PONTE SUSPENSA COM AMORTECIMENTO INTERNO DO TIPO DERIVADA FRACIONÁRIA

Rafael Oliveira de Jesus

IX ENCONTRO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UFBA

(Universidade Federal da Bahia)

22/11/2023

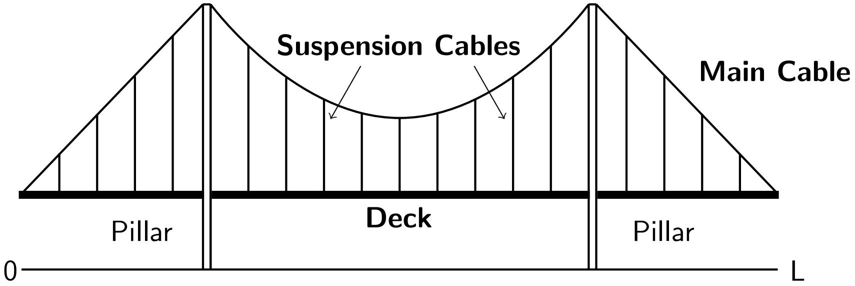
Resumo

Neste trabalho estudamos a boa colocação e o decaimento polinomial da solução de um sistema de ponte suspensa com deck modelado pela teoria de vigas de Timoshenko-Ehrenfest, e sob ação de dissipações internas do tipo derivada fracionária.

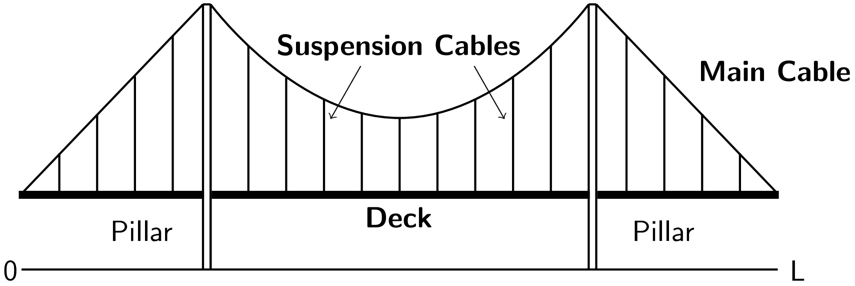
Resumo

Neste trabalho estudamos a boa colocação e o decaimento polinomial da solução de um sistema de ponte suspensa com deck modelado pela teoria de vigas de Timoshenko-Ehrenfest, e sob ação de dissipações internas do tipo derivada fracionária. A boa colocação foi obtida via o Teorema de Lumer-Phillips e o decaimento polinomial aplicando o Teorema de Borichev-Tomilov.

Introdução



Introdução



$$
\begin{aligned}
u_{tt} - a u_{xx} - \tau(\phi - u) &= 0, \\
\rho_1 \phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x + \tau(\phi - u) &= 0, \\
\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) &= 0.
\end{aligned}
$$

Introdução

Assume-se que os cabos de suspensão são molas elásticas lineares com uma rigidez padrão $\tau > 0$. A constante $a > 0$ é o módulo de elasticidade da corda (que prende o cabo principal ao convés). Os coeficientes positivos ρ_1 e ρ_2 são a densidade da massa e o momento de inércia da viga, respetivamente. Além disso, b representa o coeficiente de rigidez da secção transversal e k representa o módulo de elasticidade do material do deck.

Introdução

Assume-se que os cabos de suspensão são molas elásticas lineares com uma rigidez padrão $\tau > 0$. A constante $a > 0$ é o módulo de elasticidade da corda (que prende o cabo principal ao convés). Os coeficientes positivos ρ_1 e ρ_2 são a densidade da massa e o momento de inércia da viga, respetivamente. Além disso, b representa o coeficiente de rigidez da secção transversal e k representa o módulo de elasticidade do material do deck.

MODELO AMORTECIDO:

$$u_{tt} - au_{xx} - \tau(\phi - u) + c_1\partial_t^{\alpha,\eta}u = 0, \tag{1}$$

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x + \tau(\phi - u) + c_2\partial_t^{\beta,\zeta}\phi = 0, \tag{2}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + c_3\partial_t^{\theta,\xi}\psi = 0. \tag{3}$$

Intodução

onde $\partial_t^{\omega,\delta}$ é o operador integro-diferencial fracionário de Caputo exponencialmente modificado de ordem ω e peso δ, definido por:

$$\partial_t^{\omega,\delta} f(t) = \mathcal{I}^{1-\omega,\delta} f'(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\omega)} \int_0^t e^{-\delta(t-s)}(t-s)^{-\omega} f'(s)ds,$$

com $0 < \omega < 1$, $\delta \geq 0$ e $f \in W^{1,1}([0,+\infty))$.

Modelo Ampliado

Lema 1

Sejam $p(y) = |y|^{\frac{2\omega-1}{2}}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad 0 < \omega < 1.$
A relação entre a entrada $\mathcal{U}$ *e a saída* $\mathcal{O}$ *do seguinte sistema*

$$\begin{cases} \varphi_t(t,y) + (|y|^2 + \delta)\varphi(t,y) = p(y)\mathcal{U}(t), \\ \varphi(0,\, y) = 0, \\ \mathcal{O}(t) = \gamma \displaystyle\int_{\mathbb{R}} p(y)\varphi(t,y)dy, \end{cases}$$

onde $\mathcal{U} \in C([0,\, +\infty))$, *e* $\gamma = \dfrac{\sin \omega\pi}{\pi} = \dfrac{1}{\Gamma(\omega)\Gamma(1-\omega)}$, *é dada por:*

$$\mathcal{O}(t) = I^{1-\omega,\,\delta}\mathcal{U}(t).$$

Modelo Ampliado

$$u_{tt} - au_{xx} - \tau(\phi - u) + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y)\varphi_1(y)dy = 0, \tag{4}$$

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x + \tau(\phi - u) + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y)\varphi_2(y)dy = 0, \tag{5}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} r(y)\varphi_3(y)dy = 0, \tag{6}$$

$$(\varphi_1)_t(y) + (|y|^2 + \eta)\varphi_1(y) - p(y)u_t = 0, \tag{7}$$

$$(\varphi_2)_t(y) + \left(|y|^2 + \zeta\right)\varphi_2(y) - q(y)\phi_t = 0, \tag{8}$$

$$(\varphi_3)_t(y) + \left(|y|^2 + \xi\right)\varphi_3(y) - r(y)\psi_t = 0. \tag{9}$$

Energia do Modelo Ampliado

A *energia* do sistema ampliado é dada por:

$$
\begin{aligned}
E(t) = {} & \frac{a}{2}\int_0^L |u_x(x,t)|^2 dx + \int_0^L \frac{\tau}{2}|(\phi - u)(x,t)|^2 dx \\
& + \frac{k}{2}\int_0^L |(\phi_x + \psi)(x,t)|^2 dx + \frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x(x,t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L |u_t(x,t)|^2 dx \\
& + \frac{\rho_1}{2}\int_0^L |\phi_t(t)|^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\int_0^L |\psi_t(x,t)|^2 dx + \frac{\gamma_1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^L |\varphi_1(x,t,y)|^2 dxdy \\
& + \frac{\gamma_2}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^L |\varphi_2(x,t,y)|^2 dxdy + \frac{\gamma_3}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^L |\varphi_3(x,t,y)|^2 dxdy.
\end{aligned}
$$

Energia do Modelo Ampliado

A energia E satisfaz

$$
\begin{aligned}
E'(t) = &-\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (|y|^2 + \eta)|\varphi_1(x,t,y)|^2 dxdy \\
&- \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (|y|^2 + \zeta)|\varphi_2(x,t,y)|^2 dxdy \\
&- \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (|y|^2 + \theta)|\varphi_2(x,t,y)|^2 dxdy.
\end{aligned}
$$

Formulação do Semigrupo Associado

$$\mathcal{H} = [H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^3 \times [L^2(\mathbb{R};\ L^2(0,\ L))]^3$$

munido do seguinte produto interno

$$\begin{aligned}
\langle U,\ \widetilde{U}\rangle_{\mathcal{H}} \quad &= \quad a\langle u, \widetilde{u}\rangle_{H_0^1(0,L)} + \langle v, \widetilde{v}\rangle_{L^2(0,L)} + \rho_1\langle w,\ \widetilde{w}\rangle_{L^2(0,\ L)} + \rho_2\langle z,\ \widetilde{z}\rangle_{L^2(0,\ L} \\
&\quad + b\langle \psi,\ \widetilde{\psi}\rangle_{H_0^1(0,L)} + \tau\langle \phi - u, \widetilde{\phi} - \widetilde{u}\rangle_{L^2(0,L)} + k\langle \phi_x + \psi,\ \widetilde{\phi}_x + \widetilde{\psi} \\
&\quad + \gamma_1\langle \varphi_1,\ \widetilde{\varphi_1}\rangle_{L^2(\mathbb{R};\, L^2(0,\, L))} + \gamma_2\langle \varphi_2,\ \widetilde{\varphi_2}\rangle_{L^2(\mathbb{R};\, L^2(0,\, L))} \\
&\quad +\gamma_3\langle \varphi_3,\ \widetilde{\varphi_3}\rangle_{L^2(\mathbb{R};\, L^2(0,\, L))},
\end{aligned}$$

onde $U = (u,\ v,\ \phi,\ w,\ \psi,\ z,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_2)$ e
$\widetilde{U} = (\widetilde{u},\ \widetilde{v},\ \widetilde{\phi},\ \widetilde{w},\ \widetilde{\psi},\ \widetilde{z},\ \widetilde{\varphi_1},\ \widetilde{\varphi_2},\ \widetilde{\varphi_3})$.

Formulação do Semigrupo Associado

Fazendo $u_t = v$, $\phi_t = w$ e $\psi_t = z$, podemos reescrever o problema ampliado na forma de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{c} U_t - \mathcal{A}U = 0, \\ U(0) = U_0, \end{array} \right. \tag{10}$$

onde $U_0 = (u_0,\, u_1,\, \phi_0,\, \phi_1,\, \psi_0,\, \psi_1,\, 0,\, 0,\, 0)$ e

$$\mathcal{A} \,:\, D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

é o operador definido por

Formulação do Semigrupo Associado

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ au_{xx} + \tau(\phi - u) - \gamma_1 \displaystyle\int_{\mathbb{R}} p(y)\varphi_1(y)dy \\ w \\ \dfrac{1}{\rho_1}\left[k(\phi_x + \psi)_x - \tau(\phi - u) - \gamma_2 \displaystyle\int_{\mathbb{R}} q(y)\varphi_2(y)dy\right] \\ z \\ \dfrac{1}{\rho_2}\left[b\psi_{xx} - k(\phi_x + \psi) - \gamma_3 \displaystyle\int_{\mathbb{R}} r(y)\varphi_3(y)dy\right] \\ -(|y|^2 + \eta)\varphi_1(y) + p(y)v \\ -(|y|^2 + \zeta)\varphi_2(y) + q(y)w \\ -(|y|^2 + \xi)\varphi_3(y) + r(y)z \end{pmatrix}.$$

Boa-Colocação

Theorem 1 (Existência e Unicidade de Solução)

Se $U_0 \in \mathcal{H}$, *o prolema de Cauchy* (10) *admite uma única solução fraca* $U \in C\left([0, +\infty); \mathcal{H}\right)$, *dada por* $U(t) = e^{t\mathcal{A}}U_0$.

Para $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, *a solução encontrada é uma solução forte com a seguinte regularidade*

$$U \in C\left([0, +\infty); \mathcal{D}(\mathcal{A})\right) \cap C^1\left([0, +\infty); \mathcal{H}\right).$$

Esboço da Demonstração

Utilizar o Teorema de Lumer-Phillips para provar que o operador $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração.

Esboço da Demonstração

Utilizar o Teorema de Lumer-Phillips para provar que o operador $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração.

1

$$
\begin{aligned}
Re\langle \mathcal{A}U,\, U\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; & -\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (|y|^2+\eta)|\varphi_1(x,y)|^2 dxdy \\
& -\gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (|y|^2+\zeta)|\varphi_2(x,y)|^2 dxdy \\
& -\gamma_3 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (|y|^2+\xi)|\varphi_3(x,y)|^2 dxdy \le 0.
\end{aligned}
$$

Esboço da Demonstração

Utilizar o Teorema de Lumer-Phillips para provar que o operador $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração.

1

$$\begin{aligned} Re\langle \mathcal{A}U,\ U\rangle_{\mathcal{H}} &= -\gamma_1 \int_{\mathbb{R}}\int_0^L (|y|^2+\eta)|\varphi_1(x,y)|^2 dxdy \\ &\quad -\gamma_2 \int_{\mathbb{R}}\int_0^L (|y|^2+\zeta)|\varphi_2(x,y)|^2 dxdy \\ &\quad -\gamma_3 \int_{\mathbb{R}}\int_0^L (|y|^2+\xi)|\varphi_3(x,y)|^2 dxdy \leq 0. \end{aligned}$$

2 $\mathcal{I}-\mathcal{A}$ é sobrejetivo.

Comportamento Assintótico

Proposição 1

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$ *é injetivo.*

Comportamento Assintótico

Proposição 1

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$ *é injetivo.*

Proposição 2

Se $\eta = 0$ *ou* $\zeta = 0$ *ou* $\xi = 0$ *então o operador* $\mathcal{A}$ *não é invertível e consequentemente* $0 \in \sigma(\mathcal{A})$.

Comportamento Assintótico

Proposição 1

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$ *é injetivo.*

Proposição 2

Se $\eta = 0$ *ou* $\zeta = 0$ *ou* $\xi = 0$ *então o operador* $\mathcal{A}$ *não é invertível e consequentemente* $0 \in \sigma(\mathcal{A})$.

Proposição 3

(a) *Se* $\eta = 0$ *ou* $\zeta = 0$ *ou* $\xi = 0$, *então* $i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$ *é sobrejetivo, para* $\lambda \neq 0$.

(b) *Se* $\eta, \zeta, \xi > 0$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$ *é sobrejetivo.*

Falta de decaimento Exponencial

Theorem 2 (Gearhart-Prüss-Huang [3])

Seja $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo de contração sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ é gerado pelo operador $\mathcal{A}$, então $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se

$$\varrho(\mathcal{A}) \supset i\mathbb{R} \quad e \quad \limsup_{|\lambda|\to+\infty} \|(i\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Estabilidade Forte

Theorem 3 (Arendt-Batty [1], Lyubich-Vũ [4])

Seja $\mathcal{A}$ o gerador de um C_0 semigrupo de contrações $(e^{t\mathcal{A}})_{t\geq 0}$ em um espaço de Banach reflexivo X. Se as seguintes condições são satisfeitas

(i) *$\mathcal{A}$ não possui autovalores imaginários puros;*

(ii) *$\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ é enumerável.*

então , $(e^{t\mathcal{A}})_{t\geq 0}$ é fortemente estável. Isto é

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{t\mathcal{A}}x\| = 0; \ \forall x \in X.$$

Estabilidade Polinomial

Theorem 4 (Borichev-Tomilov [2])

Seja $(e^{t\mathcal{A}})_{t\geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo de contrações sobre um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *tal que* $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$*. Então* $(e^{t\mathcal{A}})_{t\geq 0}$ *é polinomialmente estável, isto é: para cada* $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$,

$$\|e^{t\mathcal{A}}x\| \leq \frac{C}{t^{\omega}}\|x\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})};\ \forall t \geq 0, \tag{11}$$

for some $C > 0$ *and for* $\omega > 0$,
se, e somente se,

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \frac{1}{|\lambda|^{1/\omega}} \left\|(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$$

Estabilidade Polinomial

Theorem 5

Para $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $\eta, \zeta, \xi > 0$, o C_0-semigrupo $(e^{t\mathcal{A}})_{t\geq 0}$ é polinomialmente estável. Mais precisamente

$$||e^{t\mathcal{A}}U_0|| \leq \frac{C}{t^{\omega}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \ \ t > 0,$$

onde $1/\omega = 6 - 2\max\{\alpha, \beta, \theta\}$.

Bibliografia

- Arendt, W., Batty, C. J. K.: Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups. *Trans. Am. Math. Soc.* **306**(2), 837–852 (1988).
- Borichev, A., Tomilov, Y.: Optimal polynomial decay of function and operator semigroups. *Math. Ann.* **347**, 455–478 (2010)
- Gearhart, L.: Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **236**, 385–394 (1978)
- Lyubich, I. Y. Vu, , Q. P.: Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces. *Stud. Math.* **88**(1), 37–42 (1988)
- Raposo, C., Correia, L., Ribeiro, J. and Cunha, A.: Suspension bridge with internal damping. *Acta. Math.* (2023) https://doi.org/10.1007/s00707-023-03744-7