Ponte Suspensa na teoria de Von Kármán

Roseane da Silva Martins
roseane.smartins@hotmail.com

Colaboradores: Raposo, Joilson Ribeiro e Mirelson Freitas

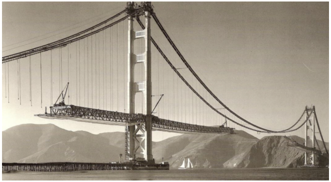
Universidade Federal da Bahia - UFBA

Salvador, 21 de Novembro de 2024

INTRODUÇÃO

Introdução

Ponte suspensa é uma estrutura composta por cabo principal geralmente ancorado ao solo, torres de apoio, deck e cabos verticais que conectam o cabo principal ao deck.



Cada vez mais, a estrutura deve suportar vibrações maiores e menos perceptível aos usuários. Nos modelos matemáticos de ponte suspensas o deck é em geral modelado pela sistema de Timoshenko, veja por exemplo [5].

Para modelar o deck, usamos a teoria proposta por Theodore Von Kármán que leva em conta apenas não-linearidades geométricas relativas às deflexões. Assim vamos utilizar o modelo do sistema de Von Kármán (1) proposto por J. E. Lagnese e J. L. Lions, em [1],

$$\begin{cases} \rho A\omega_{tt} - EA\left[\left(u_x + \frac{1}{2}\omega_x^2\right)\omega_x\right]_x + EI\omega_{xxxx} = 0 \text{ em } (0,\, L)\times(0,\, T), \\ \rho A u_{tt} - EA\left[u_x + \frac{1}{2}\omega_x^2\right]_x = 0 \quad \text{em} \quad (0,\, L)\times(0,\, T). \end{cases} \tag{1}$$

Onde $u(x, t)$ é o deslocamento transversal de um ponto genérico, $\omega(x, t)$ o deslocamento longitudinal, $(0, L)$ é o segmento ocupado pela viga, e T é um tempo positivo dado. O parâmetro físico representa as propriedades do material sendo E o módulo de Young, L o comprimento da viga, ρA o peso por unidade de comprimento e EI a rigidez da viga.

Consideramos o cabo principal modelado por uma corda elástica $v = v(x, t)$,

$$v_{tt} - \alpha v_{xx} = 0. \tag{2}$$

onde a constante $\alpha > 0$ é o módulo de elasticidade da corda (que prende o cabo principal ao deck). Como mecanismos de estabilização utilizaremos amortecimento interno, o qual utiliza fricção seca para dissipar a energia de um sistema controlando as vibrações.

O acoplamento de (1) e (2) leva a um modelo de ponte suspensa na teoria de Von Kármán com amortecimentos internos dados por

$$\begin{cases} v_{tt} - \alpha v_{xx} - \lambda(\omega - v) + \mu_1 v_t = 0, \text{ em } (0,\, L) \times (0,\, T) \\ \omega_{tt} - b_1 \left[\left(u_x + \dfrac{1}{2}\omega_x^2 \right) \omega_x \right]_x + b_2 \omega_{xxxx} + \lambda(\omega - v) + \mu_2 \omega_t = 0 \\ u_{tt} - b_1 \left[u_x + \dfrac{1}{2}\omega_x^2 \right]_x + \mu_3 u_t = 0 \text{ em } (0,\, L) \times (0,\, T), \end{cases} \tag{3}$$

com $b_1, b_2, \alpha, \lambda, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ são parâmetros positivos e reais.

Consideramos os dados iniciais

$$\begin{cases} \omega(x,0) = \omega_0(x), \ \omega_t(x,0) = \omega_1(x), \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \\ v(x,0) = v_0(x), \ v_t(x,0) = v_1(x), \end{cases} \tag{4}$$

e condições de contorno

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ \omega(0,t) = \omega(L,t) = 0, \\ \omega_x(0,t) = \omega_x(L,t) = 0, \\ v_x(0,t) = v_x(L,t) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

A energia associada ao sistema é definida por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[|\varphi|^2 + \alpha|v_x|^2 + \lambda|\omega - v|^2 + |\psi|^2\right] dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^L \left[|\phi|^2 + b_1 \left|u_x + \frac{1}{2}\omega_x^2\right|^2 + b_2|\omega_{xx}|^2\right] dx\end{aligned}$$

e satisfaz

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = -\mu 1 \int_0^L |v_t|^2 dx - \mu_2 \int_0^L |\omega_t|^2 dx - \mu_3 \int_0^L |u_t|^2 dx. \quad (6)$$

Este trabalho está organizado da seguinte forma.

- Boa colocação do sistema: Adaptamos a ideia proposta por [2], onde a ideia principal é mostrar que a existência de soluções fracas pode ser obtida através de um processo de regularização e depois indo até o limite, onde consideramos um sistema de evolução não linear como uma perturbação localmente Lipschitz de um semigrupo linear de contração e aplicamos resultados abstratos da teoria de semigrupos a fim de concluir a existência de solução para o semigrupo não linear associado ao modelo.
- Decaimento exponencial: Usamos o método da energia, o qual consiste em construir um adequado funcional de Lyapunov para o sistema.

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Adaptamos a ideia como em [2] e [3]. Então, reescrevemos, para $\varepsilon > 0$, o sistema (3)-(5) da seguinte forma:

$$\begin{cases} v_{tt} - \alpha v_{xx} - \lambda(\omega - v) + \mu_1 v_t = 0, \text{ in } (0, L) \times (0, T) \\ \omega_{tt} - \varepsilon\omega_{xxtt} - b_1 \left[\left(u_x + \dfrac{1}{2}\omega_x^2 \right) \omega_x \right]_x + b_2\omega_{xxxx} + \lambda(\omega - v) + \mu_2\omega_t = 0 \\ u_{tt} - b_1 \left[u_x + \dfrac{1}{2}\omega_x^2 \right]_x + \mu_3 u_t = 0 \text{ in } (0, L) \times (0, T), \end{cases} \tag{7}$$

com $\alpha, \lambda, b_1, b_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ parâmetros positivos e reais. Consideramos os dados iniciais

$$\begin{cases} \omega(x,\,0) = \omega_0(x),\; \omega_t(x,\,0) = \omega_1(x), \\ u(x,\,0) = u_0(x),\; u_t(x,\,0) = u_1(x), \\ v(x,\,0) = v_0(x),\; v_t(x,\,0) = v_1(x), \end{cases} \tag{8}$$

e as condições de contorno

$$\begin{cases} u(0,\,t) = u(L,\,t) = 0, \\ \omega(0,\,t) = \omega(L,\,t) = 0, \\ \omega_x(0,\,t) = \omega_x(L,\,t) = 0, \\ v_x(0,\,t) = v_x(L,\,t) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Existência e unicidade de solução

Nosso espaço de fase é dado pelo espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,\, L) \times L^2(0,\, L) \times H_0^2(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0,\, L) \times L^2(0,\, L),$$

munido do produto interno

$$\begin{aligned}
\langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = {} & \alpha \int_0^L v_x \overline{\tilde{v}}_x dx + \int_0^L \varphi \overline{\tilde{\varphi}} dx + b_2 \int_0^L \omega_{xx} \overline{\tilde{\omega}}_{xx} dx + \int_0^L \psi \overline{\tilde{\psi}} dx \\
& + \varepsilon \int_0^L \psi_x \overline{\tilde{\psi}}_x dx + b_1 \int_0^L u_x \overline{\tilde{u}}_x dx + \int_0^L \phi \overline{\tilde{\phi}} dx \\
& + \lambda \int_0^L (\omega - v)(\overline{\tilde{\omega}} - \overline{\tilde{v}}) dx
\end{aligned}$$

onde $U = (v,\, \varphi,\, \omega,\, \psi,\, u,\, \phi)^T$, $\widetilde{U} = (\widetilde{v},\, \widetilde{\varphi},\, \widetilde{\omega},\, \widetilde{\psi}\,, \widetilde{u},\, \widetilde{\phi})^T \in \mathcal{H}$.

Existência e unicidade de solução

Equipado com a norma

$$\|U\|^2 = \alpha\|v_x\|^2 + \|\varphi\|^2 + b_2\|\omega_{xx}\|^2 + \|\psi\|^2 + \varepsilon\|\psi_x\|^2 + b_1\|u_x\|^2 + \|\phi\|^2 + \lambda\|\omega - v\|^2.$$

Proposição

A energia total do sistema (7) *é definida por*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\varepsilon(t) &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[|\varphi|^2 + \alpha|v_x|^2 + \lambda|\omega - v|^2 + |\psi|^2 + \varepsilon|\psi_x|^2\right] dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^L \left[|\phi|^2 + b_1\left|u_x + \frac{1}{2}\omega_x^2\right|^2 + b_2|\omega_{xx}|^2\right] dx\end{aligned}$$

e satisfaz

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\varepsilon(t) = -\mu_1\int_0^L |\varphi|^2 dx - \mu_2\int_0^L |\psi|^2 dx - \mu_3\int_0^L |\phi|^2 dx. \quad (10)$$

Existência e unicidade de solução

Introduzimos três novas variáveis dependentes $v_t = \varphi$, $\omega_t = \psi$ e $u = \phi_t$ e transformamos o sistema (7) no seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} BU_t = \mathcal{A}U + \mathcal{F}(U), \\ U(0) = U_0, \quad , \forall\ t > 0, \end{cases} \tag{11}$$

onde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(1 - \varepsilon \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ w \\ \psi \\ u \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \alpha v_{xx} + \lambda(\omega - v) - \mu_1 \varphi \\ \psi \\ -b_2 \omega_{xxxx} - \lambda(\omega - v) - \mu_2 \psi \\ \phi \\ b_1 u_{xx} - \mu_3 \phi \end{pmatrix},$$

e $\mathcal{F}$ é o operador não linear dado

$$\mathcal{F}(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2}\omega_x^2 \right) \omega_x \right]_x \\ 0 \\ \frac{b_1}{2} \left[\omega_x^2 \right]_x \end{pmatrix}.$$

Existência e unicidade de solução

O domínio de $B^{-1}\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{D}(B^{-1}\mathcal{A}) = \left((v,\, \varphi,\, \omega,\, \psi,\, u,\, \phi)^T \in \mathcal{H} \;\middle|\; \begin{array}{l} v \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L), \\ \varphi \in H_0^2(0,L), \\ \omega \in H^4(0,L) \cap H_0^2(0,L), \\ \psi \in H_0^2(0,L), \\ u \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L) \\ \phi \in H_0^1(0,L). \end{array} \right)$$

Observação

Claramente o domínio $B^{-1}\mathcal{A}$ é denso no espaço de fase $\mathcal{H}$.

A ideia principal é mostrar que o operador $B^{-1}\mathcal{A}$ gera um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$ e que a perturbação $B^{-1}\mathcal{F}$ é localmente Lipschitz, então usando resultados abstratos sobre a geração de semigrupos não lineares vamos concluir a existência de um semigrupo não linear em $\mathcal{H}$. Mostramos que a existência de soluções fracas para (3)-(5) pode ser obtida através de um processo de regularização e depois passando o limite em (7)-(9).

Existência e unicidade de solução

Teorema

O operador $B^{-1}\mathcal{A}$ gera um C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{B^{-1}\mathcal{A}t}$ em $\mathcal{H}$.

Lema

O operador $B^{-1}\mathcal{F}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ é um operador contínuo localmente Lipschitz em $\mathcal{H}$, isto é,

$$\|B^{-1}\mathcal{F}(U)-B^{-1}\mathcal{F}(\widetilde{U})\|_{\mathcal{H}}\leq C(R)\|U-\widetilde{U}\|_{\mathcal{H}},$$

tal que $\|U\|_{\mathcal{H}},\ \|\widetilde{U}\|_{\mathcal{H}}\leq R$, onde $R>0$.

Teorema

Se $U_0 \in \mathcal{H}$, então o problema

$$\begin{cases} BU_t = \mathcal{A}U + \mathcal{F}(U), \\ U(0) = U_0, \quad , \forall\, t > 0, \end{cases}$$

tem uma única solução

$$U \in C([0, \infty) : \mathcal{H})$$

com $U(0) = U_0$. Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(B^{-1}\mathcal{A})$ a solução fraca é uma solução forte globalmente definida.

Limite assintótico quando $\varepsilon \to 0$

Seja $(\omega^\varepsilon, u^\varepsilon)$ a solução de (7)-(9), esta solução satisfaz a formulação variacional

$$\frac{d}{dt}(v_t^\varepsilon, \varphi) + \frac{d}{dt}(\omega_t^\varepsilon, \psi) + \frac{d}{dt}(u_t^\varepsilon, \phi) + \varepsilon\frac{d}{dt}(\omega_{xt}^\varepsilon, \psi_x) + \alpha(v_x^\varepsilon, \varphi_x) \tag{12}$$
$$+ b_2(\omega_{xx}^\varepsilon, \psi_{xx}) + \lambda((\omega_-^\varepsilon v^\varepsilon), (\psi - \varphi)) + \mu_1(\varphi^\varepsilon, \varphi) + \mu_2(\psi^\varepsilon, \psi)$$
$$+ \mu_3(\phi^\varepsilon, \phi) + b_1\left((u_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(\omega_x^\varepsilon)^2)\omega_x^\varepsilon, \psi_x\right) + b_1\left(u_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(\omega_x^\varepsilon)^2, \phi_x\right) = 0.$$

Passamos ao limite, como $\varepsilon \to 0$, na equação (12) para obter uma solução fraca para (3)-(5).

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Theorem

Seja $(v,\, \omega,\, u)$ *uma solução de* (3)-(5) *onde os dados iniciais são dados em* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. *Então, a energia* $\mathcal{E}(t)$ *satisfaz*

$$\mathcal{E}(t) \leq C\mathcal{E}(0)e^{-\beta t}, \quad \beta, C > 0, \quad \textit{para todo } t > 0.$$

Referências

- J. E. Lagnese and J. L. Lions, Modelling Analysis and Control of Thin Plates. Recherches en Mathématiques Appliquées 6, Masson, Paris, 1988.
- F. D. Araruna, P. Braz e Silvay, E. Zuazuaz. Addendum to "Asymptotic limits and stabilization for the 1D nonlinear Mindlin-Timoshenko system". J. Syst. Sci. Complex., 2010, 23: 414-430
- F. D. Araruna, P. Braz e Silva and E. Zuazua, Asymptotic limits and stabilization for The 1D nonlinear Mindlin-Timoshenko System, J. Syst. Sci. Complex., 2010, 23: 414-430.
- A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to PDE's, Applied Mathematical Sciences 44, Springer, New York, 1986.
- C. Raposo, L. Correia, J. Ribeiro, A. Cunha. Suspension bridge with internal damping. Acta Mech. (2023) 1-12.

OBRIGADA!