

O centro do grupo de tranças emolduradas FB_n

Ênio Carlos da Silva Leite

Orientador: **Oscar Ocampo**

Financiado por FAPESB

Universidade Federal da Bahia

Novembro 2024

Artigo

Juyumaya, J., *Markov trace on the Yokonuma-Hecke algebra*, *J. Knot Theory Ramifications* **13**, (2004), 25-39.

Theorem (Ko, K.H.; Smolinsky, L., 1992)

Two framed braids represent homeomorphic 3-manifolds if and only if they are related by the equivalence relation generated by the following moves:

- (1) Markov move: for $\beta \in FB_n$, $\beta\sigma_n \sim \beta \sim \beta\sigma_n^{-1}$;
- (2) Blow up: for $\beta \in FB_n$, $t_{n+1}\beta \sim \beta \sim t_{n+1}^{-1}\beta$;
- (3) Handle slide: for $\alpha, \beta \in FB_{n-1}$,

$$t_n W_{n,j} \alpha W_{n,i}^{-1} \beta \sim t_{n+1} t^{2\lambda+1} (W_{n,j} \sigma_n W_{n,j} \sigma_n^{-1}) \alpha (W_{n,i}^{-1} \sigma_n^{-1} W_{n,i} \sigma_n) \beta \sigma_n^{-2} \sigma_{n-1}^{-1},$$

where $\lambda = \lambda_i(\pi(\beta\alpha))(\alpha(n-1)) - \lambda_j(\pi(\alpha\beta))(n-1)$;

- (4) Orientation reversing: for $\alpha, \beta \in FB_{n-1}$, $t_n W_{n,j} \alpha W_{n,i}^{-1} \beta \sim t_n W_{n,j}^{-1} \alpha W_{n,i} \beta$;
- (5) Conjugation by framed braids.

Grupo de tranças emolduradas

Seja B_n o grupo de tranças em n cordas. O grupo B_n pode ser apresentado (apresentação de Artin) com geradores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ e relações de tranças

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (1)$$

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (2)$$

onde $i, j = 1, \dots, n - 1$.

Definição

O grupo de tranças emolduradas FB_n é o grupo gerado por $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, t_1, \dots, t_n$ com as relações (1), (2) e relações adicionais

$$t_i t_j = t_j t_i \quad \text{para todo } i, j, \quad (3)$$

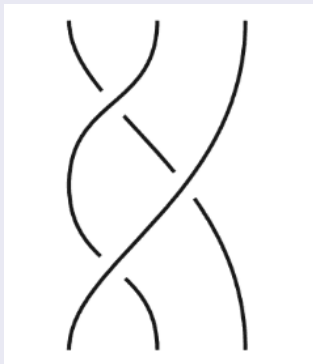
$$\sigma_i t_j = t_{\sigma_i(j)} \sigma_i. \quad (4)$$

O grupo FB_n é um produto semidireto $\mathbb{Z}^n \rtimes B_n$ onde a ação de B_n em \mathbb{Z}^n é dada pela permutação dos índices.

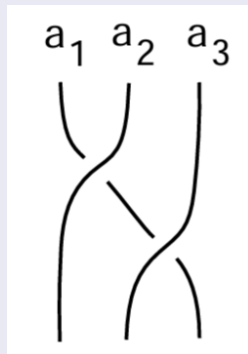
Tranças clássica e emoldurada

Figura: Tranças clássica e emoldurada

(a) Trança clássica.



(b) Trança emoldurada.



Grupo de tranças puras: caso clássico

Define-se o **grupo de tranças puras** como sendo o núcleo da projeção natural $\pi: B_n \rightarrow S_n$ e é denotado por P_n : $P_n = \text{Ker}(\pi: B_n \rightarrow S_n)$. Elementos essenciais desse grupo são as tranças $A_{i,j}$, com $1 \leq i < j \leq n$, que podem ser representadas em termos dos geradores $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ de B_n por

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1},$$

que possuem representação geométrica dada pelo desenho da Figura 3.

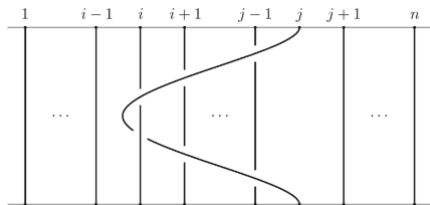


Figura: Trança pura $A_{i,j}$ em P_n .

O centro dos grupos B_n e P_n

Definição

O **centro** de um grupo G é o subgrupo de G consistindo de todo $g \in G$ tal que $gx = xg$ para cada $x \in G$. O centro de um grupo G é denotado por $Z(G)$.

Teorema ((Kassel; Turaev, 2008), Theorem 1.24)

Se $n \geq 3$, então $Z(B_n) = Z(P_n)$ é um grupo cíclico infinito gerado por $\theta_n = \Delta_n^2$, onde

$$\Delta_n = (\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1\sigma_2)\sigma_1 \in B_n.$$

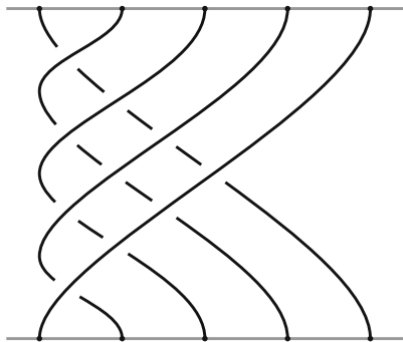


Figura: A trança Δ_5 .

O grupo de tranças puras emolduradas

O grupo de tranças puras emolduradas FP_n é o grupo de tranças puras onde as permutações de tranças são acompanhadas por um índice inteiro para cada corda, que pode ser visto como uma “torção” na corda, ou seja, FP_n é uma extensão de P_n por \mathbb{Z}^n .

Em estrutura, Natov (1997) define que o grupo de tranças puras emolduradas é descrito como $FP_n = \mathbb{Z}^n \times P_n$, onde cada elemento de FP_n é dado por $t_1^{k_1} t_2^{k_2} \cdots t_n^{k_n} \cdot \beta$, com $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}$, o vetor que representa a torção em cada uma das cordas da trança pura, e $\beta \in P_n$. O resultado a seguir justifica que $FP_n = \mathbb{Z}^n \times P_n$.

Proposição

O grupo de tranças puras emolduradas é dado por $FP_n = \mathbb{Z}^n \times P_n$.

Lema

Dada uma sequência exata curta

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\rho} C \longrightarrow 1,$$

então $\rho(Z(B)) \subset Z(C)$.

Lema

Dada uma sequência exata curta

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\rho} C \longrightarrow 1,$$

então $\rho(Z(B)) \subset Z(C)$.

Proposição

Se $n \geq 3$, então $Z(FP_n) = \mathbb{Z}^n \times \langle \Delta_n^2 \rangle$, onde

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 \in B_n.$$

O centro do grupo FB_n

Teorema

Se $n \geq 3$, então $Z(FB_n) = \mathbb{Z} \times \langle \Delta_n^2 \rangle$, onde

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 \in B_n.$$

O centro do grupo FB_n

Teorema

Se $n \geq 3$, então $Z(FB_n) = \mathbb{Z} \times \langle \Delta_n^2 \rangle$, onde

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 \in B_n.$$

Prova

Considere a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow FP_n \longrightarrow FB_n \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1.$$

Sabe-se que para $n \geq 3$, tem-se $Z(S_n) = \{1\}$. Pelo lema anterior, conclui-se que $\pi(Z(FB_n)) \subset Z(S_n)$, então $Z(FB_n) \subset FP_n$ e, assim, $Z(FB_n) \subset Z(FP_n) = \mathbb{Z}^n \times \langle \Delta_n^2 \rangle$.

prova

A seguir, analisaremos quais elementos de $\mathbb{Z}^n \times \langle \Delta_n^2 \rangle$ pertencem a $Z(FB_n)$.

A trança Δ_n^2 comuta com os geradores de FB_n . De fato, temos que

$$\Delta_n^2 t_i = \Delta_n^2 t_i (\Delta_n^2)^{-1} \Delta_n^2 = t_{\Delta_n^2(i)} \Delta_n^2 = t_i \Delta_n^2,$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$, pois Δ_n^2 é uma trança pura, a permutação associada é a trivial. Além disso, pelo teorema que descreve o centro de B_n , segue que

$$\sigma_j \Delta_n^2 = \Delta_n^2 \sigma_j,$$

para todo $j = 1, 2, \dots, n - 1$. Logo, $\Delta_n^2 \in Z(FB_n)$.

O centro do grupo FB_n

prova

Agora, observe que para $i = 1, 2, \dots, n$ temos que c_i , geradore de \mathbb{Z}^n em $\mathbb{Z}^n \times \langle \Delta_n^2 \rangle$, comuta com t_k para todo $k = 1, 2, \dots, n$. Por outro lado, para $i = 1, 2, \dots, n$, c_i não comuta com σ_j para todo $j = 1, 2, \dots, n - 1$, pois

$$\sigma_j c_i = \sigma_j c_i \sigma_j^{-1} \sigma_j = c_{\sigma_j(i)} \sigma_j = \begin{cases} c_{i+1} \sigma_j & \text{se } j = i, \\ c_i \sigma_j & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou seja, $c_i \notin Z(FB_n)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

O centro do grupo FB_n

prova

Seja $c_1 c_2 \cdots c_{n-1} \in \mathbb{Z}^n$. Temos também que $c_1 c_2 \cdots c_{n-1} \notin Z(FB_n)$, uma vez que para $n = 3, j = 1, 2$, então

$$\sigma_j c_1 c_2 = \sigma_j c_1 \sigma_j^{-1} \sigma_j c_2 \sigma_j^{-1} \sigma_j = c_{\sigma_j(1)} c_{\sigma_j(2)} \sigma_j = \begin{cases} c_2 c_1 \sigma_j = c_1 c_2 \sigma_j & \text{se } j = 1, \\ c_1 c_3 \sigma_j & \text{se } j = 2, \end{cases}$$

logo, $c_1 c_2 \notin Z(FB_n)$. Para $n > 3$ e todo $j = 1, 2, \dots, n-2$, então

$$c_1 c_2 \cdots c_{n-2} c_{n-1} \sigma_j = \sigma_j c_1 c_2 \cdots c_{n-2} c_{n-1},$$

porém, se $j = n-1$, obtém-se

$$\sigma_j c_1 c_2 \cdots c_{n-2} c_{n-1} = c_{\sigma_j(1)} c_{\sigma_j(2)} \cdots c_{\sigma_j(n-2)} c_{\sigma_j(n-1)} = c_1 c_2 \cdots c_{n-2} c_n \sigma_j,$$

e então $c_1 c_2 \cdots c_{n-1} \notin Z(FB_n)$.

O centro do grupo FB_n

prova

Por outro lado, seja $c_1 c_2 \cdots c_{n-1} c_n \in \mathbb{Z}^n$. Vamos mostrar que $c_1 c_2 \cdots c_{n-1} c_n \in Z(FB_n)$. Com efeito, para $j = i - 1$, $i = 2, 3, \dots, n$, tem-se

$$\begin{aligned}\sigma_j c_1 c_2 \cdots c_{i-1} c_i \cdots c_{n-1} c_n &= c_{\sigma_j(1)} c_{\sigma_j(2)} \cdots c_{\sigma_j(i-1)} c_{\sigma_j(i)} \cdots c_{\sigma_j(n-1)} c_{\sigma_j(n)} \sigma_j \\ &= c_1 c_2 \cdots c_i c_{i-1} \cdots c_{n-1} c_n \sigma_j \\ &= c_1 c_2 \cdots c_{i-1} c_i \cdots c_{n-1} c_n \sigma_j,\end{aligned}$$

como queríamos.

O elemento $c_1 c_2 \cdots c_n \in \mathbb{Z}^n$ pode ser escrito como $c_1 c_2 \cdots c_n = (t, t, \dots, t)$, pois $c_i = (1, \dots, t, \dots, 1)$ com t na i -ésima coordenada, e tal elemento é invariante pela ação do σ_j para todo $j = 1, 2, \dots, n - 1$. Dessa forma, $c_1 c_2 \cdots c_n \in \mathbb{Z}^n$ gera uma cópia de \mathbb{Z} em \mathbb{Z}^n .

O centro do grupo FB_n

prova

Afirmamos que $Z(FB_n) = \mathbb{Z} \times \langle \Delta_n^2 \rangle$, onde \mathbb{Z} é gerado pelo produto $c_1 c_2 \cdots c_n$. É fácil ver que $\mathbb{Z} \times \langle \Delta_n^2 \rangle \subset Z(FB_n)$, pois $c_1 c_2 \cdots c_n \Delta_n^2$ comuta com os geradores de FB_n . Agora, seja $\alpha \in Z(FB_n)$ e como $Z(FB_n) \subset \mathbb{Z}^n \times \langle \Delta_n^2 \rangle$, então $\alpha = c_1^{x_1} c_2^{x_2} \cdots c_n^{x_n} (\Delta_n^2)^y$. Devemos mostrar que $c_1^{x_1} c_2^{x_2} \cdots c_n^{x_n}$ pertence a cópia de \mathbb{Z} gerada por $c_1 c_2 \cdots c_n$ e, para isso, precisamos que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ e daí concluiremos que $\alpha \in \mathbb{Z} \times \langle \Delta_n^2 \rangle$ e, conseqüentemente, $Z(FB_n) \subset \mathbb{Z} \times \langle \Delta_n^2 \rangle$.

O centro do grupo FB_n

prova

Sabe-se que $c_1^{x_1} c_2^{x_2} \cdots c_n^{x_n} \in Z(FB_n)$, pois $\alpha, \Delta_n^2 \in Z(FB_n)$, então para $j = 1$ tem-se

$$\begin{aligned}\sigma_1 c_1^{x_1} c_2^{x_2} c_3^{x_3} \cdots c_n^{x_n} \sigma_1^{-1} &= c_1^{x_1} c_2^{x_2} c_3^{x_3} \cdots c_n^{x_n} \\ c_{\sigma_1(1)}^{x_1} c_{\sigma_1(2)}^{x_2} c_{\sigma_1(3)}^{x_3} \cdots c_{\sigma_1(n)}^{x_n} &= c_1^{x_1} c_2^{x_2} c_3^{x_3} \cdots c_n^{x_n} \\ c_2^{x_1} c_1^{x_2} c_3^{x_3} \cdots c_n^{x_n} &= c_1^{x_1} c_2^{x_2} c_3^{x_3} \cdots c_n^{x_n} \\ c_1^{x_2} c_2^{x_1} c_3^{x_3} \cdots c_n^{x_n} &= c_1^{x_1} c_2^{x_2} c_3^{x_3} \cdots c_n^{x_n},\end{aligned}$$

em que a última igualdade é válida se, e só se, $x_1 = x_2$. Para $j = 2$ segue que

$$\begin{aligned}\sigma_2 c_1^{x_1} c_2^{x_2} c_3^{x_3} \cdots c_n^{x_n} \sigma_2^{-1} &= c_1^{x_1} c_2^{x_2} c_3^{x_3} \cdots c_n^{x_n} \\ c_{\sigma_2(1)}^{x_1} c_{\sigma_2(2)}^{x_2} c_{\sigma_2(3)}^{x_3} \cdots c_{\sigma_2(n)}^{x_n} &= c_1^{x_1} c_2^{x_2} c_3^{x_3} \cdots c_n^{x_n} \\ c_1^{x_1} c_3^{x_2} c_2^{x_3} \cdots c_n^{x_n} &= c_1^{x_1} c_2^{x_2} c_3^{x_3} \cdots c_n^{x_n} \\ c_1^{x_1} c_2^{x_3} c_3^{x_2} \cdots c_n^{x_n} &= c_1^{x_1} c_2^{x_2} c_3^{x_3} \cdots c_n^{x_n}.\end{aligned}$$

prova

Novamente, a última igualdade é válida se, e só se, $x_2 = x_3$. Pelo caso $j = 1$, segue que $x_1 = x_2 = x_3$. Continuando o processo para $j = 3, 4, \dots, n-1$, pode-se concluir que $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$. desta forma, como \mathbb{Z} é abeliano e $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$, obtemos

$$c_1^{x_1} c_2^{x_2} c_3^{x_3} \dots c_n^{x_n} = (c_1 c_2 c_3 \dots c_n)^{x_1}$$

e, assim, $c_1^{x_1} c_2^{x_2} c_3^{x_3} \dots c_n^{x_n}$ pertence a cópia de \mathbb{Z} gerada por $c_1 c_2 c_3 \dots c_n$. Portanto, $Z(FB_n) = \mathbb{Z} \times \langle \Delta_n^2 \rangle$ como queríamos.

Juyumaya, J., *Markov trace on the Yokonuma-Hecke algebra*, J. Knot Theory Ramifications 13, **2004**,25-39.

Kassel, C; Turaev, V., *Braid groups*. [S.I.]:Springer Science & Business media, **2008**. v. 247.

Ko, K. H.; Smolinsky, L. *The framed braid groups and 3-manifolds*, proceedings of the American Mathematical Society, **1992**, 541-551.

Natov, J., *Pure framed braids and 3-manifolds*. [S.I.]: Louisiana States University and Agricultural & Mechanical College, **1997**.