Endos Robustamente Transitivos com Críticos

Elivan Neri Lima (UFBA)
Orientadora: Cristina Lizana Araneda(UFBA)

EPGMAT

Salvador, 19 de Novembro de 2024

Setting

C^1- endomorfismos em variedades compactas sem bordo.

Objetivo

Estudar as propriedades ergódicas de dinâmicas robustamente trantisitivas com pontos críticos (A derivada não é invertível no ponto).

Transitividade

Denotaremos a orbita positiva de um ponto $x \in M$ por

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{N}\}$$

Definição. Seja $f : M \to M$ contínua. Diremos que f é topologicamente transitiva se existe $x \in M$ tal que a órbita é densa em M.

Diremos que f é C^1-robustamente transitivo se existe uma C^1-vizinhança aberta de f tal que toda g nessa vizinhança é transitiva. (**Notação: RT)**

Parcialmente Hiperbólico

Um endomorfismo f é parcialmente hiperbólico se existe $\lambda > 1$,$l \geq 1$, e um campo de cones $\mathcal{C}$ invariante satisfazendo:
Núcleo Transversal: para todo $x \in M$ e $n \geq 1$,

$$kerDf^n(x) \cap \mathcal{C}(x) = \{0\};$$

Propriedade Instável: Para todo $x \in M$ e $v \in \mathcal{C}(x)$,

$$\|Df_x^l(v)\| \geq \lambda \|v\|.$$

Obstrução Topológica

Lizana-Ranter'2019

Em Superfícies: C^1-RT e $Cr(f) \neq \emptyset$ implica

- Parcialmente Hiperbólico.
- $M = \mathbb{T}^2$ ou $M = \mathbb{K}^2$.

Homotopia

Diremos que $f, g : X \to Y$ são homotópicas se existe uma aplicação contínua $H : [0, 1] \times M \to M$ tal que $H(0, x) = f(x)$ e $H(1, x) = g(x)$. Esta é uma relação de equivalência.

Seja $L : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ e $\sigma(L) = \{\mu, \lambda\}$ seu espectro. Podemos separar as classe de homotopia da seguinte maneira:

Parcialmente hiperbólico: $\mu = 1 < \lambda$,
Hiperbólico: $0 < \mu < 1 < \lambda$,
Expansora: $1 < \mu < \lambda$,
Homotetia: $1 < \mu = \lambda$,
Grau zero: $0 = \mu < 1 < \lambda$.

Pergunta: Quais classes de homotopia a seguir admitem endomorfismos C^1-Robustamente transitivo?

Exemplos em superfícies

Lizana-Ranter'16-22

$$1 < |\mu| < |\lambda|, \quad |\mu| = 0 < 1 < |\lambda|$$

▷ robustamente transitivo;
▷ persistência de pontos críticos;
▷ exibe família de cones instáveis;
▷ exibe uma forma fraca de hiperbolicidade.

Homotópico a expansor

Sejam $1 < \mu < \lambda$ inteiros. Considere o endomorfismo linear

$$\begin{aligned} L : \mathbb{T}^2 &\to \mathbb{T}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\mu x \ mod 1, \lambda y \ mod 1) \end{aligned}$$

Seja $f_0 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $f_0(x) = \mu x \ mod 1$

Sejam $f_1, f_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ deformação de f_0 satisfazendo as seguintes propriedades. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno

1. f_i é 2ϵ C^0-próximo a $f_0(x) := \mu x (mod 1)$ com $0 < |\partial_x f_i| < 1$ in $(-\epsilon, \epsilon)$;

2. Existem pontos $-\epsilon < p_0^1 < x_0 = 0 < p_0^2$, tal que f_i restrito a $I = [p_0^1, p_0^2]$ é contração e p_0^i é um ponto fixo atrator de f_i, $i = 1, 2$;

3. f_i tem dois pontos repulsores fixos p_-^i e p_+^i em uma vizinhança do atrator p_0^i satisfazendo $-2\epsilon < p_-^i < p_0^i < p_+^i < 2\epsilon$.

4. O mapa $f_i(x)$ restrito a $\mathbb{S}^1 - (-2\epsilon, 2\epsilon)$ é uma função afim da forma $\mu x + \beta_i$, onde β_i é escolhido de modo que sua orbita futura $\mathcal{O}_{f_0}^+(x)$ é densa em $\mathbb{T}^2$.

Considere quatro intervalos J, J_0 centrado em y_0, J_1 centrado em y_1 e J_2 centrado em y_2 tal que J_0, J_1, J_2 são dois a dois disjuntos, estão contidos em J e $J \subset \lambda J_i = \lambda y \ (mod 1) : y \in J_i$ para cada $i = 0, 1, 2$.

Defina a C^1-homotopia $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^1$ dada por

$$f_y(x) = \begin{cases} f_i(x); (x, y) \in R_i = \mathbb{S}^1 \times J_i, \ i = 0, 1, 2 \\ f_0(x); (x, y) \in {R_J}^c = (\mathbb{S}^1 \times J)^c \end{cases}$$

Defina $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ por $F(x, y) = (f_y(x), \lambda y)$.

F é parcialmente hiperbólico e admite um **Blender** em particular é um endomorfismo robustamente transitivo.

Adicionando críticos

Sejam $B_{t,s}$ uma caixa centrada na origem com lados de tamanho t e s suficientemente pequenos e $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \mu + \frac{1}{2}]$, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mapas C^∞ tais que:

$$\Phi(x) = \Phi(-x) \quad \text{e} \quad \mu < \Phi(0) < \mu + \frac{1}{2}$$

com

$$\psi(0) = 0, \quad \min \psi' \geq \frac{\lambda - \mu}{\lambda + 1}, \max \psi' = 1,$$

e ψ é nula fora de $[-s, s]$.
Dado $(a, b) \in \mathbb{T}^2$ suficientemente longe do blender, defina

$$F_{t,s}(x, y) = (f_y(x) - \alpha(x, y), \lambda y(mod 1))$$

onde $\alpha(x, y) = \Phi(x - a)\psi(y - b)$ para todo $|x - a| < s,\ |y - b| < t$, do contrário $\alpha(x, y) = 0$.
$F_{t,s}$ é homotópico a F, parcialmente hiperbólico e preserva o blender.

Entropia

Denote por $h_{top}(f)$ a entropia topológica.

Dada uma medida de probabilidade f-invariante μ, a entropia métrica é denotado por $h_\mu(f)$.

Seja $f : M \to M$ continua M compacto e $\mathbb{M}_f$ o conjunto das medidas de probabilidade invariantes por f, então o príncipio variacional diz que

$$h_{top}(f) = \sup_{\mu \in \mathbb{M}_f} h_\mu(f)$$

Diremos que uma medida $\mu \in \mathbb{M}_f$ é uma **medidade de máxima**

entropia se $h_{top}(f) = h_\mu(f)$.

Work in progress

Pergunta 1 Esta classe de exemplos admitem medida de máxima entropia?

Pergunta 2 Quantas medidas de máxima entropia admitem?

Pergunta 3 $h_{top}(F) = h_{top}(L)$?

Diremos que μ é f**-adaptada** se $\log d(x, C) \in L^1(\mu)$, onde C é o conjunto dos pontos críticos e descontinuidades.

Se μ é f-adaptada então para $\mu - a.e.\ x \in M$,

$$\chi(v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(v)\|$$

existe para todo $v \in T_xM$.

Fixe $\chi > 0$ diremos que $\mu \in \mathbb{M}_f$ é χ**-hiperbólica** se $|\chi(v)| > \chi$.

Teorema(Araujo-Lima-Poletti'2022) Seja f um endomorfismo com pontos singulares satisfazendo as hipoteses $(A1) - (A7)$ e $h_{top}(f) < \infty$, então f possui no máximo uma quantidade enumerável de medidas f-adaptadas hiperbólicas de máxima entropia.

Obrigado!