Jogos com ultrafiltros e a extensão de Katětov

Enathielle Thiala Souza de Andrade

Orientador: Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva
Doutoranda em Matemática - UFBA

Salvador – Bahia

22 de novembro de 2024

Gruenhage[1976]:
Seja x um ponto de um espaço topológico X, considere um jogo infinito entre dois jogadores, jogado da seguinte forma:
Em cada n-ésima rodada
UM: escolhe um aberto não-vazio U_n tal que $x \in U_n$
DOIS: responde com $x_n \in U_n$.
Uma sequência da forma

$$(U_0, x_0, U_1, x_1, ..., U_n, x_n, ...),$$

é uma *partida* do jogo.
O jogador *UM* vence o jogo se a sequência de pontos selecionados pelo *DOIS* convergir para x.

Definição

Dizemos que x é um **W-ponto** se o Jogador *UM* possuir uma estratégia vencedora neste jogo, e é chamado de **w-ponto** se o Jogador *DOIS* não possuir uma estratégia vencedora.

O que acontece em termos do filtro gerado pelas vizinhanças abertas?

Definição

Dado um conjunto não-vazio X, uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser um **filtro sobre X** *se valem as seguintes cláusulas:*
(F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$.
(F2) Se $A, B \in \mathcal{F}$, *então* $A \cap B \in \mathcal{F}$.
(F3) Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$, *então* $B \in \mathcal{F}$.

Filtro gerado pelas vizinhanças abertas:

$$\mathcal{V}_x = \{A \subseteq X : \exists V_x \in \tau[V_x \subset A]\}$$

Definição

Sejam $\mathcal{F}$ *filtro sobre* X e $x \in X$. *Dizemos que* $\mathcal{F}$ **converge para** x se $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$

Seja $(x_n)_{n\in\omega}$ sequência em X. Considere

$$\mathcal{G} = \{A \subseteq X : \exists m \in \omega[\{x_n : n \geq m\} \subseteq A]\}$$

Proposição

$x_n \to x$ se, e somente se, $\mathcal{G} \to x$.

Um olhar conjuntista

Seja $\mathcal{F}$ um filtro qualquer de um conjunto X, considere um jogo infinito entre dois jogadores, jogado da seguinte forma:
Na n-ésima rodada,
UM: escolhe um subconjunto $F_n \in \mathcal{F}$,
DOIS: escolhe algum ponto $x_n \in F_n$.
Uma sequência da forma

$$(F_0, x_0, F_1, x_1, ..., F_n, x_n, ...),$$

é uma *partida* do jogo.
O Jogador *UM* vence o jogo se

$$\mathcal{F} \subseteq \{A \subseteq X : \exists m[\{x_n : n \geq m\} \subseteq A]\}$$

Definição

Dizemos que o filtro $\mathcal{F}$ é um **W-filtro** *se o Jogador UM possuir uma estratégia vencedora neste jogo, e é chamado de* **w-filtro** *se o Jogador DOIS não possuir uma estratégia vencedora.*

- x é um W-ponto $\Leftrightarrow \mathcal{V}_x$ é um W-filtro.
- x é um w-ponto $\Leftrightarrow \mathcal{V}_x$ é um w-filtro.

Definição

Seja X espaço topológico T_2. A **extensão de Katětov** *de X é*

$$\kappa X = X \cup \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ é } \tau(X)\text{-ultrafiltro livre sobre } X\}$$

Base de abertos

$$\mathcal{B} = \tau(X) \cup \{U \cup \{\mathcal{U}\} : U \in \mathcal{U} \in \kappa X \setminus X\}$$

Obs: Se X tiver a topologia discreta a extensão de Katětov possui os ultrafiltros “para valer”, i.e. de forma conjuntista.

Com os ultrafiltros conseguimos "voltar para a topologia"

Teorema

Seja $\mathcal{F}$ um ultrafiltro de X. $\mathcal{F}$ é um W-filtro de X se, e somente se, $\mathcal{F}$ é um W-ponto na extensão de Katětov do espaço topológico X munido com a topologia discreta.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos chamar o jogo usado para a definição de W-ponto de $G_1(\mathcal{F})$ e o jogo usado para a definição de W-filtro de $G_2(\mathcal{F})$.

$\Rightarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-filtro existe φ estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$. Vamos construir φ', estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$ utilizando a φ[1].

	$G_2(\mathcal{F})$		$G_1(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\varphi(\emptyset) = F_0$		$\varphi'(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_0		$x_0 \in F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$.
1	$\varphi(x_0) = F_1$		$\varphi'(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_1		$x_1 \in F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[1] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Rightarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-filtro existe φ estratégia vencedora para UM em $G_2(\mathcal{F})$. Vamos construir φ', estratégia vencedora para UM em $G_1(\mathcal{F})$ utilizando a φ[1].

	$G_2(\mathcal{F})$		$G_1(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\varphi(\emptyset) = F_0$		$\varphi'(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_0		$x_0 \in F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$.
1	$\varphi(x_0) = F_1$		$\varphi'(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_1		$x_1 \in F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[1]Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Rightarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-filtro existe φ estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$. Vamos construir φ', estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$ utilizando a φ[1].

	$G_2(\mathcal{F})$		$G_1(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\varphi(\varnothing) = F_0$		$\varphi'(\varnothing) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_0		$x_0 \in F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$.
1	$\varphi(x_0) = F_1$		$\varphi'(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_1		$x_1 \in F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[1] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Rightarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-filtro existe φ estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$. Vamos construir φ', estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$ utilizando a φ[1].

	$G_2(\mathcal{F})$		$G_1(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\varphi(\varnothing) = F_0$		$\varphi'(\varnothing) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_0		$x_0 \in F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$.
1	$\varphi(x_0) = F_1$		$\varphi'(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_1		$x_1 \in F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[1]Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Rightarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-filtro existe φ estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$. Vamos construir φ', estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$ utilizando a φ[1].

	$G_2(\mathcal{F})$		$G_1(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\varphi(\varnothing) = F_0$		$\varphi'(\varnothing) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_0		$x_0 \in F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$.
1	$\varphi(x_0) = F_1$		$\varphi'(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_1		$x_1 \in F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[1] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Rightarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-filtro existe φ estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$. Vamos construir φ', estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$ utilizando a φ[1].

	$G_2(\mathcal{F})$		$G_1(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\varphi(\emptyset) = F_0$		$\varphi'(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_0		$x_0 \in F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$.
1	$\varphi(x_0) = F_1$		$\varphi'(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_1		$x_1 \in F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[1]Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Rightarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-filtro existe φ estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$. Vamos construir φ', estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$ utilizando a φ[1].

	$G_2(\mathcal{F})$		$G_1(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\varphi(\emptyset) = F_0$		$\varphi'(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_0		$x_0 \in F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$.
1	$\varphi(x_0) = F_1$		$\varphi'(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_1		$x_1 \in F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[1]Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Rightarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-filtro existe φ estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$. Vamos construir φ', estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$ utilizando a φ[1].

	$G_2(\mathcal{F})$		$G_1(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\varphi(\varnothing) = F_0$	x_0	$\varphi'(\varnothing) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$	$x_0 \in F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$.
1	$\varphi(x_0) = F_1$	x_1	$\varphi'(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$	$x_1 \in F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$
2	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

[1] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

⇒: Como $\mathcal{F}$ é um W-filtro existe φ estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$. Vamos construir φ', estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$ utilizando a φ[1].

	$G_2(\mathcal{F})$		$G_1(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\varphi(\varnothing) = F_0$		$\varphi'(\varnothing) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_0		$x_0 \in F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$.
1	$\varphi(x_0) = F_1$		$\varphi'(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_1		$x_1 \in F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[1] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Rightarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-filtro existe φ estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$. Vamos construir φ', estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$ utilizando a φ[1].

	$G_2(\mathcal{F})$		$G_1(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\varphi(\varnothing) = F_0$		$\varphi'(\varnothing) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_0		$x_0 \in F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$.
1	$\varphi(x_0) = F_1$		$\varphi'(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_1		$x_1 \in F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[1] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Rightarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-filtro existe φ estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$. Vamos construir φ', estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$ utilizando a φ[1].

	$G_2(\mathcal{F})$		$G_1(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\varphi(\varnothing) = F_0$		$\varphi'(\varnothing) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_0		$x_0 \in F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$.
1	$\varphi(x_0) = F_1$		$\varphi'(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_1		$x_1 \in F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[1] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Rightarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-filtro existe φ estratégia vencedora para UM em $G_2(\mathcal{F})$. Vamos construir φ', estratégia vencedora para UM em $G_1(\mathcal{F})$ utilizando a φ[1].

	$G_2(\mathcal{F})$		$G_1(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\varphi(\emptyset) = F_0$	x_0	$\varphi'(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$	$x_0 \in F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$.
1	$\varphi(x_0) = F_1$	x_1	$\varphi'(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$	$x_1 \in F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$
2	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

[1] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Rightarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-filtro existe φ estratégia vencedora para UM em $G_2(\mathcal{F})$. Vamos construir φ', estratégia vencedora para UM em $G_1(\mathcal{F})$ utilizando a φ[1].

	$G_2(\mathcal{F})$		$G_1(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\varphi(\emptyset) = F_0$		$\varphi'(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_0		$x_0 \in F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$.
1	$\varphi(x_0) = F_1$		$\varphi'(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$	
		x_1		$x_1 \in F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[1] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

Como UM vence em $G_2(\mathcal{F})$,

$$\mathcal{F} \subseteq \{A \subseteq X : \exists m[\{x_n : n \geq m\} \subseteq A]\}.\mathbf{(*)}$$

Vejamos que $(x_n)_{n\in\omega}$ converge para $\mathcal{F}$: seja U um aberto de $\mathcal{F}$ em κX.

$$U = F \cup \{\mathcal{F}\}, \text{ com } F \in \mathcal{F}.$$

Por **(*)**, existe $m \in \omega$ tal que $\{x_n : n \geq m\} \subseteq F$, temos então

$$x_n \in U \text{ para todo } n \geq m,$$

logo $(x_n)_{n\in\omega}$ converge para $\mathcal{F}$.
Portanto, UM sempre vencerá em $G_1(\mathcal{F})$, logo φ' é uma estratégia vencedora para UM em $G_1(\mathcal{F})$ e desse modo $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX.

$\Leftarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX, existe ξ estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos construir ξ', estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$ utilizando a ξ[2].

	$G_1(\mathcal{F})$		$G_2(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\xi(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(\emptyset) = F_0$	
		x_0		$x_0 \in F_0$
1	$\xi(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(x_0) = F_1$	
		x_1		$x_1 \in F_1$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[2] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Leftarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX, existe ξ estratégia vencedora para UM em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos construir ξ', estratégia vencedora para UM em $G_2(\mathcal{F})$ utilizando a ξ[2].

	$G_1(\mathcal{F})$		$G_2(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\xi(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(\emptyset) = F_0$	
		x_0		$x_0 \in F_0$
1	$\xi(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(x_0) = F_1$	
		x_1		$x_1 \in F_1$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[2] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Leftarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX, existe ξ estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos construir ξ', estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$ utilizando a ξ.[2]

	$G_1(\mathcal{F})$		$G_2(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\xi(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(\emptyset) = F_0$	
		x_0		$x_0 \in F_0$
1	$\xi(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(x_0) = F_1$	
		x_1		$x_1 \in F_1$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[2] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Leftarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX, existe ξ estratégia vencedora para UM em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos construir ξ', estratégia vencedora para UM em $G_2(\mathcal{F})$ utilizando a ξ[2].

	$G_1(\mathcal{F})$		$G_2(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\xi(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(\emptyset) = F_0$	
		x_0		$x_0 \in F_0$
1	$\xi(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(x_0) = F_1$	
		x_1		$x_1 \in F_1$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[2]Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Leftarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX, existe ξ estratégia vencedora para UM em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos construir ξ', estratégia vencedora para UM em $G_2(\mathcal{F})$ utilizando a ξ[2].

	$G_1(\mathcal{F})$		$G_2(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\xi(\varnothing) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(\varnothing) = F_0$	
		x_0		$x_0 \in F_0$
1	$\xi(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(x_0) = F_1$	
		x_1		$x_1 \in F_1$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[2] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Leftarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX, existe ξ estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos construir ξ', estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$ utilizando a ξ[2].

	$G_1(\mathcal{F})$		$G_2(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\xi(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(\emptyset) = F_0$	
		x_0		$x_0 \in F_0$
1	$\xi(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(x_0) = F_1$	
		x_1		$x_1 \in F_1$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[2] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Leftarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX, existe ξ estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos construir ξ', estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$ utilizando a ξ[2].

	$G_1(\mathcal{F})$		$G_2(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\xi(\varnothing) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(\varnothing) = F_0$	
		x_0		$x_0 \in F_0$
1	$\xi(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(x_0) = F_1$	
		x_1		$x_1 \in F_1$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[2]Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Leftarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX, existe ξ estratégia vencedora para UM em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos construir ξ', estratégia vencedora para UM em $G_2(\mathcal{F})$ utilizando a ξ[2].

	$G_1(\mathcal{F})$		$G_2(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\xi(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(\emptyset) = F_0$	
		x_0		$x_0 \in F_0$
1	$\xi(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(x_0) = F_1$	
		x_1		$x_1 \in F_1$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[2]Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Leftarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX, existe ξ estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos construir ξ', estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$ utilizando a ξ[2].

	$G_1(\mathcal{F})$		$G_2(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\xi(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(\emptyset) = F_0$	
		x_0		$x_0 \in F_0$
1	$\xi(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(x_0) = F_1$	
		x_1		$x_1 \in F_1$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[2]Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Leftarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX, existe ξ estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos construir ξ', estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$ utilizando a ξ[2].

	$G_1(\mathcal{F})$		$G_2(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\xi(\varnothing) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(\varnothing) = F_0$	
		x_0		$x_0 \in F_0$
1	$\xi(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(x_0) = F_1$	
		x_1		$x_1 \in F_1$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[2] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Leftarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX, existe ξ estratégia vencedora para UM em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos construir ξ', estratégia vencedora para UM em $G_2(\mathcal{F})$ utilizando a ξ[2].

	$G_1(\mathcal{F})$		$G_2(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\xi(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(\emptyset) = F_0$	
		x_0		$x_0 \in F_0$
1	$\xi(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(x_0) = F_1$	
		x_1		$x_1 \in F_1$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[2] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Leftarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX, existe ξ estratégia vencedora para UM em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos construir ξ', estratégia vencedora para UM em $G_2(\mathcal{F})$ utilizando a ξ[2].

	$G_1(\mathcal{F})$		$G_2(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\xi(\emptyset) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(\emptyset) = F_0$	
		x_0		$x_0 \in F_0$
1	$\xi(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(x_0) = F_1$	
		x_1		$x_1 \in F_1$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[2] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

$\Leftarrow$: Como $\mathcal{F}$ é um W-ponto de κX, existe ξ estratégia vencedora para UM em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos construir ξ', estratégia vencedora para UM em $G_2(\mathcal{F})$ utilizando a ξ[2].

	$G_1(\mathcal{F})$		$G_2(\mathcal{F})$	
Rodada	UM	DOIS	UM	DOIS
0	$\xi(\varnothing) = F_0 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(\varnothing) = F_0$	
		x_0		$x_0 \in F_0$
1	$\xi(x_0) = F_1 \cup \{\mathcal{F}\}$		$\xi'(x_0) = F_1$	
		x_1		$x_1 \in F_1$
2	$\vdots$		$\vdots$	
		$\vdots$		$\vdots$

[2]Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

Como ξ é uma estratégia vencedora para *UM* em $G_1(\mathcal{F})$, $(x_n)_{n\in\omega}$ converge para $\mathcal{F}$. Vejamos que $\mathcal{F} \subseteq \{A \subseteq X : \exists m[\{x_n : n \geq m\} \subseteq A]\}$: Seja $F \in \mathcal{F}$,

$$F \cup \{\mathcal{F}\} \text{ é um aberto de } \mathcal{F} \text{ em } \kappa X,$$

logo

$$\exists m \in \omega, \forall n \geq m,\ x_n \in F \cup \{\mathcal{F}\}.$$

Como $x_n \neq \mathcal{F}$ para todo $n \in \omega$, segue que

$$\{x_n : n \geq m\} \subseteq F.$$

Portanto, *UM* sempre vencerá em $G_2(\mathcal{F})$, logo ξ' é uma estratégia vencedora para *UM* em $G_2(\mathcal{F})$ e desse modo $\mathcal{F}$ é um W-filtro de X. ■

Teorema

Seja $\mathcal{F}$ um ultrafiltro de X. $\mathcal{F}$ é um w-filtro de X se, e somente se, $\mathcal{F}$ é um w-ponto na extensão de Katětov do espaço topológico X munido com a topologia discreta.

Demonstração: $\Rightarrow$: Seja φ uma estratégia para o jogador *DOIS* em $G_1(\mathcal{F})$. Vamos provar que essa estratégia pode ser derrotada. Para isso vamos definir uma φ' estratégia para *DOIS* em $G_2(\mathcal{F})$ da seguinte forma:

$$\varphi'(F_n) = \varphi(F_n \cup \{\mathcal{F}\}), \forall n \in \omega.^3$$

Como $\mathcal{F}$ é um w-filtro, φ' pode ser derrotada, logo existe

$$\{F_0, F_1, ..., F_n, ...\}$$

sequência de lances de *UM* tal que

$$\mathcal{F} \subseteq \{A \subseteq X : \exists m[\{\varphi'(F_n) : n \geq m\} \subseteq A]\}.$$

[3] Não faria sentido em $G_1(\mathcal{F})$ o jogador *DOIS* jogar infinitas vezes o próprio $\mathcal{F}$, então assuminos que ele escolhe sempre um elemento de F_n.

Assim, como vimos na demonstração do Teorema anterior,

$$\varphi'(F_n)_{n\in\omega} \text{ converge para } \mathcal{F} \ \textbf{(*)} \ .$$

Ora,

$$\{F_0 \cup \{\mathcal{F}\}, F_1 \cup \{\mathcal{F}\}, ..., F_n \cup \{\mathcal{F}\}, ...\}$$

é uma sequência de lances de *UM* que derrota φ em $G_1(\mathcal{F})$, pois

$$\varphi'(F_n) = \varphi(F_n \cup \{\mathcal{F}\}), \forall n \in \omega.$$

e por **(*)**

$$\varphi(F_n \cup \{\mathcal{F}\})_{n\in\omega} \text{ converge para } \mathcal{F}.$$

$\Leftarrow$: Análoga. ■

Referências Bibliográficas

- ANDRADE, E.; LARA, D.; MEZABARBA, R.; DA SILVA, S. **Filter games and topology**. Em preparação.
- ENGELKING, R. **General Topology**. rev. compl. ed. Berlin: Heldermann, 1989.
- GRUENHAGE, G. **Infinite games and generalizations of first-countable spaces**. General Topology and Appl. 6, 3 (1976), 339–352.
- LARA,D.; MEZABARBA, R.; **Selective game versions of some consonant points**. Preprint, 2021.

Obrigada pela atenção!