Conjugação de Sistemas Expansores

Taís Jesus
Prof. Dr. Vilton Pinheiro

IX Encontro da Pós Graduação em Matemática da UFBA

Salvador – Bahia
Novembro 2024

Sistemas Dinâmicos

Definição

É uma triplo (M, G, f), onde:

- *M é um espaço (geralmente um conjunto ou espaço topológico) representando os estados possíveis do sistema.*
- *$f : G \times M \to M$ é uma função que descreve a evolução do sistema ao longo do tempo, com G sendo um grupo que representa o tempo.*
  A função f deve satisfazer as seguintes propriedades:
  - *$f(0, x) = x$ para todo $x \in M$ (a identidade no tempo não altera o estado).*
  - *$f(t + s, x) = f(t, f(s, x))$ para todos $t, s \in G$ e $x \in M$ (a evolução do sistema é associativa no tempo).*

Dinâmica expansora em variedade

Definição

Seja M *uma variedade compacta e seja* $f : M \to M$ *uma transformação de classe* C^1*. Dizemos que* f *é expansora se existe* $\sigma > 1$ *e alguma métrica Riemanniana em* M *tal que*

$$\|Df(x)v\| \geq \sigma\|v\| \quad \text{para todo } x \in M \text{ e todo } v \in T_xM.$$

Dinâmica expansora em Espaço métrico

Definição

Uma transformação contínua $f : M \to M$ em um espaço métrico compacto M é dita expansora se existem constantes $\sigma > 1$ e $\rho > 0$ tais que, para todo $p \in M$, as seguintes condições são satisfeitas:

- *A imagem da bola $B(p, \rho)$ contém uma vizinhança do fecho de $B(f(p), \rho)$, ou seja:*

$$f(B(p, \rho)) \supseteq B(f(p), \rho).$$

- *Para todo $x, y \in B(p, \rho)$, temos:*

$$d(f(x), f(y)) \geq \sigma\, d(x, y).$$

Conjugação de Transformações

Definição

Seja $f : X \to X$ *e* $g : Y \to Y$ *duas transformações em espaços topológicos* X *e* Y*, respectivamente. Dizemos que* f *e* g *são topologicamente conjugadas se existe uma função bijetiva* $h : X \to Y$ *que é contínua e possui uma inversa também contínua (ou seja,* h *é um homeomorfismo) e que satisfaz a condição:*

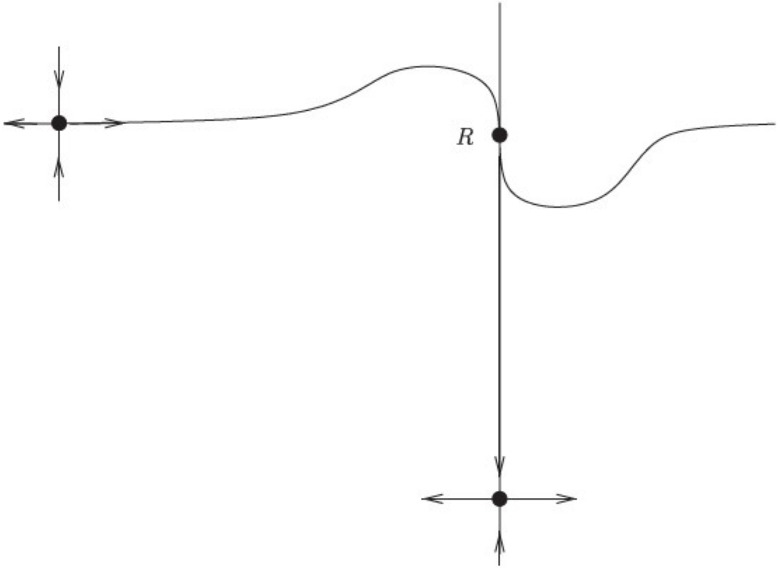
$$h \circ f = g \circ h.$$

Se f é conjugada a uma expansora, ela é expansora?

Mas por que não estamos trabalhando nesse problema para um Anosov?

Questão: Todo difeomorfismo (global ou local) que seja Holder conjugado a um difeomorfismo (resp., global ou local) de Anosov é também Anosov?

Sem condições adicionais, já sabemos que a questão não é verdadeira para difeomorfismos globais, Andrey Gogolev construiu um contra exemplo no 2- Toro $\mathbb{T}^2$ em [1].


R

Esse tipo de obstrução não ocorre em difeomorfismos locais conjugados a Anosovs expansores.

Se f é conjugada a uma expansora, ela é expansora?

Castro, Oliveira e Pinheiro abordaram essa questão em [2], introduzindo condições iniciais relacionadas ao conjunto dos pontos periódicos.

Definição

Dizemos que um difeomorfismo local f é não-uniformemente expansor (NUE) em uma variedade M, se existe η tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log || \left(Df(f^j(x))\right)^{-1} ||^{-1} \geq \eta > 0 \quad \textit{for all } x \in M.$$

Teorema (COP)

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^2 definido numa variedade Riemanniana compacta M. Suponha que f é topologicamente conjugada a um Anosov expansor g. Se f for NUE no conjunto dos pontos periódicos $\mathrm{Per}(f)$, então f é um Anosov expansor.

Yunping Jiang obteve resposta positiva para difeomorfismo local expansor no círculo, em [3]

Teorema

Suponha que M *é o círculo unitário. Seja* $f : M \to M$ *endomorfismo* $C^{1+\alpha}$ *que preserva a orientação para algum* $0 < \alpha \leq 1$. *Suponha que* f *é* $\beta - Holder$ *conjugada a um endomorfismo expansor* C^1 $g : M \to M$ *para algum* $0 < \beta \leq 1$. *Então* f *é expansor.*

Em [4], Xiongping Dai demonstrou o seguinte teorema:

Teorema

Seja dado um difeomorfismo local f de uma variedade compacta M^n de classe $C^{1+Hölder}$. Se f for conjugado por Hölder a algum mapa expansivo de classe C^1, então f também é expansivo.

Teorema

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^1 definido em uma variedade Riemanniana compacta. Se f é Holder conjugado a um difeomorfismo local C^1 expansor $g : M \to M$, então, f também é expansor.

Expoente de Lyapunov

Yongluo Cao provou em [1],

Teorema

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^1 definido em uma variedade Riemanniana compacta. Se os expoentes de Lyapunov de toda probabilidade invariante por f forem positivos, então f é uniformemente expansor.

Expoente de Lyapunov

Definição

Definimos o expoente de Lyapunov em x na direção v pelo número

$$\lambda(x,v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \||Df^n(x)v\||.$$

Os expoentes de Lyapunov em f não são negativos.

Expoente de Lyapunov para ponto periódicos

Proposição

Seja $B(x_0, r) \subset M$ *e* $F : \overline{B(x_0, r)} \to B(x_0, r)$ *um difeomorfismo local de classe* C^1 *tal que* $F(x_0) = x_0$ *e para algum* $0 < \lambda < 1$ *e* $0 < \beta < 1$

$$d(F^n(x), F^n(y)) \leqslant \lambda^n d(x, y)^\beta, \quad \forall x, y \in B(x_0, r).$$

Então todos os autovalores de $DF(x_0)$ *são iguais ou menores que* λ*.*

Estamos considerando $F = f^{-t}$, onde t é o período do ponto periódico x_0.

Logo, os expoentes de Lyapunov dos pontos periódicos são inferiormente limitados, então podemos tomar

$$\lambda_{period} = \inf\{\text{ expoentes de Lyapunov de pontos periódicos}\}$$

e existe $C > 0$ tal que $\lambda_{period} \geq C$.

Portanto um dos expoentes de Lyapunov é positivo.

Considere uma medida probabilidade ergódica invariante μ, vamos trabalhar em uma variedade de dimensão dois, sejam

$$\lambda(x) \ e \ \tilde{\lambda}(x) \quad \text{expoentes de Lyapunov de } x.$$

para x um ponto típico de μ.

Como a medida é invariante, pelo Teorema de Oseledts,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(|\det Df^n(x)|) = \lambda(x) + \tilde{\lambda}(x).$$

Pelo Teorema Birkhorff, como a medida é ergódica

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(|\det Df^n(x)|) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log(|\det Df(f^j(x))| \\ &= \int \log|\det Df| d\mu. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\int \log|\det Df| d\mu = \lambda(x) + \tilde{\lambda}(x)$$

Como f é conjugadaa uma expansora, dado $\sigma > 0$, existe um ponto periódico $p \in M$ de f tal que

$$d(f^j(x), f^j(p)) < \sigma \quad \text{for all } 0 \leq j < period(p).$$

Considere a media definida na órbita de p,

$$\nu_p = \frac{1}{\#O_f^+(p)} \sum_{y \in O_f^+(p)} \delta_y,$$

como p é periódico, ν_p é invariante e ergódica, assim

$$\int \log|\det Df| d\nu_p = \lambda(p) + \tilde{\lambda}(p)$$

Como x e p são pontos próximos e Df é contínua, temos

$$\int \log|\det Df|d\mu \sim \int \log|\det Df|d\nu_p$$

assim,

$$\lambda(x) + \tilde{\lambda}(x) \sim \lambda(p) + \tilde{\lambda}(p)$$

e portanto

$$\lambda(x) + \tilde{\lambda}(x) > 0.$$

ESTRATÉGIAS PARA PROVA

Assim, supondo em perda de generalidade, $\tilde{\lambda}(x) = 0$

$$(\lambda(x) + \tilde{\lambda}(x)) \sim (\lambda(p) + \tilde{\lambda}(p)),$$

desse modo,

$$\lambda(x) \sim \lambda(p) + \tilde{\lambda}(p)$$

Ainda,

$$\lambda_{period} = \inf\{ \text{ expoentes de Lyapunov de pontos periódicos}\}$$

e existe $C > 0$ tal que $\lambda_{period} \geq C$. Assim,

$$\tilde{\lambda}(p) > \lambda_{period} \geq C.$$

Assim, supondo em perda de generalidade, $\tilde{\lambda}(x) = 0$

$$(\lambda(x) + \tilde{\lambda}(x)) \sim (\lambda(p) + \tilde{\lambda}(p)),$$

desse modo,

$$\lambda(x) \sim \lambda(p) + \tilde{\lambda}(p)$$

Ainda,

$$\lambda_{period} = \inf\{ \text{ expoentes de Lyapunov de pontos periódicos}\}$$

e existe $C > 0$ tal que $\lambda_{period} \geq C$. Assim,

$$\tilde{\lambda}(p) > \lambda_{period} \geq C.$$

ainda, temos $\lambda(p) \geq \lambda(x) - \gamma$ para $\gamma > 0$ dado, portanto,

$$\lambda(x) \geq \lambda(x) - \gamma + \lambda_{period},$$

e desse modo,

$$\lambda_{period} \leq \gamma - \delta,$$

onde $\delta > 0$ é pequeno. Mas isso é absurdo, pois γ é arbitrário e λ_{period} é limitado inferiormente.

Proposição

Considere uma variedade Riemanniana compacta M, μ uma medida ergódica invariante e $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^1. Suponha que para qualquer $\sigma > 0$, existe um ponto periódico $p \in M$ de f tal que

$$d(f^j(x), f^j(p)) < \sigma \quad \textit{para todo } 0 \leq j < per(p).$$

Sejam v e w vetores que geram os subespaços de Oseledets para o ponto típico x e a medida μ. Suponha que existam λ_1 e λ_2 tais que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$|Df^n(x)v| \geq \lambda_1^n \geq \lambda_2^n \geq |Df^n(x)w|.$$

Portanto, dado $\gamma > 0$,

$$\lambda(x) - \lambda(p) \leq \gamma$$

- Sincronização
- Extensão Natural
- Eventos e Blocos Coerentes
- Lema e Tempo de Pliss
- Cociclo

Teorema para Cociclo

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local contínuo em um espaço normado compacto M, e seja $A : M \times \mathbb{N} \to GL(2)$ um cociclo contínuo de f. Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- Os expoentes de Lyapunov de A em cada ponto periódico são estritamente maiores do que uma constante positiva.
- Toda medida invariante ergódica é sombreada por uma medida periódica.

- Para os expoentes de Lyapunov λ e $\tilde{\lambda}$ da medida μ, com $\lambda > \tilde{\lambda}$ e ambos não negativos, existem constantes λ_1 e λ_2 tais que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 < \lambda$ e $\lambda_2 > \tilde{\lambda}$, sendo suficientemente próximos dos expoentes de Lyapunov λ e $\tilde{\lambda}$, respectivamente, e

$$|A^n(x)v| \geq e^{\lambda_1 n} \geq Ce^{\lambda_2 n} \geq |A^n(x)w|,$$

  para todo $n \in \mathbb{N}$, onde v e w são vetores que geram os subespaços de Oseledets para o ponto típico x da medida μ.

Então, dado $\gamma > 0$, existe $p \in \mathrm{per}(f)$ tal que

$$\lambda(x) - \lambda(p) \leq \gamma$$

onde $\lambda(p)$ é o maior expoente de Lyapunov de p.

Sincronização

Proposição

Nas mesmas configurações do Teorema anterior. Existe um conjunto mensurável U tal que $\mu(U) > 0$ e para $x \in U$ com expoentes de Lyapunov $\lambda(x)$ e $\tilde{\lambda}(x)$ satisfazendo $\lambda(x) > \tilde{\lambda}(x) > 0$, temos

$$|A^n(x)v| \geq e^{\lambda_1 n} \geq Ce^{\lambda_2 n} \geq |A^n(x)w| \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde C é uma constante positiva, $\lambda_1 < \lambda(x)$ e $\lambda_2 > \tilde{\lambda}(x)$, v e w são vetores que geram os subespaços de Oseledets.

Referências Bibliográficas

- Andrey Gogolev (2010). Diffeomorphisms Hölder conjugate to Anosov diffeomorphisms Ergodic Theory and Dynamical Systems, 30, pp441-456doi:10.1017/S0143385709000169
- Castro Junior, A.; Oliveira, K.; Pinheiro, V.. Shadowing by non-uniformly hyperbolic periodic points and uniform hyperbolicity. Nonlinearity (Bristol. Print), v. 20, p. 75-85 (2007).
- Jiang, Y.. On a question of Katok in One-dimensional case, Discrete and Continuous Dynamical Systems, V. 24, No 4, doi:10.3934/dcds.2009.24.1209 (2009).
- Xiongping Dai. On the approximation of Lyapunov exponents and a question suggested by Anatole Katok. Nonlinearity, Volume 23, Issue 3, pp. 513-528 (2010).

Referências Bibliográficas

- Cao Y 2003 Non-zero Lyapunov exponents and uniform hyperbolicity Nonlinearity 16 1473–9
- Oseledet V 1968 A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems Trans. Moscow Math. Soc. 19 197?231
- Pinheiro, Vilton.Lift and Synchronization. arXiv: Dynamical Systems (2018).

Agradecimentos

Obrigada!