://www.youtube.com/shorts/qPnhHqqfSFs`.

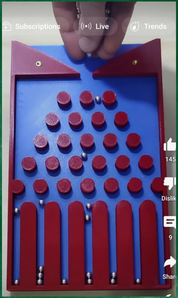
Modelo para uma bolinha.

Posição inicial é $X_0 = 0$.



Um tabuleiro de Galton menor

Vídeo: `https://www.youtube.com/shorts/qPnhHqqfSFs`.
Modelo para uma bolinha.
Posição inicial é $X_0 = 0$.
Seja $\delta^{(1)} \in \{-1, +1\}$ o deslocamento (aleatório) da bolinha após atingir o primeiro pino.



Um tabuleiro de Galton menor

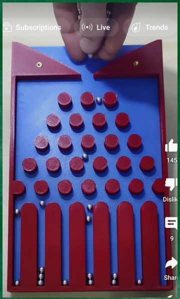
Vídeo: `https://www.youtube.com/shorts/qPnhHqqfSFs`.

Modelo para uma bolinha.

Posição inicial é $X_0 = 0$.

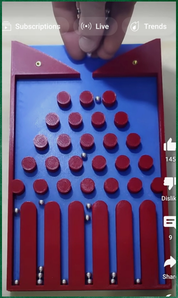
Seja $\delta^{(1)} \in \{-1, +1\}$ o deslocamento (aleatório) da bolinha após atingir o primeiro pino.

Seja $\delta^{(2)} \in \{-1, +1\}$ o deslocamento após atingir o segundo nível de pinos e assim por diante.



Um tabuleiro de Galton menor

Vídeo: `https://www.youtube.com/shorts/qPnhHqqfSFs`.
Modelo para uma bolinha.
Posição inicial é $X_0 = 0$.
Seja
$\delta^{(1)} \in \{-1, +1\}$ o deslocamento (aleatório) da bolinha após atingir o primeiro pino.
Seja
$\delta^{(2)} \in \{-1, +1\}$ o deslocamento após atingir o segundo nível de pinos e assim por diante.



A posição final será $S_n = \sum_{i=1}^{n} \delta^{(i)}$ e assumimos que os $\delta^{(i)}$'s são independentes e que

$$\mathbb{P}[\delta^{(i)} = -1] = \mathbb{P}[\delta^{(i)} = +1] = 1/2. \tag{3}$$

Uma bolinha

Pode ser mostrado que, para $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$,
$2k - n \in \{-n, -n+2, \ldots, n-2, n\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n = 2k - n] &= \mathbb{P}[\#\{1 \leq i \leq n : \delta^{(i)} = +1\} = k] \\ &= \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Uma bolinha

Pode ser mostrado que, para $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $2k - n \in \{-n, -n+2, \ldots, n-2, n\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n = 2k - n] &= \mathbb{P}[\#\{1 \leq i \leq n : \delta^{(i)} = +1\} = k] \\ &= \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Isto é, à medida que variamos k, a probabilidade de uma bolinha cair na posição $2k - n$ segue uma curva de sino.

Uma bolinha

Pode ser mostrado que, para $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $2k - n \in \{-n, -n+2, \ldots, n-2, n\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n = 2k - n] &= \mathbb{P}[\#\{1 \leq i \leq n : \delta^{(i)} = +1\} = k] \\ &= \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Isto é, à medida que variamos k, a probabilidade de uma bolinha cair na posição $2k - n$ segue uma curva de sino.

Mas o que essa probabilidade tem a ver com a quantidade de bolinhas que caem numa mesma posição?

Uma bolinha

Pode ser mostrado que, para $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $2k - n \in \{-n, -n+2, \ldots, n-2, n\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n = 2k - n] &= \mathbb{P}[\#\{1 \leq i \leq n : \delta^{(i)} = +1\} = k] \\ &= \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Isto é, à medida que variamos k, a probabilidade de uma bolinha cair na posição $2k - n$ segue uma curva de sino.
Mas o que essa probabilidade tem a ver com a quantidade de bolinhas que caem numa mesma posição?
Antes disso precisamos modelar o lançamento de várias bolinhas

Uma bolinha

Pode ser mostrado que, para $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $2k - n \in \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n = 2k - n] &= \mathbb{P}[\#\{1 \le i \le n : \delta^{(i)} = +1\} = k] \\ &= \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Isto é, à medida que variamos k, a probabilidade de uma bolinha cair na posição $2k - n$ segue uma curva de sino.

Mas o que essa probabilidade tem a ver com a quantidade de bolinhas que caem numa mesma posição?

Antes disso precisamos modelar o lançamento de várias bolinhas

Observação: o lançamento de uma bolinha no tabuleiro de Galton também é chamado de passeio aleatório simples.

Várias bolinhas

Já modelamos o lançamento de uma bolinha.

Várias bolinhas

Já modelamos o lançamento de uma bolinha.

Seja agora $S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(m)}$ a posição final de m bolinhas lançadas sucessivamente em um tabuleiro de Galton com n níveis.

Várias bolinhas

Já modelamos o lançamento de uma bolinha.
Seja agora $S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(m)}$ a posição final de m bolinhas lançadas sucessivamente em um tabuleiro de Galton com n níveis.
Isto é, assumimos que elas têm a mesma distribuição. Também assumimos que são independentes.

Várias bolinhas

Já modelamos o lançamento de uma bolinha.
Seja agora $S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(m)}$ a posição final de m bolinhas lançadas sucessivamente em um tabuleiro de Galton com n níveis.
Isto é, assumimos que elas têm a mesma distribuição. Também assumimos que são independentes.
Nosso objetivo é mostrar que para $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ e em cada posição $2k - n \in \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$,

$$\#\{1 \leq i \leq m : S_n^{(i)} = 2k - n\} \tag{5}$$

é proporcional à $\mathbb{P}[S_n = 2k - n] = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$.

Várias bolinhas

Já modelamos o lançamento de uma bolinha.
Seja agora $S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(m)}$ a posição final de m bolinhas lançadas sucessivamente em um tabuleiro de Galton com n níveis.
Isto é, assumimos que elas têm a mesma distribuição. Também assumimos que são independentes.
Nosso objetivo é mostrar que para $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ e em cada posição $2k - n \in \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$,

$$\#\{1 \leq i \leq m : S_n^{(i)} = 2k - n\} \tag{5}$$

é proporcional à $\mathbb{P}[S_n = 2k - n] = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$.
Isso implicaria que a quantidade de bolinhas em uma determinada posição segue a curva de sino.

Várias bolinhas

Já modelamos o lançamento de uma bolinha.
Seja agora $S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(m)}$ a posição final de m bolinhas lançadas sucessivamente em um tabuleiro de Galton com n níveis.
Isto é, assumimos que elas têm a mesma distribuição. Também assumimos que são independentes.
Nosso objetivo é mostrar que para $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e em cada posição $2k - n \in \{-n, -n+2, \ldots, n-2, n\}$,

$$\#\{1 \leq i \leq m : S_n^{(i)} = 2k - n\} \tag{5}$$

é proporcional à $\mathbb{P}[S_n = 2k - n] = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$.
Isso implicaria que a quantidade de bolinhas em uma determinada posição segue a curva de sino.
A Lei Forte dos Grandes Números nos diz exatamente isso.

Lei Forte dos Grandes Números

LFGN em palavras: se repetirmos um mesmo experimento aleatório várias vezes de forma independente, a proporção de vezes em que observamos um determinado evento converge para a probabilidade desse evento.

Lei Forte dos Grandes Números

LFGN em palavras: se repetirmos um mesmo experimento aleatório várias vezes de forma independente, a proporção de vezes em que observamos um determinado evento converge para a probabilidade desse evento.

Por exemplo, se $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... é o resultado do lançamento sucessivo e independente de uma moeda então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{1 \leq i \leq n : X^{(i)} = 1\} = \mathbb{P}[X^{(1)} = 1]. \tag{6}$$

Consequência da LFGN

Analogamente, se $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, ... é a posição final do lançamento sucessivo e independente de uma bolinha no tabuleiro de Galton, então para cada k e n fixados,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\#\{1 \leq i \leq m : S_n^{(i)} = 2k-n\} = \mathbb{P}[S_n = 2k-n] = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}. \tag{7}$$

Consequência da LFGN

Analogamente, se $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, ... é a posição final do lançamento sucessivo e independente de uma bolinha no tabuleiro de Galton, então para cada k e n fixados,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\#\{1 \leq i \leq m : S_n^{(i)} = 2k-n\} = \mathbb{P}[S_n = 2k-n] = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}. \tag{7}$$

Conclusão: se o número de bolinhas é grande o suficiente, o número de bolinhas que cai em uma determinada posição segue uma curva de sino.

Slide Resumo

Em resumo, modelamos o movimento das bolinhas no tabuleiro de Galton como sucessivos deslocamentos aleatórios com valor -1 ou $+1$.

Slide Resumo

Em resumo, modelamos o movimento das bolinhas no tabuleiro de Galton como sucessivos deslocamentos aleatórios com valor -1 ou $+1$.

Isso é o mesmo que dizer que as bolinhas têm uma trajetória de passeio aleatório simples.

Slide Resumo

Em resumo, modelamos o movimento das bolinhas no tabuleiro de Galton como sucessivos deslocamentos aleatórios com valor -1 ou $+1$.

Isso é o mesmo que dizer que as bolinhas têm uma trajetória de passeio aleatório simples.

Vimos que a probabilidade de uma bolinha cair em uma determinada posição dependia de um coeficiente binomial.

Slide Resumo

Em resumo, modelamos o movimento das bolinhas no tabuleiro de Galton como sucessivos deslocamentos aleatórios com valor -1 ou $+1$.

Isso é o mesmo que dizer que as bolinhas têm uma trajetória de passeio aleatório simples.

Vimos que a probabilidade de uma bolinha cair em uma determinada posição dependia de um coeficiente binomial.

Pela Lei Forte dos Grandes Números, se repetirmos muitas vezes o lançamento de uma bolinha no tabuleiro de Galton de forma independente, a quantidade de bolinhas que caem em uma determinada posição é aproximadamente o mesmo que a probabilidade de uma única bolinha cair nessa posição.

Slide Resumo

Em resumo, modelamos o movimento das bolinhas no tabuleiro de Galton como sucessivos deslocamentos aleatórios com valor -1 ou $+1$.

Isso é o mesmo que dizer que as bolinhas têm uma trajetória de passeio aleatório simples.

Vimos que a probabilidade de uma bolinha cair em uma determinada posição dependia de um coeficiente binomial.

Pela Lei Forte dos Grandes Números, se repetirmos muitas vezes o lançamento de uma bolinha no tabuleiro de Galton de forma independente, a quantidade de bolinhas que caem em uma determinada posição é aproximadamente o mesmo que a probabilidade de uma única bolinha cair nessa posição.

Concluímos então que a quantidade de bolinhas que caem em uma determinada posição segue uma curva em formato de sino.

Tabuleiro de Galton generalizado

Tabuleiro de Galton padrão: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \delta^{(i)}$ onde $(\delta^{(i)})_i$ são independentes e

$$\mathbb{P}[\delta^{(i)} = -1] = \mathbb{P}[\delta^{(i)} = +1] = 1/2. \qquad (8)$$

Tabuleiro de Galton generalizado

Tabuleiro de Galton padrão: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \delta^{(i)}$ onde $(\delta^{(i)})_i$ são independentes e

$$\mathbb{P}[\delta^{(i)} = -1] = \mathbb{P}[\delta^{(i)} = +1] = 1/2. \tag{8}$$

Nos vídeos, no entanto, os deslocamentos não eram exatamente de -1 ou $+1$ unidades.

Tabuleiro de Galton generalizado

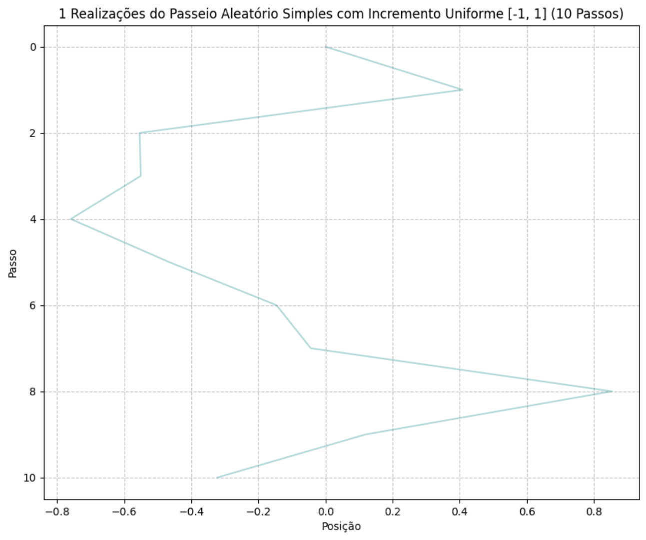
Tabuleiro de Galton padrão: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \delta^{(i)}$ onde $(\delta^{(i)})_i$ são independentes e

$$\mathbb{P}[\delta^{(i)} = -1] = \mathbb{P}[\delta^{(i)} = +1] = 1/2. \tag{8}$$

Nos vídeos, no entanto, os deslocamentos não eram exatamente de -1 ou $+1$ unidades.
Tabuleiro de Galton generalizado: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \delta^{(i)}$ onde $(\delta^{(i)})_i$ são independentes e, para todo $[a, b] \subset [-1, +1]$,

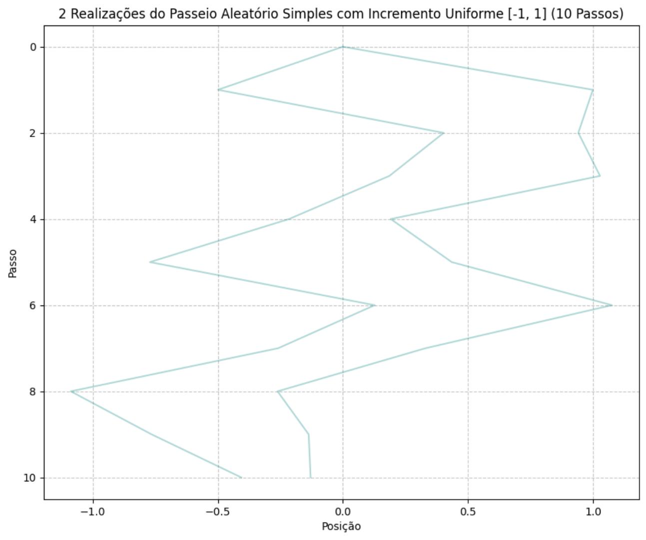
$$\mathbb{P}[\delta^{(i)} \in [a, b]] = \frac{b - a}{2}, \tag{9}$$

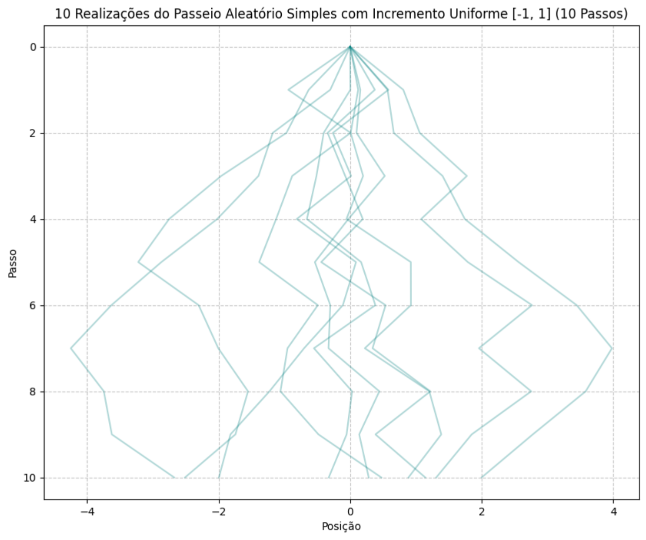
isto é, $\delta^{(i)} \in [-1, +1]$ é um número aleatório uniformemente distribuído.


1 Realizações do Passeio Aleatório Simples com Incremento Uniforme [-1, 1] (10 Passos)
Passo
0
2
4
6
8
10
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
Posição

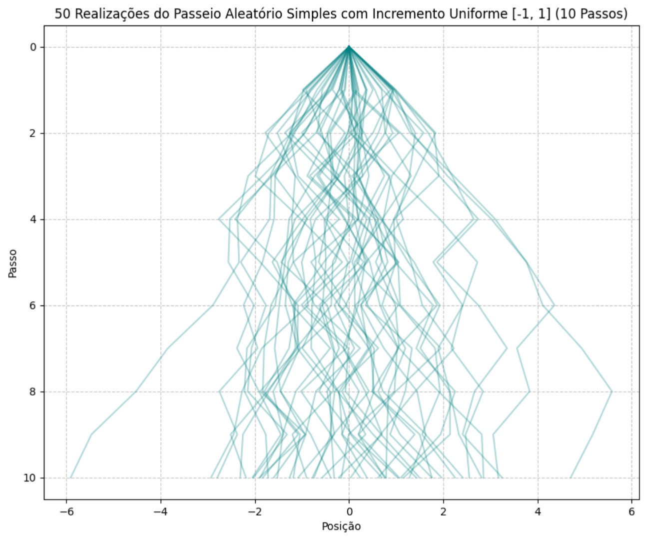
Como sempre, estamos interessados em repetir o mesmo experimento aleatório várias vezes.

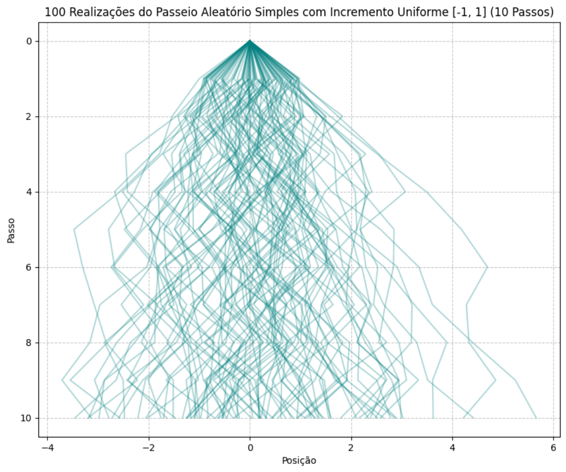
Como sempre, estamos interessados em repetir o mesmo experimento aleatório várias vezes.
Sejam $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, ... realizações independentes do tabuleiro de Galton generalizado.


2 Realizações do Passeio Aleatório Simples com Incremento Uniforme [-1, 1] (10 Passos)
Passo
Posição
0
2
4
6
8
10
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0



10 Realizações do Passeio Aleatório Simples com Incremento Uniforme [-1, 1] (10 Passos)
Passo
Posição
0
2
4
6
8
10
−4
−2
0
2
4


50 Realizações do Passeio Aleatório Simples com Incremento Uniforme [-1, 1] (10 Passos)
Passo
Posição
0
2
4
6
8
10
−6
−4
−2
0
2
4
6



Será que a quantidade de bolinhas que cai numa região também segue a curva no formato de sino?

No tabuleiro de Galton padrão: $\mathbb{P}[S_n = 2k - n] = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$.

No tabuleiro de Galton padrão: $\mathbb{P}[S_n = 2k - n] = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$.

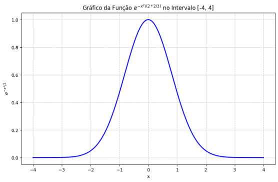
No tabuleiro de Galton generalizado: será que $\mathbb{P}[S_n \in (a, b)]$ tem o formato de uma curva de sino?

No tabuleiro de Galton padrão: $\mathbb{P}[S_n = 2k - n] = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$.

No tabuleiro de Galton generalizado: será que $\mathbb{P}[S_n \in (a, b)]$ tem o formato de uma curva de sino?

Isso é justamente o enunciado do Teorema Central do Limite (TCL): seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$ onde $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ têm a mesma distribuição, são independentes com média zero e variância σ^2. Então

$$\mathbb{P}[S_n \in (\sqrt{n}a, \sqrt{n}b)] \asymp \int_a^b \frac{e^{-t^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,dt. \tag{10}$$



Relembre que $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, ... representam o lançamento de várias bolinhas no tabuleiro de Galton generalizado.

Relembre que $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, ... representam o lançamento de várias bolinhas no tabuleiro de Galton generalizado.
Combinando Teorema Central do Limite com a Lei Forte dos Grandes Números temos, a grosso modo,

$$\frac{1}{m}\#\{1 \leq i \leq m : S_n^{(i)} \in (\sqrt{n}a, \sqrt{n}b)\}$$
$$\asymp \mathbb{P}[S_n \in (\sqrt{n}a, \sqrt{n}b)] \asymp \int_a^b \frac{e^{-t^2/(2\cdot 2/3)}}{\sqrt{2\pi}}dt \quad (11)$$

Relembre que $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, ... representam o lançamento de várias bolinhas no tabuleiro de Galton generalizado.
Combinando Teorema Central do Limite com a Lei Forte dos Grandes Números temos, a grosso modo,

$$\frac{1}{m}\#\{1 \leq i \leq m : S_n^{(i)} \in (\sqrt{n}a, \sqrt{n}b)\}$$
$$\asymp \mathbb{P}[S_n \in (\sqrt{n}a, \sqrt{n}b)] \asymp \int_a^b \frac{e^{-t^2/(2\cdot 2/3)}}{\sqrt{2\pi}} dt \quad (11)$$

Mostrando assim que, a grosso modo, o número de bolinhas que caem numa mesma região segue o formato da curva de sino.

Conclusões

Temos duas explicações para a curva no formato de sino.

Conclusões

Temos duas explicações para a curva no formato de sino.

No tabuleiro de Galton padrão: a curva de sino está relacionada aos coeficientes binomiais.

Conclusões

Temos duas explicações para a curva no formato de sino.
No tabuleiro de Galton padrão: a curva de sino está relacionada aos coeficientes binomiais.
No tabuleiro de Galton generalizado: a curva de sino está relacionada ao Teorema Central do Limite.

Conclusões

Temos duas explicações para a curva no formato de sino.
No tabuleiro de Galton padrão: a curva de sino está relacionada aos coeficientes binomiais.
No tabuleiro de Galton generalizado: a curva de sino está relacionada ao Teorema Central do Limite.
Nosso próximo objetivo é usar o tabuleiro de Galton padrão para construir o movimento Browniano.

Construção do movimento Browniano

Queremos construir o movimento Browniano a partir do tabuleiro de Galton.

Construção do movimento Browniano

Queremos construir o movimento Browniano a partir do tabuleiro de Galton.

Para isso, vamos aumentar gradativamente o número de níveis de pinos do tabuleiro de Galton e ao mesmo tempo vamos diminuir o espaçamento entre os pinos.

Construção do movimento Browniano

Queremos construir o movimento Browniano a partir do tabuleiro de Galton.

Para isso, vamos aumentar gradativamente o número de níveis de pinos do tabuleiro de Galton e ao mesmo tempo vamos diminuir o espaçamento entre os pinos.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos assumir que os deslocamentos $(\delta^{(i)})_i$ são independentes e

$$\mathbb{P}\left[\delta^{(i)} = -\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \mathbb{P}\left[\delta^{(i)} = +\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1/2. \tag{12}$$

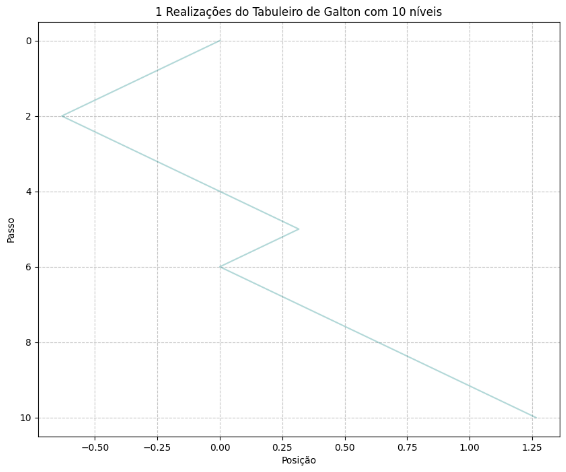
Construção do movimento Browniano

Queremos construir o movimento Browniano a partir do tabuleiro de Galton.
Para isso, vamos aumentar gradativamente o número de níveis de pinos do tabuleiro de Galton e ao mesmo tempo vamos diminuir o espaçamento entre os pinos.
Seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos assumir que os deslocamentos $(\delta^{(i)})_i$ são independentes e

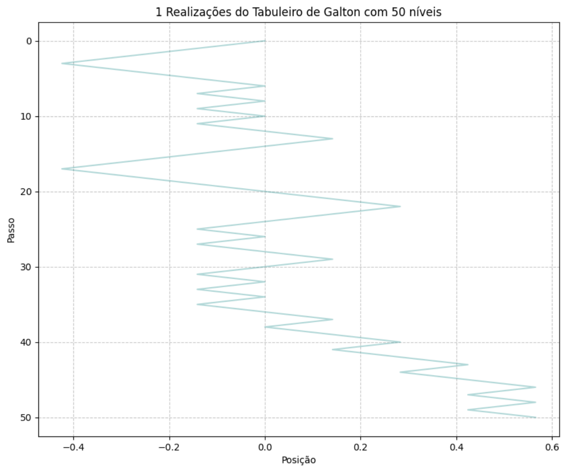
$$\mathbb{P}\left[\delta^{(i)} = -\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \mathbb{P}\left[\delta^{(i)} = +\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1/2. \tag{12}$$

Vamos assumir que esse tabuleiro de Galton possui n níveis:
$S_1 = \delta^{(1)}$ é a posição após atingir o primeiro nível e $S_n = \sum_{i=1}^{n} \delta^{(i)}$ é a posição da bolinha após atingir o n-ésimo nível.

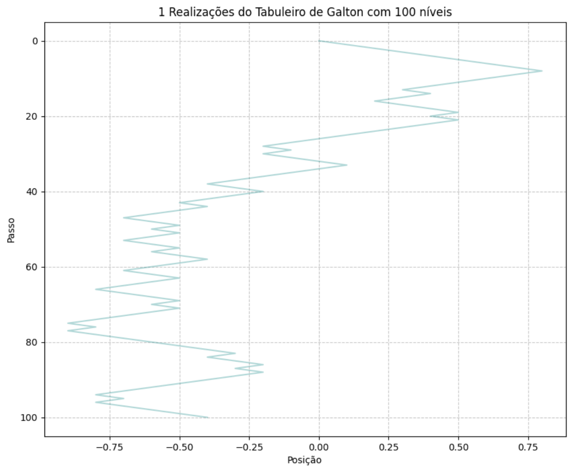
Na figura a seguir temos a trajetória de uma bolinha em um tabuleiro de Galton para $n = 10$: temos 10 níveis e um deslocamento de $\pm 1/\sqrt{10}$ após atingir cada pino.



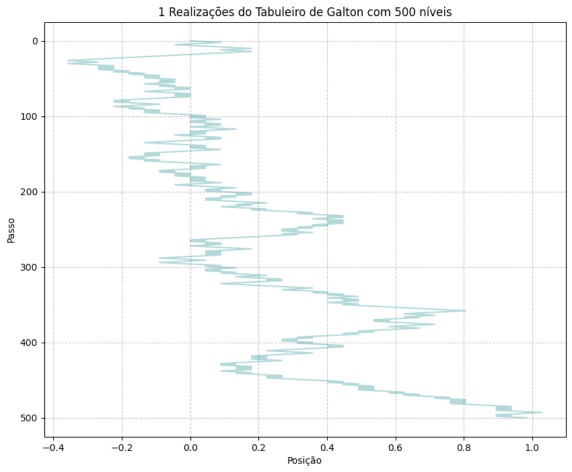
Na figura a seguir temos a trajetória de uma bolinha em um tabuleiro de Galton para $n = 50$: temos 50 níveis e um deslocamento de $\pm 1/\sqrt{50}$. Observe que estamos diminuindo o espaçamento entre os níveis.



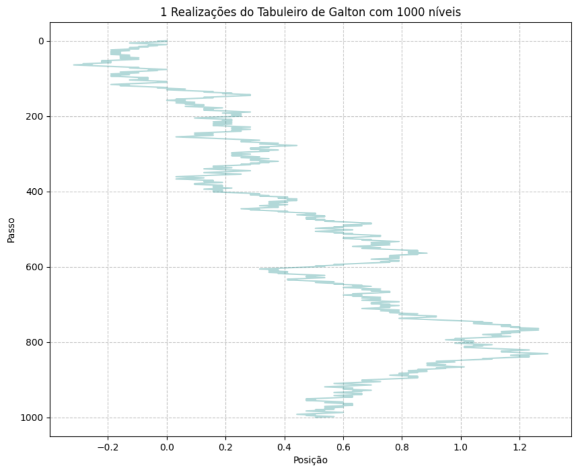
Na figura a seguir temos a trajetória de uma bolinha em um tabuleiro de Galton para $n = 100$: temos 100 níveis e um deslocamento de $\pm 1/\sqrt{100}$.



Na figura a seguir temos a trajetória de uma bolinha em um tabuleiro de Galton para $n = 500$: temos 500 níveis e um deslocamento de $\pm 1/\sqrt{500}$.



Na figura a seguir temos a trajetória de uma bolinha em um tabuleiro de Galton para $n = 1000$: temos 1000 níveis e um deslocamento de $\pm 1/\sqrt{1000}$.



Construção do movimento Browniano

Construímos assim uma sequência de tabuleiros de Galton onde o deslocamento é $\pm 1/\sqrt{n}$ em cada nível e temos n níveis no total.

Construção do movimento Browniano

Construímos assim uma sequência de tabuleiros de Galton onde o deslocamento é $\pm 1/\sqrt{n}$ em cada nível e temos n níveis no total.

Suponha que temos um tabuleiro de Galton limite ao fazer $n \to \infty$.

Construção do movimento Browniano

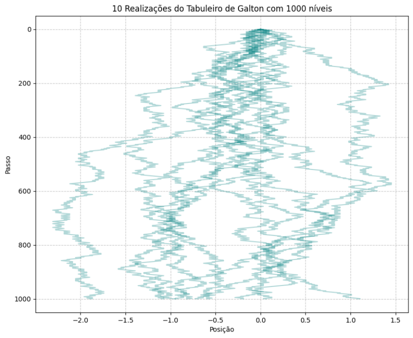
Construímos assim uma sequência de tabuleiros de Galton onde o deslocamento é $\pm 1/\sqrt{n}$ em cada nível e temos n níveis no total.

Suponha que temos um tabuleiro de Galton limite ao fazer $n \to \infty$.

A grosso modo, o movimento Browniano é a trajetória de uma bolinha nesse tabuleiro de Galton limite.

Construção do movimento Browniano

Construímos assim uma sequência de tabuleiros de Galton onde o deslocamento é $\pm 1/\sqrt{n}$ em cada nível e temos n níveis no total. Suponha que temos um tabuleiro de Galton limite ao fazer $n \to \infty$. A grosso modo, o movimento Browniano é a trajetória de uma bolinha nesse tabuleiro de Galton limite.



Conclusões

Ou seja, para simular o movimento Browniano em casa e sem um computador, bastaria construir um tabuleiro de Galton dessa sequência com n grande o suficiente.

Conclusões

Ou seja, para simular o movimento Browniano em casa e sem um computador, bastaria construir um tabuleiro de Galton dessa sequência com n grande o suficiente.

Relembre que que a posição final de uma bolinha tinha distribuição aproximadamente normal. Pode-se mostrar que a posição final do movimento Browniano também tem distribuição normal.

Conclusões

Ou seja, para simular o movimento Browniano em casa e sem um computador, bastaria construir um tabuleiro de Galton dessa sequência com n grande o suficiente.

Relembre que que a posição final de uma bolinha tinha distribuição aproximadamente normal. Pode-se mostrar que a posição final do movimento Browniano também tem distribuição normal.

Fato interessante 1: a trajetória do movimento Browniano não é diferenciável em nenhum ponto.

Conclusões

Ou seja, para simular o movimento Browniano em casa e sem um computador, bastaria construir um tabuleiro de Galton dessa sequência com *n* grande o suficiente.

Relembre que que a posição final de uma bolinha tinha distribuição aproximadamente normal. Pode-se mostrar que a posição final do movimento Browniano também tem distribuição normal.

Fato interessante 1: a trajetória do movimento Browniano não é diferenciável em nenhum ponto.

Fato interessante 2: o gráfico do movimento Browniano têm dimensão de Hausdorff 1.5.

Movimento Browniano - Tópicos avançados

É possível definir integração com respeito ao movimento Browniano.

Movimento Browniano - Tópicos avançados

É possível definir integração com respeito ao movimento Browniano.
Essa noção de integração nos permite definir equação diferenciais estocásticas.

Movimento Browniano - Tópicos avançados

É possível definir integração com respeito ao movimento Browniano.

Essa noção de integração nos permite definir equação diferenciais estocásticas.

Em casos de interesse, queremos estudar como um grande sistema de equações diferenciais estocásticas se comportam.

Movimento Browniano - Tópicos avançados

É possível definir integração com respeito ao movimento Browniano.
Essa noção de integração nos permite definir equação diferenciais estocásticas.
Em casos de interesse, queremos estudar como um grande sistema de equações diferenciais estocásticas se comportam.
Refazemos as perguntas de Lei Forte dos Grandes Números e Teorema Central do Limite nesse contexto.

Obrigado!