O método SIMPLEX para a resolução do Problema de Programação Linear

Mauricio R. Sicre[1]

[1] Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Bahia, Brasil.
email: msicre@ufba.br

IX Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA

Outline

O problema da dieta

Queremos minimizar o custo de compra de determinados alimentos e, ao mesmo tempo, atender às necessidades nutricionais diárias de vitaminas A, C e D. Os alimentos considerados são leite, carne, frango e batata-doce, com as quantidades expressas em suas respectivas unidades (litros, kg, e 100g para a batata doce). A tabela 1 resume o conteúdo nutricional por unidade de cada alimento, a ingestão diária mínima necessária e o custo por unidade.

	Leite	Carne	Frango	Batata doce	Quantidade mínima
Vitamina A (mg)	2	2	5	4	11
Vitamina C (mg)	50	20	10	45	70
Vitamina D (mg)	80	70	10	60	250
Custo (R$)	3	38	10	1.5	

Tabela: Dados nutricionais e de custo para o problema da dieta

O problema da dieta

A função objetivo e as restrições do problema de otimização sõ as seguintes:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & 3x_1 + 38x_2 + 10x_3 + 1.5x_4 \\ \text{Sujeito a: } & 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \geq 11 \\ & 50x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 45x_4 \geq 70 \\ & 80x_1 + 70x_2 + 10x_3 + 60x_4 \geq 250 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

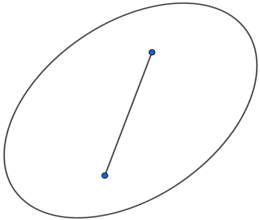
onde x_1, x_2, x_3, x_4 representa as quantidades de leite, carne, frango e batata-doce, respectivamente.

Definições básicas

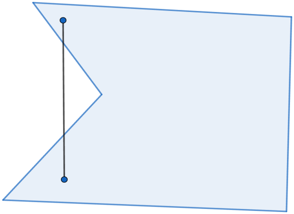
Começamos com a definição de um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$.

Definição

Um conjunto não vazio $C \subset \mathbb{R}^n$ *é convexo se, para qualquer* $x_1, x_2 \in C$ *e* $\alpha \in [0, 1]$, *temos que* $\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in C$.



Conjunto Convexo



Conjunto não convexo

Exemplos de conjuntos convexos.

Exemplos

Os seguintes conjuntos em $\mathbb{R}^n$ são convexos:

- *um espaço afim (o conjunto de soluções de um sistema linear de equações $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ onde A é uma matriz de $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$);*

Exemplos de conjuntos convexos.

Exemplos

Os seguintes conjuntos em $\mathbb{R}^n$ *são convexos:*

- *um espaço afim (o conjunto de soluções de um sistema linear de equações* $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ *onde* A *é uma matriz de* $m \times n$ *e* $b \in \mathbb{R}^m$*);*
- *o conjunto de soluções para um número finito de desigualdades lineares:*

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^m n \mid a_i^T x \leq b_i, i = 1, 2, \ldots .m \right\}.$$

Este conjunto é chamado de poliedro.

Exemplos de conjuntos convexos.

Exemplos

Os seguintes conjuntos em $\mathbb{R}^n$ *são convexos:*

- *a bola* $\mathbb{B}(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$;

Exemplos de conjuntos convexos.

Exemplos

Os seguintes conjuntos em $\mathbb{R}^n$ são convexos:

- *a bola* $\mathbb{B}(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$;
- *o simplex m-dimensional*

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0 \ i \geq 1, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\} \quad (1)$$

para vetores $x_1, x_2, \ldots, x_m$, *linearmente independentes.*

Operações que preservam a convexidade.

As seguintes operações preservam a convexidade:

- Intersecção: se $C_\alpha, \alpha \in I$ são conjuntos convexos, então $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ é convexo.

Operações que preservam a convexidade.

As seguintes operações preservam a convexidade:

- Intersecção: se $C_\alpha, \alpha \in I$ são conjuntos convexos, então $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ é convexo.
- Imagem de um conjunto convexo sob uma função afim: se $C \subset \mathbb{R}^n$ for convexo e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é afim, então $f(C)$ é convexo. Por exemplo, se C for convexo, então $C + x_0$ (translação de C) e αC ("scaling") são conjuntos convexos.

Operações que preservam a convexidade.

As seguintes operações preservam a convexidade:

- Intersecção: se $C_\alpha, \alpha \in I$ são conjuntos convexos, então $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ é convexo.
- Imagem de um conjunto convexo sob uma função afim: se $C \subset \mathbb{R}^n$ for convexo e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é afim, então $f(C)$ é convexo. Por exemplo, se C for convexo, então $C + x_0$ (translação de C) e αC ("scaling") são conjuntos convexos.
- Soma de dois conjuntos: se C_1 e C_2 são convexos, então $C_1 + C_2 = \{c_1 + c_2 : c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$ é convexo.

Operações que preservam a convexidade.

As seguintes operações preservam a convexidade:

- Intersecção: se $C_\alpha, \alpha \in I$ são conjuntos convexos, então $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ é convexo.
- Imagem de um conjunto convexo sob uma função afim: se $C \subset \mathbb{R}^n$ for convexo e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é afim, então $f(C)$ é convexo. Por exemplo, se C for convexo, então $C + x_0$ (translação de C) e αC ("scaling") são conjuntos convexos.
- Soma de dois conjuntos: se C_1 e C_2 são convexos, então $C_1 + C_2 = \{c_1 + c_2 : c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$ é convexo.
- Produto cartesiano de dois conjuntos: se C_1 e C_2 são convexos, então $C_1 \times C_2$ é convexo.

Envoltório convexo de um conjunto.

Conv(X), o envoltório convexo de um conjunto $X \neq \emptyset$, é o menor conjunto convexo que contém X.

Envoltório convexo de um conjunto.

Conv(X), o envoltório convexo de um conjunto $X \neq \emptyset$, é o menor conjunto convexo que contém X.

Temos que

$$\text{Conv}(X) = \bigcap_{C \in S(X)} C$$

onde $S(X) = \{C \mid C \text{ é convexo e } X \subset C\}$.

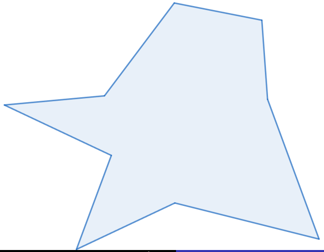
Envoltório convexo de um conjunto.

Conv(X), o envoltório convexo de um conjunto $X \neq \emptyset$, é o menor conjunto convexo que contém X.

Temos que

$$\mathrm{Conv}(X) = \bigcap_{C \in S(X)} C$$

onde $S(X) = \{C \mid C \text{ é convexo e } X \subset C\}$.



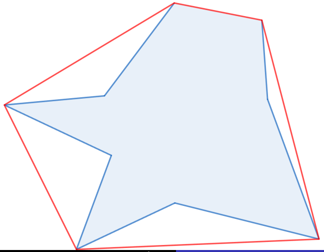
Envoltório convexo de um conjunto.

Conv(X), o envoltório convexo de um conjunto $X \neq \emptyset$, é o menor conjunto convexo que contém X.

Temos que

$$\text{Conv}(X) = \bigcap_{C \in S(X)} C$$

onde $S(X) = \{C \mid C \text{ é convexo e } X \subset C\}$.



Envoltório convexo de um conjunto.

Proposição

Dado $X \neq \emptyset$, $Conv(X)$ é o conjunto de todas as combinações convexas (finitas) de pontos de X:

$$Conv(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : k \geq 1, \lambda_i \geq 0, x_i \in X, i \geq 1, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

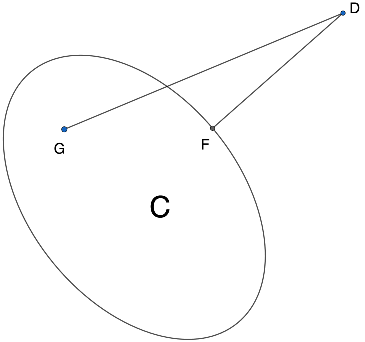
Projeção num conjunto convexo e fechado.

Proposição

Dado um conjunto não vazío convexo e fechado $C \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto $\hat{x} \notin C$, existe um único ponto $a \in C$ tal que $\|\hat{x} - a\| = \min\{\|\hat{x} - y\| \mid y \in C\}$.

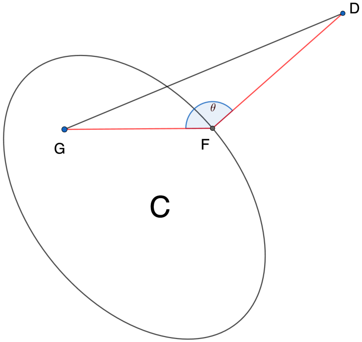
Observação: O ponto a é chamado de projeção de $\hat{x}$ em C, e é denotado por $P_C(\hat{x})$.

Projeção num conjunto convexo e fechado.



F: Projeção de D no conjunto C

Projeção num conjunto convexo e fechado.



F: Projeção de D no conjunto C

Projeção num conjunto convexo e fechado.

Proposição

Considere um conjunto não vazío convexo e fechado $C \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto $\hat{x} \notin C$. O ponto $x \in C$ projeção de $\hat{x}$ em C se e somente se

$$\langle \hat{x} - x, y - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C.$$

Teoremas de separação.

Definição

Um hiperplano em $\mathbb{R}^n$ é um espaço afim $H \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão igual a $n-1$.

Proposição

Um conjunto $H \subset \mathbb{R}^n$ é um hiperplano se, e somente se, existe um vetor diferente de zero $a \in \mathbb{R}^n$ e uma constante real c de modo que $H = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x, a \rangle = c\}$.

Teoremas de separação.

Definição

Um hiperplano em $\mathbb{R}^n$ *é um espaço afim* $H \subset \mathbb{R}^n$ *de dimensão igual a* $n-1$.

Proposição

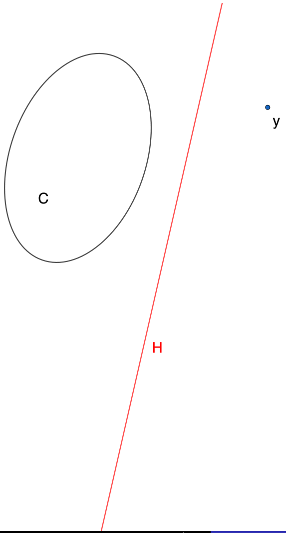
Um conjunto $H \subset \mathbb{R}^n$ *é um hiperplano se, e somente se, existe um vetor diferente de zero* $a \in \mathbb{R}^n$ *e uma constante real* c *de modo que* $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a\rangle = c\}$.

Teorema

Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto convexo e* $y \notin \overline{C}$. *Então, existe um vetor* $a \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\langle a, y\rangle > \sup_{x\in C}\langle a, x\rangle.$$

Teoremas de separação..



Teoremas de separação..

Teorema

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto convexo e* y *um ponto fronteira de* C*, ou seja,* $y \in \overline{C} \backslash int(C)$*. Então, existe um vetor* $a \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\langle a, y \rangle \geq \sup_{x \in C} \langle a, x \rangle$*.*

Teoremas de separação..

Teorema

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto convexo e* y *um ponto fronteira de* C*, ou seja,* $y \in \overline{C} \backslash int(C)$*. Então, existe um vetor* $a \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\langle a, y \rangle \geq \sup\limits_{x \in C} \langle a, x \rangle$*.*

Teorema

Sejam C *e* D *dois conjuntos convexos fechados e tais que* $C \cap D = \emptyset$*. Então, existe um hiperplano que separa* C *e* D*, ou seja ou seja, existe um vetor diferente de zero* $a \in \mathbb{R}^n$ *de modo que* $\inf\limits_{c \in C} \langle a, c \rangle \geq \sup\limits_{d \in D} \langle a, d \rangle$*.*

Teoremas de separação..

Teorema

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e y um ponto fronteira de C, ou seja, $y \in \overline{C} \backslash int(C)$. Então, existe um vetor $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle a, y\rangle \geq \sup\limits_{x \in C} \langle a, x\rangle$.

Teorema

Sejam C e D dois conjuntos convexos fechados e tais que $C \cap D = \emptyset$. Então, existe um hiperplano que separa C e D, ou seja ou seja, existe um vetor diferente de zero $a \in \mathbb{R}^n$ de modo que $\inf\limits_{c \in C} \langle a, c\rangle \geq \sup\limits_{d \in D} \langle a, d\rangle$.

Teorema

Sejam C e D dois conjuntos convexos fechados e tais que C é limitado e $C \cap D = \emptyset$. Então, existe um hiperplano que separa estritamente C e D, ou seja, existe um vetor diferente de zero $a \in \mathbb{R}^n$ de modo que $\inf\limits_{c \in C} \langle a, c\rangle > \sup\limits_{d \in D} \langle a, d\rangle$.

Teoremas da alternativa

Lema (Lema de Farkas homogêneo)

Exatamente uma das alternativas abaixo se verifica

a) *O sistema de inequações lineares*

$$(F): \quad \begin{cases} a^T x < 0, \\ a_i^T x \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

tem solução.

b) *existe* $\lambda \geq 0$ *tal que* $a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$.

Teoremas da alternativa

Lema (Lema de Farkas homogêneo)

Exatamente uma das alternativas abaixo se verifica

a) *O sistema de inequações lineares*

$$(F): \begin{cases} a^T x < 0, \\ a_i^T x \geq 0, \ \ i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

tem solução.

b) *existe* $\lambda \geq 0$ *tal que* $a = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$.

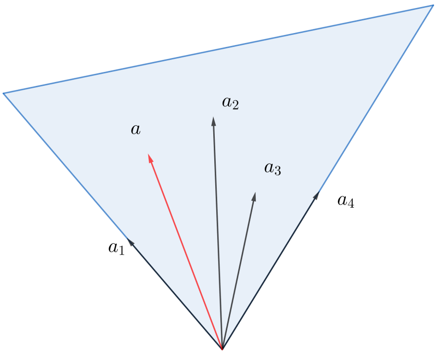
Observação: $a = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ para algúm $\lambda \geq 0$ se, e somente se,

$$a \in \text{Cone}\left(\{a_1, a_2, \dots, a_m\}\right) = \left\{ \sum_{i=1}^m \tau_i a_i \,|\, \tau_i \geq 0 \ , i = 1, \dots, n \right\}$$

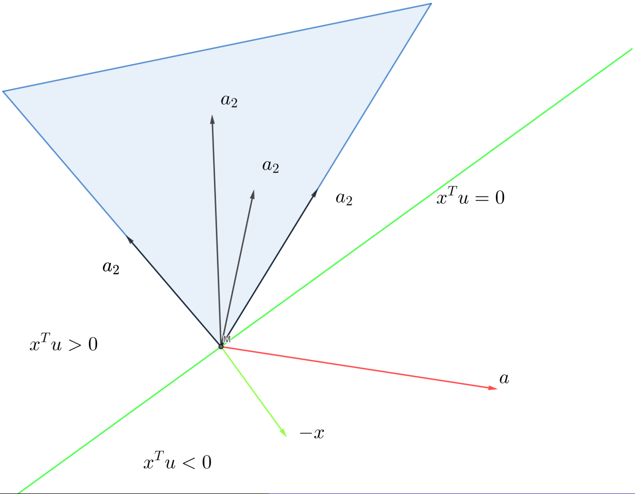
que é um conjunto (cônico) convexo e fechado. Logo,

$a \notin \text{Cone}\left(\{a_1, a_2, \dots, a_m\}\right) \Rightarrow \exists x$ tal que $a^T x < \inf a^T y \; y \in \text{Cone}\left(\{a_1, a_2, \dots, a_m\}\right)$

Teoremas da alternativa



Teoremas da alternativa



Teoremas da alternativa

Considere os sistemas de equações e inequações lineares

$$(\mathcal{S} :) \begin{cases} a_i^T x > b_i, \; i = 1, \ldots, p, \\ a_i^T x \geq b_i, \; i = p+1, \ldots, m \end{cases}$$

e

$$\mathcal{T}_I : \quad \begin{cases} \lambda \geq 0, \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i = 0, \\ \sum_{i=1}^p \lambda_i > 0, \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \geq 0. \end{cases} \qquad \mathcal{T}_{II} : \quad \begin{cases} \lambda \geq 0, \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i = 0, \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i > 0. \end{cases}$$

Teorema (Theorema General da Alternativa)

O sistema $\mathcal{S}$ é infactível se, e somente se, $\mathcal{T}_I$ ou $\mathcal{T}_{II}$ tem solução.

Teoria de dualidade

- Problema primal:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } c^T x \\ &\text{sujeito a: } Ax \geq b \\ &\qquad\qquad\quad x \geq 0, \end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e A é uma matriz de $m \times n$.

Teoria de dualidade

- Problema primal:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } c^T x \\ &\text{sujeito a: } Ax \geq b \\ &\qquad\qquad\quad x \geq 0, \end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e A é uma matriz de $m \times n$.

- Problema dual:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } b^T y \\ &\text{sujeito a: } A^T y \leq c \\ &\qquad\qquad\quad y \geq 0, \end{aligned}$$

Teoria de dualidade

Dualidade fraca: observe que

$$Ax \geq b,\ x \geq 0,\ A^T y \leq c,\ y \geq 0 \ \Rightarrow\ y^T Ax \geq y^T b \ \Rightarrow\ c^T x \geq y^T b$$

Teoria de dualidade

Dualidade fraca: observe que

$$Ax \geq b,\ x \geq 0,\ A^T y \leq c,\ y \geq 0 \ \Rightarrow\ y^T Ax \geq y^T b \ \Rightarrow\ c^T x \geq y^T b$$

Teorema (Dualidade forte)

Se tanto o Problema Primal quanto o Problema Dual forem viáveis, então os dois problemas têm solução ótima e os valores ótimos coincidem.

Teoria de dualidade

Idéia da prova: Usar Teoremas da alternativa. Sejam c^* e z^* o valores ótimos do problemas primal e dual, respectivamente, e $\varepsilon > 0$. O sistema de inequações lineares

$$-c^T x \geq -(c^* - \varepsilon), \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0$$

é inviável. Logo pelo Lemma de Farkas (uma extensão de versão apresentada aqui) temos que existe $y = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \geq 0$ tal que

$$-\lambda_0(c^* - \varepsilon) + b^T\lambda = -\lambda_0(c^* - \varepsilon) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i > 0$$

$$-\lambda_0 c + A^T\lambda = -\lambda_0 c + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i < 0,$$

Definindo $y = (1/\lambda_0)(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ $(\lambda_0 \neq 0)$ temos que

$$A^T y \leq c, \;\; b^T y \geq c^* - \varepsilon \;\Rightarrow\; z^* \geq c^* - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Pontos extremos.

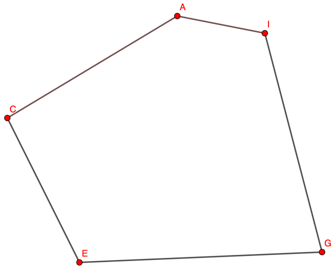
Definição

O ponto x é um ponto extremo do conjunto convexo C se ele não pode ser escrito como a combinação convexa de pontos de C.

Pontos extremos.

Definição

O ponto x é um ponto extremo do conjunto convexo C se ele não pode ser escrito como a combinação convexa de pontos de C.



Pontos extremos

Pontos extremos.

Exemplo

Os pontos extremos do simplex $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+ \mid \sum_{i=0}^{3} x_i = 1\right\}$ *são os vetores* $(1,0,0)$*,* $(0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$*.*

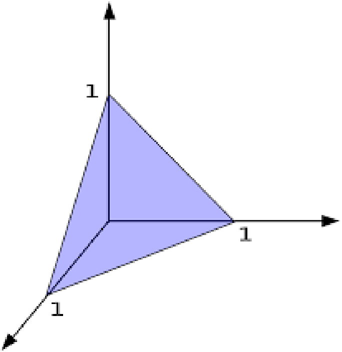


Figura: Pontos extremos

Pontos extremos.

Exemplo

Os pontos extremos da bola fechada $\mathbb{B}(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\|_2 \leq r\}$ *são os vetores* x *que satisfazem* $\|x - x_0\|_2 = r$.

Pontos extremos.

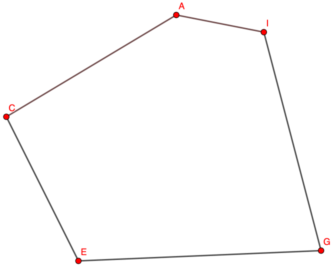
Teorema

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ *um poliedro limitado (politopo). Então* $C = \overline{Conv}(ext(C))$*. isto é,* C *é o fecho do envoltório convexo do conjunto de seus pontos extremos.*

Pontos extremos.

Teorema

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um poliedro limitado (politopo). Então $C = \overline{Conv}(ext(C))$. isto é, C é o fecho do envoltório convexo do conjunto de seus pontos extremos.



Pontos extremos

Funções convexas.

Definição

A função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *é convexa se*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

para todo x, y *e* $\alpha \in [0,1]$

Funções convexas.

Exemplos

- *Funções lineares afim* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x) = c^T x + d$.

Funções convexas.

Exemplos

- *Funções lineares afim* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x) = c^T x + d$.
- *Funções quadráticas* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^T Ax + c^T x + d$, *onde a matriz* A *é semidefinida positiva, isto é* $x^T Ax \geq 0$ *para todo* x.

Funções convexas.

Teorema

A função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *é convexa se, e somente se, seu epígrafo*

$$epi(f) = \{(x, y) \,|\, f(x) \leq y\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é um conjunto convexo.

Funções convexas.

Teorema

A função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *é convexa se, e somente se, seu epígrafo*

$$epi(f) = \{(x, y) \,|\, f(x) \leq y\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é um conjunto convexo.

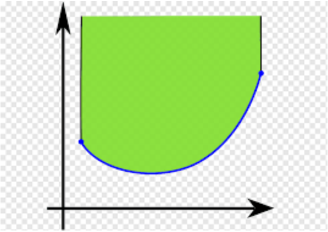


Figura: Epígrafo de uma função convexa

Funções convexas.

Teorema

A função $f : C \subset R^n \to \mathbb{R}$ *diferenciável no conjunto aberto e convexo* C *é convexa se, e somente se, satisfaz*

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad \textit{para todo par } x, y \in C$$

Funções convexas.

Teorema

A função $f : C \subset R^n \to \mathbb{R}$ diferenciável no conjunto aberto e convexo C é convexa se, e somente se, satisfaz

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad \textit{para todo par } x,\, y \in C$$

Teorema

A função $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável conjunto aberto e convexo C é convexa se, e somente se, satisfaz

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \textit{para todo par } x,\, y \in C$$

Funções convexas.

Exemplo

A função $f : R_{++} \to \mathbb{R}$ $f(x) = -\ln x$ *é convexa. Observe que* $f'(x) = -1/x$ *é uma função crescente em* R_{++} *e, portanto, temos que*

$$\left(f'(y) - f'(x)\right)(y - x) > 0 \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}_{++}.$$

Funções convexas.

Exemplo

A função $f : R_{++} \to \mathbb{R}$ $f(x) = -\ln x$ *é convexa. Observe que* $f'(x) = -1/x$ *é uma função crescente em* R_{++} *e, portanto, temos que*

$$\left(f'(y) - f'(x)\right)(y - x) > 0 \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}_{++}.$$

Logo, para $x_1, \ldots x_m \in \mathbb{R}_{++}$ *e* $\lambda_1, \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}_+$*, com* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$*, temos*

$$f\left(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m\right) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_m f(x_m)$$

Funções convexas.

Exemplo

A função $f : R_{++} \to \mathbb{R}$ $f(x) = -\ln x$ *é convexa. Observe que* $f'(x) = -1/x$ *é uma função crescente em* R_{++} *e, portanto, temos que*

$$\left(f'(y) - f'(x)\right)(y - x) > 0 \textit{ para todo } x, y \in \mathbb{R}_{++}.$$

Logo, para $x_1, \ldots x_m \in \mathbb{R}_{++}$ *e* $\lambda_1, \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}_{+}$, *com* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$, *temos*

$$f\left(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m\right) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_m f(x_m)$$

Isto é,

$$-\ln\left(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m\right) \leq -\lambda_1 \ln(x_1) - \ldots - \lambda_m \ln(x_m)$$

donde segue que

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_m^{\lambda_m} \leq \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m$$

Em particular, para $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 1/m$ *obtemos*

$$\sqrt[m]{x_1 \cdots x_m} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m}.$$

Funções convexas.

Teorema

Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e convexa. Então x^* é um mínimo local de f se , e somente se, é um mínimo global de f, e se, e somente se, satisfaz

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Funções convexas.

O problema de otimização convexo

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad f(x) \\ &\text{sujeito a } x \in C. \end{aligned}$$

onde f é uma função convexa e C é um conjunto convexo.

Funções convexas.

O problema de otimização convexo

$$\text{minimizar} \quad f(x)$$
$$\text{sujeito a } x \in C.$$

onde f é uma função convexa e C é um conjunto convexo.

Teorema

Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e convexa. Então x^* é um mínimo local de f no conjunto convexo C se , e somente se, é um mínimo global de f em C, e se, e somente se, satisfaz

$$\langle \nabla f(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

O Problema de Programação Linear.

$$\text{minimizar } c^T x$$

$$\text{sujeito a: } Ax = b \text{ e } x \geq 0,$$

onde $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e A é uma matriz de $m \times n$ de posto completo.

O Problema de Programação Linear.

Exemplo

Um Problema de Armazenagem: Considere o problema de operar um armazém, comprando e vendendo uma certa mercadoria que pode ser armazenada no mesmo, a fim de maximizar o lucro em uma certa janela de tempo.

i) *O armazém tem uma capacidade fixa C e há um custo r por unidade para manter o estoque por um período.*

ii) *O preço, p_i, da mercadoria é conhecido por flutuar ao longo de um número de períodos de tempo - digamos meses, indexado por i. Em qualquer período, o mesmo preço é válido para compra ou venda.*

ii) *O armazém está originalmente vazío e deve estar vazío no final do último período.*

O Problema de Programação Linear.

Exemplo

Para formular este problema, variáveis são introduzidas para cada período de tempo. Em particular:

i) x_i *denota o nível de estoque no armazém no início do período* i,

ii) u_i *denota a quantidade comprada durante o período* i,

iii) s_i *denota a quantidade vendida durante o período* i.

Se houver n *períodos, o problema é*

$$\begin{aligned}
\textit{maximizar} & \sum_{i}^{n} (p_i(s_i - u_i) - rx_i) \\
\textit{sujeito a} \;\; & x_{i+1} = x_i + u_i - s_i \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \\
& x_n + u_n - s_n = 0 \\
& x_i + z_i = C \quad i = 2, \ldots, n \\
& x_1 = 0, \quad x_i \geq 0, \quad u_i \geq 0, \quad s_i \geq 0, \quad z_i \geq 0.
\end{aligned}$$

O Problema de Programação Linear.

Exemplo

Problema de Fabricação. *Suponha que uma instalação que é capaz de fabricar n produtos diferentes, cada um dos quais pode exigir diversas quantidades de m recursos diferentes:*

i) *cada produto j pode ser produzido em qualquer quantidade de unidades $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$;*

ii) *cada unidade do j-ésimo produto pode ser vendida por p_j reais e precisa de a_{ij} unidades do i-ésimo recurso, $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Assumindo que o custo de produção de cada produto é uma função linear da quantidade de unidades produzidas, se nos for dado um conjunto de m números $b_1, b_2, \ldots, b_m$ descrevendo as quantidades disponíveis dos m recursos, desejamos desenvolver uma estrategia de fabricação dos produtos para maximizar a receita.

O Problema de Programação Linear.

Exemplo

Formulação do problema: precisamos maximizar

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$$

considerando as seguintes restrições de recursos

$$a_{i1}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

e restrições de não negatividade em todas as variáveis de produção

$$x_1 \leq 0, \ x_2 \geq 0, \ldots, \ x_m \geq 0.$$

O Problema de Programação Linear.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } c^T x \\ &\text{sujeito a: } Ax = b \\ &\qquad\qquad\quad x \geq 0, \end{aligned}$$

$c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A de $m \times n$ de posto completo.

O Problema de Programação Linear.

Considere o sistema de equações lineares

$$Ax = b \tag{2}$$

onde $b \in \mathbb{R}^m$ e A é uma matriz $m \times n$ de posto completo $(m \leq n)$.

Definição

Seja B uma submatriz de A formada por n colunas de A. A solução básica do sistema (2) definida por B é o vetor $x = (x_B, x_D)$ com $x_B = B^{-1}b$ e $x_D = 0$.

- *Os componentes x_j, $j \in B$ são chamadas de variáveis básicas da solução básica.*
- *Se uma ou mais das variáveis básicas for igual a zero, chamamos a solução básica de solução básica degenerada.*
- *De maneira geral, temos que $x = (x_B, x_D)$ com $x_B = B^{-1}(b - Dx_D)$ e x_D livre são as soluçõesde (2) associadas a B.*

O Problema de Programação Linear.

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 5. \end{cases}$$

Temos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad b = \begin{pmatrix} 23 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Considere as bases B_1 e B_2 e as corrrespondentes soluções básicas:

- $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $x_1 = (x_{B_1}, 0)$ *com* $x_{B_1} = B_1^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = (x_{B_2}, 0)$ *com* $x_{B_2} = B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

O Problema de Programação Linear.

Agora, consideraremos o sistema de equações e inequações lineares:

$$Ax = b, \quad x \geq 0. \tag{3}$$

O Problema de Programação Linear.

Agora, consideraremos o sistema de equações e inequações lineares:

$$Ax = b, \quad x \geq 0. \tag{3}$$

Definição

Uma solução viável para o sistema (3) *que também é básica para o sistema* $Ax = b$ *é chamada de solução básica viável.*

O Problema de Programação Linear.

Agora, consideraremos o sistema de equações e inequações lineares:

$$Ax = b, \quad x \geq 0. \tag{3}$$

Definição

Uma solução viável para o sistema (3) que também é básica para o sistema $Ax = b$ é chamada de solução básica viável.

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1, \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & + & x_5 & = & 5 \\ x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq 0, & & x_4 \geq 0, & & x_5 \geq 0. \end{cases}$$

- $(x_1, x_2) = (1, 0)$, $x_D = (x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0)$ *é uma solução básica viável.*
- $(x_3, x_5) = (1, 3)$, $x_D = (x_1, x_2, x_4) = (0, 0, 0)$ *é outra solução básica viável.*

O Problema de Programação Linear.

Teorema

Considere o PPL

$$S)\ \begin{cases} \textit{minimizar } c^T x \\ \textit{sujeito a: } Ax = b \textit{ e } x \geq 0. \end{cases}$$

Temos que

i) *se S) tem uma solução viável então tem uma solução viável básica;*

ii) *se S) tem uma solução ótima viável então tem uma solução viável ótima básica.*

O Problema de Programação Linear.

Idéia da prova:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix} = b$$

com $x_1, \ x_2, \ x_3 > 0$ e $x_4 = 0$. Temos que $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$ são linearmente independentes, logo existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ com algúm deles positivo e tais que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = 0.$$

Considerando $\varepsilon > 0$ segue que

$$(x_1 - \varepsilon\alpha_1) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + (x_2 - \varepsilon\alpha_2) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{pmatrix} + (x_3 - \varepsilon\alpha_3) \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix} = b$$

e tomando $\varepsilon = \min \left\{ \dfrac{x_i}{\alpha_i} \mid \alpha_i > 0, \ \ i = 1, 2, 3 \right\}$ podemos reduzir uma variável a zero e obter uma nova solução viável.

O Problema de Programação Linear.

Teorema (Equivalência de pontos extremos e soluções básicas)

Considere o sistema

$$S)\ \begin{cases} \text{minimizar } c^T x \\ \text{sujeito a: } Ax = b \text{ e } x \geq 0, \end{cases}$$

Considere o poliedro convexo e fechado das soluções viáveis para $S)$

$$K = \{Ax = b \text{ e } x \geq 0\}.$$

Então, um vetor x *é um ponto extremo de* K *se, e somente se,* x *é uma solução básica viável para* $S)$.

O Problema de Programação Linear.

Teorema

Sejam $f(x) = c^T x$ uma função linear e $K = \{Ax = b \text{ e } x \geq 0, \}$ um poliedro limitado. Então, f atinge seu valor mínimo num ponto extremo de K.

Prova

Seja x^* um minínimo global de f em K. Existem x^1,...,x^k pontos extremos de K e constantes reais não λ_1,..,λ_k tais que

$$x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \text{ com } \lambda_i \geq 0 \; i = 1, \ldots, k \;\; e \;\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Desta forma segue que

$$f(x^*) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f\left(x^i\right) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x^*) = f(x^*)$$

O método SIMPLEX.

- PPL)

$$\min\ c^T x$$

$$\text{sujeito a: } Ax = b \text{ e } x \geq 0.$$

O método SIMPLEX.

- PPL)

$$\min\ c^T x$$
$$\text{sujeito a: } Ax = b \text{ e } x \geq 0.$$

- Considerando uma base B e $A = [B \mid D]$ reescrevemos o PPL acima assim:

$$\min\ z = c_B^T B^{-1} b + \bar{c}^T x = z_0 + (0, \bar{c}_D)^T (x_B, x_D)$$
$$\text{sujeito a: } B^{-1} A x = B^{-1} [B \mid D] = \left[I \mid B^{-1} D \right] x = B^{-1} b$$
$$x = (x_B, x_D) \geq 0.$$

O método SIMPLEX.

- PPL)

$$\min\ c^T x$$
$$\text{sujeito a: } Ax = b \text{ e } x \geq 0.$$

- Considerando uma base B e $A = [B \mid D]$ reescrevemos o PPL acima assim:

$$\min\ z = c_B^T B^{-1} b + \bar{c}^T x = z_0 + (0, \bar{c}_D)^T (x_B, x_D)$$
$$\text{sujeito a: } B^{-1} A x = B^{-1} [B \mid D] = \left[I \mid B^{-1} D \right] x = B^{-1} b$$
$$x = (x_B, x_D) \geq 0.$$

onde

- $z_0 = c_B^T B^{-1} b$ é o valor da função objetivo na solução básica associada a B
- $\bar{c} = (0, \bar{c}_D^T)$, onde $\bar{c}_D^T = c_D^T - c_B^T B^{-1} D$, é o chamado vetor de custos reduzidos.

O método SIMPLEX.

Exemplo

- *PPL:*

$$\min\ z = 6x_1 + 7x_2 + 4x_3$$
$$\begin{array}{ccccccc} 4x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & \leq & 23 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & \geq & 28 \end{array}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

- *Introduzindo as variáveis de folga, temos a seguinte reformulação do LPP acima na forma padrão*

$$\min\ z = 6x_1 + 7x_2 + 4x_3$$
$$\begin{array}{ccccccccc} 4x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & e_1 & = & 23 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & e_2 & = & 28 \end{array}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad e_1 \geq 0 \quad e_2 \geq 0.$$

O método SIMPLEX.

Exemplo

- *PPL:*

$$\min\ z = 6x_1 + 7x_2 + 4x_3$$
$$B\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 28 \end{pmatrix}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0.$$

O método SIMPLEX.

Exemplo

- *PPL:*

$$\min\ z = 6x_1 + 7x_2 + 4x_3$$

$$B\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0.$$

- *Multiplicando por* $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -3/2 & 5/4 \end{pmatrix}$, *reescrevemos o PPL acima:*

O método SIMPLEX.

Exemplo

- *PPL:*

$$\min\ z = 6x_1 + 7x_2 + 4x_3$$

$$B\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0.$$

- *Multiplicando por* $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -3/2 & 5/4 \end{pmatrix}$, *reescrevemos o PPL acima:*

$$\min\ z = (7,4)(x_2, x_3)^T + 6x_1 = 67/2 + (-1/4, 5/2, 13/4)(x_1, e_1, e_2)^T$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -3/2 & -5/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0.$$

O método SIMPLEX.

- PPL)

$$\min\ c^T x$$
$$\text{sujeito a: } Ax = b \text{ e } x \geq 0.$$

- Considerando uma base B e $A = [B \mid D]$ reescrevemos o PPL acima assim:

$$\min\ z = c_B^T \left(B^{-1}b - B^{-1}Dx_D \right) + \bar{c}_D^T x_D = z_0 + (0, \bar{c}_D)^T (x_B, x_D)$$
$$\text{sujeito a: } B^{-1}Ax = B^{-1}[B \mid D] = \left[I \mid B^{-1}D \right] x = x_B + B^{-1}Dx_D = B^{-1}b$$
$$x = (x_B, x_D) \geq 0.$$

onde

- $z_0 = c_B^T B^{-1} b$ é o valor da função objetivo na solução básica associada a B
- $\bar{c} = (0, \bar{c}_D^T)$, onde $\bar{c}_D^T = c_D^T - c_B^T B^{-1} D$, é o chamado vetor de custos reduzidos.

O método SIMPLEX.

Exemplo

- $$\min\ z = (7,4)(x_2,x_3)^T + 6x_1 = 67/2 + (-1/4, 5/2, 13/4)(x_1, e_1, e_2)^T$$
$$s.a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -3/2 & -5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0.$$

- *Queremos obter uma nova solução básica: Como proceder?*
  - *Vamos trocar uma das variáveis básicas por uma das variáveis não básicas, para construir uma nova base;*
  - *isto é, uma das variáveis x_2 ou x_3 vai sair da base e uma das variáveis x_1, e_1 ou e_2 vai entrar na base.*

O método SIMPLEX.

Exemplo

- $$\min \; z = z_0 + \overline{c}_D^T x_D = 67/2 + (-1/4, 5/2, 13/4)(x_1, e_1, e_2)^T$$
$$s.a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -3/2 & -5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; e_1 \geq 0, \; e_2 \geq 0.$$

O método SIMPLEX.

Exemplo

- $$\min \; z = z_0 + \overline{c}_D^T x_D = 67/2 + (-1/4, 5/2, 13/4)(x_1, e_1, e_2)^T$$
$$s.a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -3/2 & -5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; e_1 \geq 0, \; e_2 \geq 0.$$

- *Observe que:*
  - *Assignando valores positivos para* x_1 *o valor da função objetivo decresce.*

O método SIMPLEX.

Exemplo

- $$\begin{aligned} \min \; & z = z_0 + \overline{c}_D^T x_D = 67/2 + (-1/4, 5/2, 13/4)(x_1, e_1, e_2)^T \\ s.a \; & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -3/2 & -5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; e_1 \geq 0, \; e_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- *Observe que:*
  - *Assignando valores positivos para x_1 o valor da função objetivo decresce.*
  - $x_2 = 9/2 - 3/4x_1 - 1/2e_1 - 1/4e_2$ *e* $x_3 = 1/2 - 1/4x_1 + 3/2e_1 + 5/4e_2$.

O método SIMPLEX.

Exemplo

- $$\min\ z = z_0 + \overline{c}_D^T x_D = 67/2 + (-1/4, 5/2, 13/4)(x_1, e_1, e_2)^T$$
  $$s.a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -3/2 & -5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$
  $$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0.$$

- *Observe que:*
  - *Assignando valores positivos para x_1 o valor da função objetivo decresce.*
  - $x_2 = 9/2 - 3/4x_1 - 1/2e_1 - 1/4e_2$ e $x_3 = 1/2 - 1/4x_1 + 3/2e_1 + 5/4e_2$.
  - *Se os coeficientes de x_1 nas expressões de x_2 e x_3 forem positivos, podemos então assignar valores arbitrariamente grandes a x_1, mantendo $x_2 \geq 0$ e $x_3 \geq 0$, e fazendo a função objetivo arbitrariamente pequena. Neste caso o PPL é ilimitado inferiormente.*

O método SIMPLEX.

Exemplo

- $x_2 = 9/2 - 3/4x_1 - 1/2e_1 - 1/4e_2$ *e* $x_3 = 1/2 - 1/4x_1 + 3/2e_1 + 5/4e_2$.
- *Definindo* $x_1 = (9/2)/(3/4) = 6$ *e mantendo* $e_1 = e_2 = 0$, *a nova solução é*

$$x_2 = 9/2 - 3/4x_1 - 1/2e_1 - 1/4e_2 = 9/2 - 9/2 - 0 - 0 = 0,$$
$$x_3 = 1/2 - 1/4x_1 + 3/2e_1 + 5/4e_2 = 1/2 - 3/2 + 0 + 0 = -1,$$

Isto é, $(x_1, x_2, x_3, e_1, e_2) = (6, 0, -1, 0, 0)$ *que é inviável.*

O método SIMPLEX.

Exemplo

- $x_2 = 9/2 - 3/4x_1 - 1/2e_1 - 1/4e_2$ *e* $x_3 = 1/2 - 1/4x_1 + 3/2e_1 + 5/4e_2$.
- *Definindo* $x_1 = (9/2)/(3/4) = 6$ *e mantendo* $e_1 = e_2 = 0$, *a nova solução é*

$$x_2 = 9/2 - 3/4x_1 - 1/2e_1 - 1/4e_2 = 9/2 - 9/2 - 0 - 0 = 0,$$
$$x_3 = 1/2 - 1/4x_1 + 3/2e_1 + 5/4e_2 = 1/2 - 3/2 + 0 + 0 = -1,$$

  Isto é, $(x_1, x_2, x_3, e_1, e_2) = (6, 0, -1, 0, 0)$ *que é inviável.*
- *Definindo* $x_1 = (1/2)/(1/4) = 2$ *e mantendo* $e_1 = e_2 = 0$, *a nova solução é*

$$x_2 = 9/2 - 3/4x_1 - 1/2e_1 - 1/4e_2 = 9/2 - 3/2 - 0 - 0 = 3,$$
$$x_3 = 1/2 - 1/4x_1 + 3/2e_1 + 5/4e_2 = 1/2 - 1/2 + 0 + 0 = 0.$$

  Isto é, $(x_1, x_2, x_3, e_1, e_2) = (2, 3, 0, 0, 0)$ *que é viável.*

O método SIMPLEX.

Exemplo

- *Equivalentemente*

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & -3/2 & -5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

com $(x_1, x_2, e_2) = (0, 0, 0)$.

O método SIMPLEX.

Exemplo

- *Equivalentemente*

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & -3/2 & -5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

com $(x_1, x_2, e_2) = (0, 0, 0)$.

- *Sistema linear antes da troca de variáveis:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -3/2 & -5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

O método SIMPLEX.

Exemplo

- *Reescrevendo o PPL obtemos*

$$\min z = 6x_1 + 7x_2 + 4x_3$$

$$s.a \quad B_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + D_1 \begin{pmatrix} x_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & -3/2 & -5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; e_1 \geq 0, \; e_2 \geq 0.$$

O método SIMPLEX.

Exemplo

- *Reescrevendo o PPL obtemos*

$$\min z = 6x_1 + 7x_2 + 4x_3$$

$$s.a \quad B_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + D_1 \begin{pmatrix} x_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & -3/2 & -5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3 \geq 0, \;\; e_1 \geq 0, \;\; e_2 \geq 0.$$

- *Multiplicando por* $B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, *obtemos*

$$\min \;\; z = (6,7)(x_1, x_2)^T + 4x_3 = 33 + (1,1,2)(x_3, e_1, e_2)T$$

$$s.a \;\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3 \geq 0, \;\; e_1 \geq 0, \;\; e_2 \geq 0.$$

O método SIMPLEX.

- PPL:

$$\min\ z = (6,7)(x_1,x_2)^T + 4x_3 = 33 + (1,1,2)(x_3,e_1,e_2)^T$$
$$\text{s.a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0.$$

- O vetor de custos reduzidos é não negativo: Podemos provar que neste caso a solução encontrada é ótima.

O método SIMPLEX.

$$\min\ z = c_B^T\left(B^{-1}b - B^{-1}Dx_D\right) + \bar{c}_D^T x_D = z_0 + \bar{c}_D^T x_D$$

$$\text{sujeito a: } B^{-1}Ax = B^{-1}[B \mid D] = \left[I \mid B^{-1}D\right]x = x_B + B^{-1}Dx_D = B^{-1}b$$

$$x = (x_B, x_D) \geq 0.$$

onde

- $z_0 = c_B^T B^{-1} b$ é o valor da função objetivo na solução básica associada a B
- $\bar{c}_D^T = c_D^T - c_B^T B^{-1} D$, é o vetor de custos reduzidos.

O método SIMPLEX.

- $$\min\ z = c_B^T\left(B^{-1}b - B^{-1}Dx_D\right) + \bar{c}_D^T x_D = z_0 + \bar{c}_D^T x_D$$
  $$\text{sujeito a: } B^{-1}Ax = B^{-1}[B\,|\,D] = \left[I\,|\,B^{-1}D\right]x = x_B + B^{-1}Dx_D = B^{-1}b$$
  $$x = (x_B, x_D) \geq 0.$$

  onde
  - $z_0 = c_B^T B^{-1}b$ é o valor da função objetivo na solução básica associada a B
  - $\bar{c}_D^T = c_D^T - c_B^T B^{-1}D$, é o vetor de custos reduzidos.
- Tabela do SIMPLEX

Basic variables	z	x_B	x_D	
x_B	0	I	$B^{-1}D$	$\overline{b}$
	1	0	$-\bar{c}_D$	z_0

onde

- $x_B = \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $x_D = \{x_{m+1}, \ldots, x_n\}$ são as variáveis básicas e não básicas, respectivamente.

O método SIMPLEX.

Versão detalhada da tabela

	Basic variables	z	x_1	$\dots$	x_r	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_s	$\dots$	x_n	
L_1	x_1	0											$\bar{b}_1$
	$\vdots$												$\vdots$
$L_r \leftarrow$	x_r	0			I					N_{rs}			$\bar{b}_r$
	$\vdots$												$\vdots$
L_m	x_m	0											$\bar{b}_m$
L_{m+1}		1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$-\bar{c}_{m+1}$	$\dots$	$-\bar{c}_s$	$\dots$	$-\bar{c}_n$	z_0
										$\uparrow$			

O método SIMPLEX.

Exemplo

Queremos produzir geleia de morango e de goiaba. A quantidade de açúcar disponível é de 8 toneladas e o capital é de 40.000 reais. As goiabas são comprados por 2 reais o kg e os morangos por 15 reais o kg. A geleia de goiaba é vendida por 4,50 reais por kg e a geleia de morango por 12,60 reais por kg. A geleia de morango é obtida pela mistura de 50% de morangos e 50% de açúcar, e a de goiaba pela mistura de 40% de goiaba e 60% de açúcar. Modele o problema de maximizar o lucro como um problema programação linear e encontre a solução usando o método SIMPLEX.

O método SIMPLEX.

Sejam x_1 e x_2 as quantidades de açúcar destinadas (em kg) à produção de geleia de morango e de goiaba, respectivamente. Temos que:

- A quantidade de açúcar utilizada não pode ultrapasar o total em estoque (8000 kg): $x_1 + x_2 \leq 8000$;
- Temos que comprar x_1 kg de goiaba (a um custo de 2 reais o kg) e $(4/6)x_2$ kg de morango (a um custo de 15 reais o kg), devido a composição das geléias. Além disso, o custo total da compra nao pode ultrapasar o orçamento de 40000 reais: $2x_1 + 15(4/6)x_2 = 2x_1 + 10x_2 \leq 40000$.
- O lucro pela venta da geleia de goiaba é $4,5(2x_1) - 2x_1 = 7x_1$, e o lucro pela venta da geleia de morango é $12,6(10/6)x_2) - 15(4/6)x_2 = 11x_2$

O problema de maximizar o lucro é modelado pelo PPL

$$\left\{\begin{array}{l} \max \ 7x_1 + 11x_2 \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 8000 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & \leq & 40000 \end{array} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array}\right.$$

O método SIMPLEX.

O problema de maximizar o lucro é modelado pelo PPL:

$$\begin{cases} \max \ 7x_1 + 11x_2 \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 8000 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & \leq & 40000 \end{array} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

O método SIMPLEX.

O problema de maximizar o lucro é modelado pelo PPL:

$$\begin{cases} \max \ 7x_1 + 11x_2 \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 8000 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & \leq & 40000 \end{array} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Introduzindo as variáveis de folga e_1 e e_2, obtemos o seguinte PPL equivalente, na forma padrão:

$$\begin{cases} \max \ 7x_1 + 11x_2 \\ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & e_1 & = & 8000 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & e_2 & = & 40000 \end{array} \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ e_1 \geq 0, \ e_2 \geq 0. \end{cases}$$

O método SIMPLEX.

Tabela inicial: A variável x_2 entra na base e a variável e_2 sai da base.

		z	x_1	x_2	e_1	e_2	b
	e_1	0	1	1	1	0	8000
$\leftarrow$	e_2	0	2	10	0	1	40000
	z	1	-7	-11	0	0	0
				$\uparrow$			

O método SIMPLEX.

Tabela inicial: A variável x_2 entra na base e a variável e_2 sai da base.

		z	x_1	x_2	e_1	e_2	b
	e_1	0	1	1	1	0	8000
$\leftarrow$	e_2	0	2	10	0	1	40000
	z	1	-7	-11	0	0	0
				$\uparrow$			

Tabela atualizada: A variável x_1 entra na base e a variável e_1 sai da base.

		z	x_1	x_2	e_1	e_2	b
$\leftarrow$	e_1	0	0.8	0	1	-0.1	4000
	x_2	0	0.2	1	0	0.1	4000
	z	1	-4.8	0	0	1.1	44000
			$\uparrow$				

O método SIMPLEX.

Todos os custos reduzidos são não positivos, logo encontramos uma solução ótima: $x_1 = 5000$ kg de açúcar para a geleia de goiaba, $x_2 = 3000$ kg de açúcar para a geleia de morango. O lucro óbtiddo é 68000 reais.

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	b
x_1	0	1	0	1.25	-0.125	5000
x_2	0	0	1	$-0,25$	$0,125$	3000
z	1	0	0	6	0.5	68000

Aplicações.

O problema de planejamento de da tripulações é um problema importante na pesquisa operacional, comumente encontrado em setores como companhias aéreas, ferrovias e transporte público. Ele pode ser reformulado como um **Problema de Programação Linear Inteira ou Mixta (LPPIM)**.

Aplicações.

Modelo:

1. Variáveis de decisão: $x_{ij} = 1$ se o membro da tripulação i for atribuído à tarefa j e 0 caso contrário (variável binária).
2. Função objetivo: Minimizar o custo total:

$$\text{Minimize } Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

onde: c_{ij}: custo de designar a equipe i para a tarefa j.

Aplicações.

3 Restrições:

(a) Restrições de atribuição de tarefas Cada tarefa j deve ser atribuída a exatamente um membro da tripulação:

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

(b) Restrições de disponibilidade da tripulação: Cada membro da tripulação i pode lidar com um número limitado de tarefas:

$$\sum_j x_{ij} \leq k_i \quad \forall i$$

em que k_i é o número máximo de tarefas que a equipe i pode executar.

(c) Restrições de compatibilidade de habilidades: Somente a tripulação qualificada pode executar determinadas tarefas:

$$x_{ij} = 0 \quad \text{se a tripulação } i \text{ não estiver qualificada para a tarefa } j$$

(d) Restrições de turno (se aplicável): Para evitar horas de trabalho excessivas, certifique-se de que a duração total das tarefas atribuídas a cada membro da equipe não exceda o máximo permitido de h_i:

$$\sum_j t_j x_{ij} \leq h_i \quad \forall i \quad \text{em que } t_j \text{ é a duração da tarefa } j.$$

Aplicações.

Exemplo

Considere 3 membros da tripulação e 4 tarefas com custos, qualificações e limites máximos.

- *Parâmetros:*
  - c_{ij}: *Matriz de custos.*
  - q_{ij}: *Matriz de qualificação (1 se i puder executar j, 0 caso contrário).*
  - k_i: *Máximo de tarefas para cada membro da tripulação.*
  - h_i: *Máximo de horas por membro da equipe.*
  - t_j: *Duração das tarefas.*

Aplicações.

Exemplo

- *Formulação:*

$$Minimize\ Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \ldots, 4$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq k_i \quad \forall i = 1, 2, 3$$

$$x_{ij} \leq q_{ij} \quad \forall i, j$$

$$\sum_{j=1}^{4} t_j x_{ij} \leq h_i \quad \forall i = 1, 2, 3$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$$

Aplicações.

Exemplo

Descrição do problema: Uma companhia aérea opera 3 voos e tem 4 tripulantes disponíveis. Cada voo deve ter exatamente um membro da tripulação designada. Nem todos os membros da tripulação estão qualificados para operar todos os vôos. O objetivo é designar a tripulação para os vôos, minimizando os custos.

- *Vôos:*
  - **F1**: *Vôo 1*
  - **F2**: *Vôo 2*
  - **F3**: *Vôo 3*
- *Membros da tripulação:*
  - **C1**: *Membro da tripulação 1*
  - **C2**: *Membro da tripulação 2*
  - **C3**: *Membro da tripulação 3*
  - **C4**: *Membro da tripulação 4*

Aplicações.

Exemplo

Data:

- *Matriz de Qualificação: Cada tripulação só pode lidar com certos vôos:*

Vôo	*C1*	*C2*	*C3*	*C4*
F1	*1*	*1*	*1*	*0*
F2	*0*	*1*	*1*	*1*
F3	*1*	*0*	*1*	*1*

Tabela: Matriz de qualificação

- *Matriz de custos Custo de designar a tripulação i para o vôo j:*

Vôo	*C1*	*C2*	*C3*	*C4*
F1	*500*	*400*	*300*	*-*
F2	*-*	*450*	*350*	*400*
F3	*600*	*-*	*400*	*350*

Tabela: Matriz de custos

Aplicações.

Exemplo

Formulação como um Problema de Programação Linear

1. *Variáveis de decisão:*
   - $x_{ij} = 1$ *se a tripulação* i *for designada para o voo* j*, 0 caso contrário.*

- *Função objetivo: Minimizar o custo total*

$$Z = 500x_{11}+400x_{12}+300x_{13}+450x_{22}+350x_{23}+400x_{24}+600x_{31}+400x_{33}+350x_{34}$$

2. *Restrições:*
   - *Cada voo deve ter uma tripulação designada:*

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \quad (F1)$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \quad (F2)$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \quad (F3)$$

Aplicações.

Exemplo

3. *Cada tripulação pode cuidar de no máximo um voo:*

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1 \quad (C1)$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1 \quad (C2)$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1 \quad (C3)$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 1 \quad (C4)$$

4. *Respeite as restrições de qualificação (por exemplo, $x_{ij} = 0$ se a tripulação i não estiver qualificada para o voo j).*

Aplicações.

Exemplo

Este pequeno exemplo demonstra como formular um problema de programação de tripulação como um problema de programação linear inteira. Softwares como HiGHS, Gurobi ou CPLEX podem ser usados para encontrar as soluções em problemas de tamanho pequeno a moderado. Para problemas reais de grande escala podemos combinar as técnicas de Programação linear com abordagens heurísticas. Usando outras formulações mais eficientes, problemas com número de vôos na ordem de 1000 pôdem ter um número de variáveis no ordem de bilhões.

Aplicações.

O Problema de Roteamento de Veículos (PRV) trata do planejamento das rotas ideais para uma frota de veículos de entrega visando atender a um conjunto de clientes com demandas específicas, minimizando os custos e respeitando as restrições operacionais.

Aplicações.

Exemplos de aplicações:

- Logística e distribuição: Planejamento de rotas de entrega para comércio.
- Coleta de lixo: Otimização de rotas de caminhões de lixo nas cidades.
- Transporte escolar: Projeto de rotas para ônibus escolares.
- Entrega com veículos elétricos: Contabilizando as restrições da bateria e as necessidades de recarga.

Aplicações.

Objetivos: Planejar as rotas de uma frota de veículos para:

- Minimizar os custos totais, como distância ou tempo de viagem.
- Atender a todas as demandas dos clientes.
- Respeitar as capacidades dos veículos e as restrições operacionais.

Custos principais:

- **Custo de viagem:** Distância ou tempo entre os clientes.
- **Custo de operação do veículo:** Custos fixos ou variáveis do uso do veículo.
- **Custo de penalidade:** Custos incorridos pela violação de restrições (por exemplo, janelas de tempo).

Aplicações.

Algumas restrições e/ou requerimentos pôdem ser incorporadas ao modelo:

- **PRV com restrições de capacidade:** Os veículos têm uma capacidade máxima, e as demandas dos clientes devem respeitar esse limite.
- **PRV com janelas de tempo:** Os clientes têm janelas de tempo específicas durante as quais devem ser atendidos.
- **PRV com multi-depósitos:** Os veículos podem começar e retornar a depósitos diferentes.
- **PRV com uso dinámico de informações :** São consideradas atualizações em tempo real das demandas ou restrições.
- **PRV com sustentabilidade:** Leva em consideração a minimização das emissões de carbono ou o gerenciamento do alcance de veículos elétricos, entre outros.

Aplicações.

Formulação matemática do PRV com restrições de capacidade:

- Parâmetros:
  - N: Conjunto de clientes $(1, \ldots, n)$.
  - 0: Localização do depósito.
  - d_i: Demanda do cliente i.
  - Q: Capacidade máxima de cada veículo (frota homogênea).
  - c_{ij}: Custo (distância ou tempo) entre os clientes i e j.
  - K: Número máximo de veículos.

Aplicações.

Formulação matemática do PRV com restrições de capacidade:

- Parâmetros:
  - N: Conjunto de clientes $(1, \ldots, n)$.
  - 0: Localização do depósito.
  - d_i: Demanda do cliente i.
  - Q: Capacidade máxima de cada veículo (frota homogênea).
  - c_{ij}: Custo (distância ou tempo) entre os clientes i e j.
  - K: Número máximo de veículos.
- Variáveis de decisão:
  - x_{ij}^k: Variável binária, 1 se o veículo k viajar de i a j, 0 caso contrário.
  - q_i^k: Quantidade transportada pelo veículo k para o cliente i.

Aplicações.

Formulação matemática do PRV com restrições de capacidade:

- Parâmetros:
  - N: Conjunto de clientes $(1, \ldots, n)$.
  - 0: Localização do depósito.
  - d_i: Demanda do cliente i.
  - Q: Capacidade máxima de cada veículo (frota homogênea).
  - c_{ij}: Custo (distância ou tempo) entre os clientes i e j.
  - K: Número máximo de veículos.
- Variáveis de decisão:
  - x_{ij}^k: Variável binária, 1 se o veículo k viajar de i a j, 0 caso contrário.
  - q_i^k: Quantidade transportada pelo veículo k para o cliente i.
- Função objetivo

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} c_{ij} x_{ij}^k$$

Aplicações.

Requerimentos:

- **Cada cliente é atendido exatamente uma vez:**

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=0}^{N} x_{ij}^{k} = 1, \quad \forall i \in N$$

Aplicações.

Requerimentos:

- **Cada cliente é atendido exatamente uma vez:**

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=0}^{N} x_{ij}^{k} = 1, \quad \forall i \in N$$

- **Conservação de fluxo para cada veículo:**

$$\sum_{j=0}^{N} x_{ij}^{k} = \sum_{j=0}^{N} x_{ji}^{k}, \quad \forall k, \forall i$$

Aplicações.

Requerimentos:

- **Cada cliente é atendido exatamente uma vez:**

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=0}^{N} x_{ij}^{k} = 1, \quad \forall i \in N$$

- **Conservação de fluxo para cada veículo:**

$$\sum_{j=0}^{N} x_{ij}^{k} = \sum_{j=0}^{N} x_{ji}^{k}, \quad \forall k, \forall i$$

- **Restrição de capacidade:**

$$\sum_{i=1}^{N} d_i \sum_{j=0}^{N} x_{ij}^{k} \leq Q, \quad \forall k$$

Aplicações.

Requerimentos:

- **Cada cliente é atendido exatamente uma vez:**

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=0}^{N} x_{ij}^{k} = 1, \quad \forall i \in N$$

- **Conservação de fluxo para cada veículo:**

$$\sum_{j=0}^{N} x_{ij}^{k} = \sum_{j=0}^{N} x_{ji}^{k}, \quad \forall k, \forall i$$

- **Restrição de capacidade:**

$$\sum_{i=1}^{N} d_i \sum_{j=0}^{N} x_{ij}^{k} \leq Q, \quad \forall k$$

- **Partida e retorno ao depósito:**

$$\sum_{j=1}^{N} x_{0j}^{k} = \sum_{j=1}^{N} x_{j0}^{k} = 1, \quad \forall k$$

Aplicações.

PRV com restrições de capacidade:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} c_{ij}$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=0}^{N} x_{ij}^{k} = 1 \quad i = 1, \dots N,$$

$$\sum_{j=0}^{N} x_{ij}^{k} = \sum_{j=0}^{N} x_{ji}^{k} \quad k = 1, \dots K, \; i = 1, \dots N,$$

$$\sum_{i=1}^{N} d_i \sum_{j=0}^{N} x_{ij}^{k} \leq Q \quad k = 1, \dots K,$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{0j}^{k} = \sum_{j=1}^{N} x_{j0}^{k} = 1 \quad k = 1, \dots K,$$

$$x_{ij}^{k} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots N, \; k = 1, \dots K.$$

Outras informações.

Grupo de Matemática Aplicada da UFBA

- Linhas de pesquisa
  - Computação gráfica.
  - Controle Ótimo para Equações Estocásticas com Retardo e Aplicações em Finanças.
  - Modelagem Matemática e Simulação Numérica.
  - Otimização e Aplicações.
- Pesquisadores
  - Edson Alberto Coayla Teran
  - Majela Penton Machado
  - Mariana Cassol
  - Mauricio Romero Sicre
  - Perfilino Eugenio Ferreira Junior
  - Simone Sousa Ribeiro
  - Vinicius Moreira Mello

Outras informações.

Obrigado!

Referências bibliográficas

- Dimitris Bertsimas and John Tsitsiklis. **Introduction to Linear Optimization**. 1st. Athena Scientific, 1997. isbn: 1886529191.
- D.G. Luenberger and Y. Ye. **Linear and Nonlinear Programming**. International Series in Operations Research & Management Science. Springer US, 2008. isbn: 9780387745022. url:https://books.google.com.br/books?id=-pD62uvi9lgC.