Submersão Finsleriana

Glaene S S Mendonça
Universidade Federal da Bahia

IX Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
18 de novembro de 2024

Contéudos

1. Norma Minkowski;
2. Propriedades;
3. Exemplos;
4. Submersão Finsleriana;
5. Caracterização Randers;
6. Problema de pesquisa.

Definição

Uma norma de Minkowski em um espaço vetorial finito dimensional é uma função positiva e contínua $F : V \to [0, \infty)$ tal que

1. $F(\lambda v) = \lambda F(v), \forall \lambda > 0$
2. $F|_{V \setminus 0}$ *é suave; e*
3. *para qualquer $v \neq 0$ o tensor fundamental dado por*

$$g_v(u, w) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dtds}|_{t,s=0} F^2(v + tu + sw) \tag{1}$$

para qualquer $u, w \in V$ é positivamente definido.

Seja (V, F) espaço de Minkowski. Valem as seguintes propriedades:

- (Positividade) $F(v) \geq 0$ e $F(v) = 0$ se e somente se $v = 0$;
- (Desigualdade triangular) $F(u + v) \leq F(u) + F(v)$;
- (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) $g_v(v, u) \leq F(v)F(u)$.

Exemplo (1)

Uma métrica Randers em um espaço de Minkowski V é aplicação

$$R : V \to [0, \infty)$$

definida por

$$R(v) = \alpha(v) + \beta(v)$$

onde α é uma norma euclidiana e β é um funcional linear tal que $||\beta||_\alpha \leq 1$.

Exemplo (1)

Uma métrica Randers em um espaço de Minkowski V é aplicação

$$R : V \to [0, \infty)$$

definida por

$$R(v) = \alpha(v) + \beta(v)$$

onde α é uma norma euclidiana e β é um funcional linear tal que $||\beta||_{\alpha} \leq 1$.

Observação: Uma Métrica Randers $Z : V \to [0, +\infty)$ é *Zermelo* com data (h, W) se Z é solução de

$$h(\frac{v}{Z(v)} - w, \frac{v}{Z(v)} - w) = 1$$

onde h é um produto interno e w é um vetor com $h(w, w) < 1$.

Exemplo (2)

Sejam α uma norma euclidiana, β uma funcional linear e ϕ uma função positiva. A função

$$F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha}) \tag{2}$$

é uma norma de Minkowski se, e somente se,

$$(\phi(s) - s\phi'(s)) + (b^2 - s^2)\phi''(s) > 0, \tag{3}$$

para quaisquer s,b tais que $|s| \leq b < \alpha^*(\beta)$. Neste caso, F é dita $(\alpha, \beta)-$norma.

A função distância é definida por

$$\begin{array}{rcl} d : V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (p, q) & \mapsto & F(q - p) \end{array}$$

Propriedades:

- $d(p, q) \geq 0$;
- $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$;
- $d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q)$.

Em geral, um espaço de Minkowski (V, F) a distância entre dois pontos não é simétrica. Assim, dado um ponto $p \in M$ e $r > 0$ definamos:

Bola Futura: $B^{+}(p, r) := \{q \in M : F(p - q) < r\}$;

Bola Passada: $B^{-}(p, r) := \{q \in M : F(q - p) < r\}$.

Nesta comunicação vamos considerar a **Bola Futura**.

Definição

Uma submersão linear $\pi : (V_1, F_1) \to (V_2, F_2)$ *entre espaços de Minkowski é uma submersão finsleriana se:*

$$\pi_p(B_p(0,1)) = B_{\pi(p)}(0,1)$$

onde $B_p(0,1)$ *e* $B_{\pi(p)}(0,1)$ *são bolas unitárias dos espaços de Minkowski* (V_1, F_1) *e* (V_2, F_2) *respectivamente.*

Definição

Sejam (V, F) espaço de Minkowski e $L < V$ dizemos que v é ortogonal a L se

$$g_v(v, u) = 0; \forall u \in L.$$

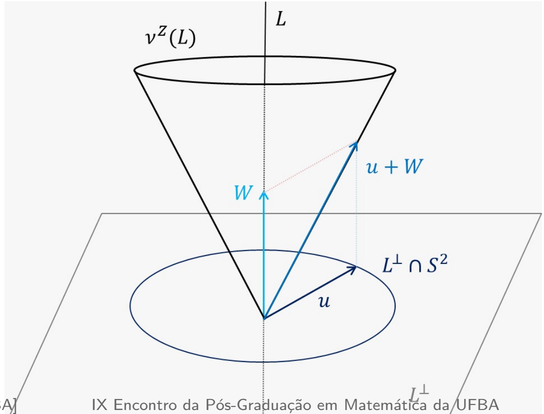
O cone ortogonal a L é o conjunto do vetores ortogonais a L. Denotaremos por $\nu(L)$.

Definição

Sejam (V, F) espaço de Minkowski e $L < V$ dizemos que v é ortogonal a L se

$$g_v(v, u) = 0; \forall u \in L.$$

O cone ortogonal a L é o conjunto do vetores ortogonais a L. Denotaremos por $\nu(L)$.



Observação $\pi : (V_1, F_1) \to (V_2, F_2)$ é uma submersão finsleriana então para todo $w \in V_2$ vale:

$$F_2(w) = inf \{F_1(v) : v \in V_1 \text{ e } \pi_p(v) = w\}$$

Em particular, $F_2(\pi(v)) \leq F_1(v); \forall v \in V_1$.

Quando temos a igualdade, dizemos que v é um *vetor horizontal* e o espaço dos vetores horizontais é o *cone horizontal*.

Observação $\pi : (V_1, F_1) \to (V_2, F_2)$ é uma submersão finsleriana então o cone horizontal em p coincide com o cone ortogonal a fibra de π passando por p adicionando o vetor nulo.

Teorema

Uma submersão linear $\pi : (M, F_1) \to (B, F_2)$ é Finsleriana se, e somente, se,

$$F_2(\pi(v)) = F_1(v)$$

para todo v vetor horizontal.

Caracterização Randers

Teorema

Seja $\pi : (V_1, Z_1) \to (V_2, Z_2)$ submersão linear com Z_1 norma Randers com data de navegação (h_1, w_1).
Então, π é submersão finsleriana se , e somente se, Z_2 é uma métrica Randers com data de navegação (α_2, w_2), onde

1. $w_2 = \pi(w_1)$; *e*
2. α_2 *é a única norma euclidiana tal que* $\pi : (V_1, \alpha_2) \to (V_2, \alpha_2)$ *é uma submersão Riemanniana.*

Para demonstração ver [1].

Problema de Pesquisa

Problema

O que acontece se no teorema anterior pegassemos uma métrica (α, β) em cima?

Referências Bibliográficas

Alexandrino, Marcos M., Benigno O. Alves, and Miguel Angel Javaloyes. "On singular Finsler foliation."Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-) 198.1 (2019): 205-226.

Álvarez Paiva, J., and Carlos Durán. "Isometric submersions of Finsler manifolds."Proceedings of the American Mathematical Society 129.8 (2001): 2409-2417.

OBRIGADO!