PROPRIEDADES COMBINATÓRIAS DE TRANÇAS VIRTUAIS

Mirele Pereira da Silva
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ORIENTADOR: Dr. OSCAR OCAMPO

Encontro de Pós-Graduação em Matemática
19 de novembro de 2024

Grupo de tranças de Artin

Uma apresentação para o grupo de tranças de Artin B_n é dada da seguinte maneira:
Geradores: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$.

Grupo de tranças de Artin

Uma apresentação para o grupo de tranças de Artin B_n é dada da seguinte maneira:

Geradores: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$.

Relações:

(1) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n-2$;

(2) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, para $|i-j| \geq 2$.

Grupo de tranças de Artin

Uma apresentação para o grupo de tranças de Artin B_n é dada da seguinte maneira:

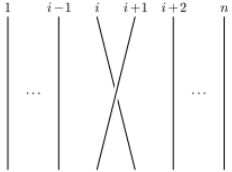
Geradores: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$.

Relações:

(1) $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n-2$;

(2) $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, para $|i-j| \geq 2$.

Geometricamente os geradores de B_n podem ser vistos da seguinte maneira:



Grupo simétrico

Uma apresentação para o grupo simétrico S_n é dada da seguinte maneira:

Geradores: $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$.

Grupo simétrico

Uma apresentação para o grupo simétrico S_n é dada da seguinte maneira:

Geradores: $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$.

Relações:

(1) $\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n-2$;

(2) $\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i$, para $|i-j| \geq 2$;

(3) $\rho_i^2 = 1$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Grupo de tranças virtuais

O grupo VB_n admite a seguinte apresentação de grupo :
Geradores: σ_i, ρ_i com $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Grupo de tranças virtuais

O grupo VB_n admite a seguinte apresentação de grupo :
Geradores: σ_i, ρ_i com $i = 1, 2, \ldots, n-1$.
Relações:
(1) $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ para $i = 1, 2, ..., n-2$;
(2)$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ para $|i-j| \geq 2$;
(3) $\rho_i\rho_{i+1}\rho_i = \rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}$ para $i = 1, 2, ..., n-2$;
(4) $\rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i$ para $|i-j| \geq 2$
(5)$\rho_i^2 = 1$ para $i = 1, 2, ..., n-1$;
(6) $\rho_i\rho_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}$ para $i = 1, 2, ..., n-2$;
(7) $\sigma_i\rho_j = \rho_j\sigma_i$ para $|i-j| \geq 2$;

Geometricamente os geradores de VB_n podem ser vistos da seguinte maneira:

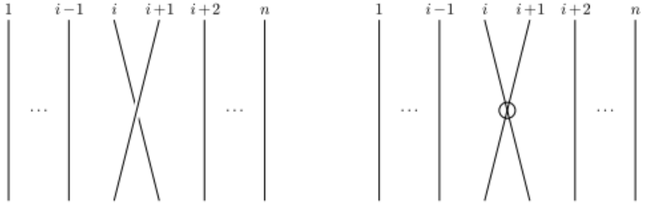


Figura: Gerador σ_i e ρ_i para $i = 1, 2 \ldots, n-1$

Comutador

Seja G um grupo, o comutador é dado como

$$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

para todo $x, y \in G$.

Subgrupo comutador

O subgrupo comutador é dado por

$$G' = [G,G] = \langle [x,y] \mid x, y \in G \rangle.$$

O grupo quociente $G/[G,G]$ é chamado de **abelianizado** de G, e esse grupo quociente é abeliano.

Série central inferior

Dado um grupo G, definimos a série central inferior de G como a filtração

$$\Gamma_1(G) = G \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \dots$$

onde

$$\Gamma_i(G) = [\Gamma_{i-1}(G), G].$$

Residualmente nilpotente

Um grupo G é dito residualmente nilpotente se e somente se

$$\cap_{i \geq 1} \Gamma_i(G) = \{1\}.$$

No grupo de tranças virtuais são válidas as seguintes propriedades :

Proposição

O grupo VB_2 é isomorfo ao produto livre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ e é residualmente nilpotente.

No grupo de tranças virtuais são válidas as seguintes propriedades :

Proposição

O grupo VB_2 é isomorfo ao produto livre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ e é residualmente nilpotente.

Observe as apresentações de $VB_2 = \langle \sigma_1, \rho_1 \mid \rho_1^2 = 1 \rangle$ e de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 = \langle a, b \mid b^2 = 1 \rangle$.

No grupo de tranças virtuais são válidas as seguintes propriedades :

Proposição

O grupo VB_2 é isomorfo ao produto livre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ e é residualmente nilpotente.

Observe as apresentações de $VB_2 = \langle \sigma_1, \rho_1 \mid \rho_1^2 = 1 \rangle$ e de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 = \langle a, b \mid b^2 = 1 \rangle$.
Agora, note que o grupo $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ pode ser percebido como um subgrupo de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ que é residualmente nilpotente, então VB_2 é residualmente nilpotente.

Proposição

O grupo $\Gamma_1(VB_n)/\Gamma_2(VB_n)$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ para $n \geq 2$.

Proposição

O grupo $\Gamma_1(VB_n)/\Gamma_2(VB_n)$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ para $n \geq 2$.

Note que $\Gamma_1(VB_n)/\Gamma_2(VB_n) = VB_n/[VB_n, VB_n]$ é um grupo abeliano gerado por σ_i e ρ_j, onde ρ_j tem ordem 2, portanto, pelo teorema da decomposição dos grupos abelianos finitamente gerados, temos que $\Gamma_1(VB_n)/\Gamma_2(VB_n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Proposição

Se $n \geq 3$, o grupo VB_n não é residualmente nilpotente.

Proposição

Se $n \geq 3$, o grupo VB_n não é residualmente nilpotente.

Conseguimos perceber que o grupo VB_n contém B_n, que é um grupo não é residualmente nilpotente, então o grupo VB_n é não residualmente nilpotente.

Um grupo G é chamado de **perfeito** se $G = \Gamma_2(G)$.

Proposição

O grupo $\Gamma_2(VB_n)$ é perfeito quanto $n \geq 5$.

Um grupo G é chamado de **perfeito** se $G = \Gamma_2(G)$.

Proposição

O grupo $\Gamma_2(VB_n)$ é perfeito quanto $n \geq 5$.

Para provar isso precisamos considerar o comutador $[u, v] \in \Gamma_2(VB_n)$ e mostrar que $[u, v] \in \Gamma_3(VB_n)$.

Seja

$$\upsilon \colon VB_n \to S_n$$

tal que

$$\upsilon(\sigma_i) = \upsilon(\rho_i) = \rho_i$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, onde S_n é gerado por ρ_i .

Grupo de tranças puras virtuais

O **ker** υ é chamado de grupo de tranças puras virtuais com n cordas e é denotado por VP_n.

Os elementos de VP_n são da seguinte maneira:

$$\lambda_{i,i+1} = \rho_i \sigma^{-1}$$

$$\lambda_{i+1,i} = \rho_i \lambda_{i,i+1} \rho_i = \sigma^{-1} \rho_i$$

$$\lambda_{i,j} = \rho_{j-1}\rho_{j-2}\dots\rho_{i+1}\lambda_{i,i+1}\rho_{i+1}\dots\rho_{j-2}\rho_{j-1},$$

$$\lambda_{j,i} = \rho_{j-1}\rho_{j-2}\dots\rho_{i+1}\lambda_{i+1,i}\rho_{i+1}\dots\rho_{j-2}\rho_{j-1}$$

Esses elementos podem ser percebidos geometricamente

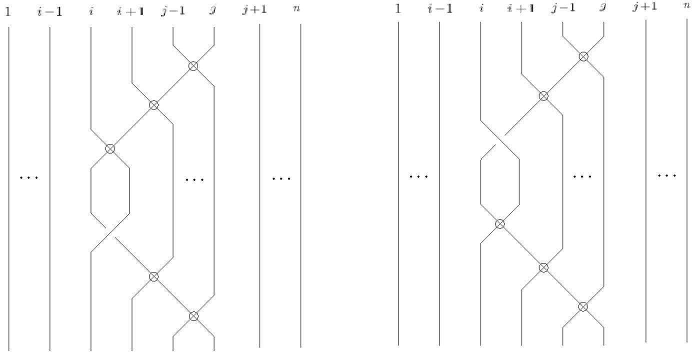


Figura: Elementos $\lambda_{i,j}$ e $\lambda_{j,i}$ com $1 \leq i < j-1 \leq n-1$.

Apresentação de VP_n

O grupo VP_n admite uma apresentação com os geradores $\lambda_{k,l}$ onde $1 \leq k \neq l \leq n$ e as seguintes relações:

$$\lambda_{i,j}\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}\lambda_{i,j};$$

$$\lambda_{k,i}\lambda_{k,j}\lambda_{i,j} = \lambda_{i,j}\lambda_{k,j}\lambda_{k,i},$$

onde as letras distintas representam índices distintos.

O grupo VB_n é isomorfo a $VP_n \rtimes S_n$ onde S_n age por permutação de índices.

Seja

$$\mu \colon VB_n \to S_n$$

tal que

$$\mu(\sigma_i) = 1 \text{ e } \mu(\rho_i) = \rho_i$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

H_n

O **ker** μ denotemos por H_n o fecho normal de B_n em VB_n.

Os elementos de H_n são da seguente maneira:

$$x_{i,i+1} = \sigma_i$$

$$x_{i+1,i} = \rho_i \sigma_i \rho_i$$

$$x_{i,j} = \rho_{j-1} \dots \rho_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1} \dots \rho_{j-1}$$

$$x_{j,i} = \rho_{j-1} \dots \rho_{i+1} \rho_i \sigma_i \rho_i \rho_{i+1} \dots \rho j - 1$$

Esses elementos podem ser percebidos geometricamente

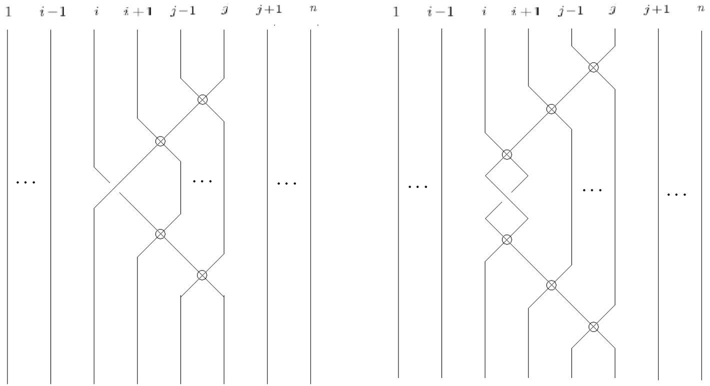


Figura: Elementos $x_{i,j}$ e $x_{j,i}$ com $1 \leq i < j-1 \leq n-1$.

Apresentação de H_n

O grupo H_n admite uma apresentação com os geradores $x_{k,l}$ onde $1 \leq k \neq l \leq n$, e as seguentes relações :

$$x_{i,j}x_{k,l} = x_{k,l}x_{i,j},$$

$$x_{i,k}x_{k,j}x_{i,k} = x_{k,j}x_{i,k}x_{k,j}.$$

onde letras distintas representam índices distintos.

Apresentação de H_n

O grupo H_n admite uma apresentação com os geradores $x_{k,l}$ onde $1 \leq k \neq l \leq n$, e as seguentes relações :

$$x_{i,j}x_{k,l} = x_{k,l}x_{i,j},$$

$$x_{i,k}x_{k,j}x_{i,k} = x_{k,j}x_{i,k}x_{k,j}.$$

onde letras distintas representam índices distintos.

O grupo VB_n é isomorfo a $H_n \rtimes S_n$ onde S_n age por permutação de índices.

Teorema

Os grupos H_n e VP_n não são isomorfos para $n \geq 3$.

Teorema

Os grupos H_n e VP_n não são isomorfos para $n \geq 3$.

Vamos observar e comparar os abelianizados de H_n e VP_n.

Teorema

Os grupos H_n e VP_n não são isomorfos para $n \geq 3$.

Vamos observar e comparar os abelianizados de H_n e VP_n.
O abelianizado de H_n é

$$\frac{\Gamma_1(H_n)}{\Gamma_2(H_n)} = \frac{H_n}{[H_n, H_n]} = \langle x_{1,2} \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

O abelianizados de VP_n é

$$\frac{\Gamma_1(VP_n)}{\Gamma_2(VP_n)} = \frac{VP_n}{[VP_n, VP_n]} = \langle \lambda_{k,l} \mid \lambda_{i,j}\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}\lambda_{i,j} \forall i,j \rangle \cong \mathbb{Z}^{n(n-1)}$$

O abelianizados de VP_n é

$$\frac{\Gamma_1(VP_n)}{\Gamma_2(VP_n)} = \frac{VP_n}{[VP_n, VP_n]} = \langle \lambda_{k,l} \mid \lambda_{i,j}\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}\lambda_{i,j} \forall i,j \rangle \cong \mathbb{Z}^{n(n-1)}$$

Note que, os abelianizados de H_n e VP_n são diferentes para $n \geq 3$, então os grupos H_n e VP_n não são isomorfos.

Seja

$$\varepsilon\colon H_n \to S_n$$

tal que,

$$\varepsilon(x_{i,j}) = \varepsilon(x_{j,i}) = \rho_i^{\rho_{i+1}\cdots\rho_{j-1}}.$$

Grupo de tranças puras estendidas

O **ker** ε denotemos por EP_n e chamamos de grupo de tranças pura estendidas.

O método Reidemeister-Schreier consiste na determinação da apresentação de subgrupos a partir da apresentação do grupo , para isso precisamos ter um conjunto de representantes das classes laterais do subgrupo no grupo que é chamado de transversal de Schreier e uma manipulação dos geradores do grupo com os elementos da transversal.

EP_2

Para isso vamos definir ε nos geradores de H_2, ou seja,

$$\varepsilon(X_{12}) = \varepsilon(X_{21}) = \rho_1^{\rho_1} = \rho_1.$$

A transversal de Schreier é dada por $\Lambda_2 = \{e, X_{12}\}$.
Os geradores do EP_2 são dados por:

$$S_{\lambda,a} = \lambda a(\overline{\lambda a})^{-1}$$

onde $\lambda \in \Lambda_2$ e $a \in \{X_{12}, X_{21}\}$.

EP_2

Para e e X_{12}, X_{21} temos que

EP_2

Para e e X_{12}, X_{21} temos que

$$S_{e,X_{12}} = eX_{12}(\overline{eX_{12}})^{-1} = X_{12}X_{12}^{-1} = e$$

EP_2

Para e e X_{12}, X_{21} temos que

$$S_{e,X_{12}} = eX_{12}(\overline{eX_{12}})^{-1} = X_{12}X_{12}^{-1} = e$$

$$S_{e,X_{21}} = eX_{21}(\overline{eX_{21}})^{-1} = X_{21}X_{12}^{-1}$$

EP_2

Para e e X_{12}, X_{21} temos que

$$S_{e,X_{12}} = eX_{12}(\overline{eX_{12}})^{-1} = X_{12}X_{12}^{-1} = e$$

$$S_{e,X_{21}} = eX_{21}(\overline{eX_{21}})^{-1} = X_{21}X_{12}^{-1}$$

Para X_{12} e X_{12}, X_{21} temos que

$$S_{X_{12},X_{12}} = X_{12}X_{12}(\overline{X_{12}X_{12}})^{-1} = X_{12}X_{12}(e)^{-1} = X_{12}^2$$

EP_2

Para e e X_{12}, X_{21} temos que

$$S_{e,X_{12}} = eX_{12}(\overline{eX_{12}})^{-1} = X_{12}X_{12}^{-1} = e$$

$$S_{e,X_{21}} = eX_{21}(\overline{eX_{21}})^{-1} = X_{21}X_{12}^{-1}$$

Para X_{12} e X_{12}, X_{21} temos que

$$S_{X_{12},X_{12}} = X_{12}X_{12}(\overline{X_{12}X_{12}})^{-1} = X_{12}X_{12}(e)^{-1} = X_{12}^2$$

$$S_{X_{12},X_{21}} = X_{12}X_{21}(\overline{X_{12}X_{21}})^{-1} = X_{12}X_{21}(e)^{-1} = X_{12}X_{21}.$$

EP_2

Agora deveríamos encontrar as relações de EP_2 e para isso deveríamos conjugar as relações de H_2 com os elementos da transversal de schreier Λ_2, mas H_2 é um grupo livre, isto é, não temos relações.

EP_2

Agora deveríamos encontrar as relações de EP_2 e para isso deveríamos conjugar as relações de H_2 com os elementos da transversal de schreier Λ_2, mas H_2 é um grupo livre, isto é, não temos relações.
Desta maneira, conseguimos uma apresentação para o ker $\varepsilon = EP_2$, chamamos esse subgrupo de grupo de tranças puras estendidas com 2 cordas.

$$EP_2 = \langle S_{e,x_{21}}, S_{x_{12},x_{12}}, S_{x_{12},x_{21}} | - \rangle.$$

Note que EP_2 é isomorfo a um grupo livre de posto 3.

Referências

- BARDAKOV, V. G. ; BELLINGERI, P. *Combinatorial properties of virtual braids*. Topology and its Applications 156 (2009), 1071–1082.
- BARDAKOV, V. G. *The virtual and universal braids*. Fundam. Math., 184 (2004), 1-18.
- BELLINGERI, P.; PARIS, L. *Virtual braids and permutations*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 70 (3) (2020), 1341–1362.
- BELLINGERI, P.; GUASCHI, J; GERVAIS, S. *Lower central series for Artin–Tits and surface braid groups*. J. Algebra 319 (2008) 1409–1427.
- GARCIA, A. ; LEQUAIN, Y. *Elementos de Álebra*. 4.ed. Rio de Janeiro : IMPAR, 2006.

Referências

GORIN, E. A. ; LIN, V. Y. *Algebraic equations with continuous coefficients and some problems of the algebraic theory of braids*, Math. USSR Sb. 7 (1969) 569–596.

HUNGERFORD, T. W. *Algebra*. Holt, Rinehart and Winston. Inc. New York, 1974.

KAMADA S. *Invariants of virtual braids and a remark on left stabilisations and virtual exchange moves*, Kobe J. Math. 21 (2004) 33–49.

KAUFFMAN L. H. *Virtual knot theory.* Eur. J. Comb. 20, 7 (1999), 663–690.

LIN, V. Y. *Braids and permutations*. http://arXiv.org, math. 2004.

Referências

MAGNUS W.; KARRASS A.; SOLITAR D. *Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations*. Reimpressão da Interscience Publishers, Nova York, 1966.

MARSHALL, H. J. *The theory of group*. New york:The Macmillian Campony, 1963.

MURASUGI, K. ; KURPITA, B. *A study of braids vol. 484 of Mathematics andits Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

ROBINSON D. J. S. *A course in the theory of finite groups.* Second Edition, Nova York, 1991.

ROTMAN J. J. *An introduction to the Theory of Groups*, Springer, (1995).

Referências

- SILVA T. F. *Nilpotência e p-Nilpotência de Grupos Finitos*. 2015. 59f. Trabalho de conclusão de curso - Universidade Federal de Campina Grande Centro de Ciências e Tecnologia, Paraíba, 2015.
- VERSHININ V. V. *On homology of virtual braids and Burau representation.* J. Knot Theory Ramifications 10, 5 (2001), 795–812.

OBRIGADA PELA ATENÇÃO!