Ponte Suspensa com Amortecimento Viscoelástico do Tipo Kevin-Voigt

Leandro C. Araújo[1,2]

Orientador: Carlos Raposo[2]
Co-orientador: Joilson Ribeiro[2]

[1] Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

[2] Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística

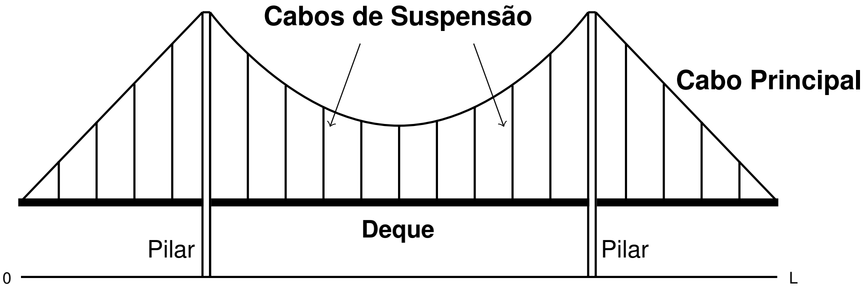
Novembro / 2024

Vigas são estruturas quase onipresentes na construção civil, de modo que torna-se fundamental o emprego de modelos matemáticos para a análise do comportamento de tais estruturas. A primeira teoria, a teoria clássica de vigas, é proposta por Daniel Bernoulli e Euler no século 18, como continuidade de estudos realizados por Jakob Bernoulli. Devido à sua praticidade de aplicação, esse modelo ainda é amplamente utilizado, porém possui limitações por não considerar efeitos de cisalhamento.

No início do século 20, mais precisamente entre 1911 e 1912, Stephen Timoshenko e Paul Ehrenfest deduziram um modelo de viga que leva em consideração o ângulo de rotação e o efeito de cisalhamento, o qual foi publicado em 1921, (Timoshenko, 1921). Usaremos a teoria unidimensional de Timoshenko para estudar o comportamento de uma ponte pênsil.

Considerando a extensão do vão, as pontes suspensas são maiores do que qualquer outro tipo de ponte.

Figura: Ponte Suspensa



Fonte: Raposo, Correia, Ribeiro e Cunha (2023)

Consideraremos que o deque tem largura e espessura de dimensões desprezíveis quando comparadas ao comprimento (vão) da ponte, sendo modelada pela teoria unidimensional de Timoshenko como uma viga de comprimento L, veja Timoshenko (1921). Como em Mukiawa, Enyi e Messaoudi (2023), vamos denotar por $\varphi = \varphi(x, t)$ o deslocamento da seção transversal no ponto $x \in (0, L)$, por $\psi = \psi(x, t)$ o ângulo de rotação da seção transversal e os cabos suspensos serão considerados molas elásticas lineares com rigidez padrão $\lambda > 0$.

A constante $\alpha > 0$ é o módulo de elasticidade da corda (segurando o cabo principal ao deque). Os coeficientes positivos ρ_1 e ρ_2 são as densidades de massa e momento de massa inercia da viga, respectivamente. Mais ainda, *b* representa o coeficiente de rigidez da seção transversal, e *k* representa o módulo de cisalhamento da elasticidade. Finalmente, a constante $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$ são os coeficientes da força de amortecimento.

Obtemos então o seguinte sistema, o qual conta com amortecimento do tipo Kelvin-Voigt, para o qual mostraremos a existência e unicidade de soluções e a analiticidade.

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) - \gamma_1 u_{txx} = 0 \tag{1}$$

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) - \gamma_2 \varphi_{txx} = 0 \tag{2}$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \gamma_3 \psi_{txx} = 0 \tag{3}$$

O sistema (1)-(3) está sujeito às condições iniciais

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x), \; x \in (0,L),\\
\varphi(x,0) &= \varphi_0(x), \;\; \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \; x \in (0,L),\\
\psi(x,0) &= \psi_0(x), \;\; \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \; x \in (0,L),
\end{aligned}
$$

e às condições de Contorno de Dirichlet,

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= u(L,t) = 0, \; t \geq 0,\\
\varphi(0,t) &= \varphi(L,t) = 0, \; t \geq 0,\\
\psi(0,t) &= \psi(L,t) = 0, \; t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Para determinar a energia do sistema, vamos multiplicar a primeira equação do sistema por u_t, o que nos dá

$$u_t u_{tt} - \alpha u_t u_{xx} - \lambda u_t(\varphi - u) - \gamma_1 u_t u_{txx} = 0$$

Integrando em $(0, L)$ e fazendo integração por partes, temos que

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{d}{dt}\frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_x|^2 dx - \lambda \int_0^L u_t(\varphi - u) dx$$
$$= -\gamma_1 \int_0^L |u_{tx}|^2 dx$$

Ao multiplicar a segunda equação por φ_t, temos

$$\rho_1\varphi_t\varphi_{tt} - k\varphi_t(\varphi_x + \psi)_x + \lambda\varphi_t(\varphi - u) - \gamma_2\varphi_t\varphi_{txx} = 0$$

Integrando em $(0, L)$, fazendo integração por partes e usando as condições de contorno, temos

$$\frac{d}{dt}\frac{\rho_1}{2}\int_0^L |\varphi_t|^2 dx + k\int_0^L \varphi_{tx}(\varphi_x + \psi)dx + \lambda\int_0^L \varphi_t(\varphi - u)dx$$
$$= -\int_0^L \gamma_2|\varphi_{tx}|^2 dx$$

Por fim, a terceira equação será multiplicada por ψ_t,

$$\rho_2\psi_t\psi_{tt} - b\psi_t\psi_{xx} + \lambda\psi_t(\varphi_x + \psi) - \gamma_3\psi_t\psi_{txx} = 0$$

Novamente, vamos integrar em $(0, L)$ e aplicando integral por partes e as condições de contorno, resulta em

$$\rho_2\int_0^L \psi_t\psi_{tt}dx - b\int_0^L \psi_t\psi_{xx}dx + \lambda\int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi)dx$$
$$= \int_0^L \gamma_3\psi_t\psi_{txx}dx$$

Sendo assim, somando as três equações, obtemos que

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \left[|u_t|^2 + \alpha|u_x|^2 + b|\psi_x|^2 + \rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \lambda|\varphi - u|^2 + k|\varphi_x + \psi|^2\right] dx$$
$$= -\gamma_1\int_0^L |u_{tx}|^2 dx - \int_0^L \gamma_2|\varphi_{tx}|^2 dx - \int_0^L \gamma_3|\psi_{tx}|^2 dx$$

Definimos a energia $E(t)$ do sistema por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L [|u_t|^2+\alpha|u_x|^2+b|\psi_x|^2+\rho_1|\varphi_t|^2+\rho_2|\psi_t|^2+\lambda|\varphi-u|^2+k|\varphi_x+\psi|^2]dx$$

Proposition 1

A energia $E(t)$ definida acima satisfaz a

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\gamma_1\int_0^L |u_{tx}|^2 dx - \int_0^L \gamma_2|\varphi_{tx}|^2 dx - \int_0^L \gamma_3|\psi_{tx}|^2 dx.$$

Considerando $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)^T$, onde $u_t = v, \varphi_t = w$ e $\psi_t = z$, podemos reescrever o sistema (1)-(3) como,

$$U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \varphi_t \\ w_t \\ \psi_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \alpha u_{xx} + \lambda(\varphi - u) - \gamma_1 v_{xx} \\ w \\ \dfrac{1}{\rho_1}\left[k(\varphi_x + \psi)_x - \lambda(\varphi - u) - \gamma_2 w_{xx}\right] \\ z \\ \dfrac{1}{\rho_2}\left[b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \gamma_3 z_{xx}\right] \end{pmatrix} = \mathcal{A}U.$$

Assim, o sistema (1)-(3) torna-se um problema de evolução de Cauchy de primeira ordem,

$$\begin{cases} U_t - \mathcal{A}U = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4}$$

onde

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

é um operador linear ilimitado no espaço

$$\mathcal{H} = [H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)]^3$$

com domínio $D(\mathcal{A}) = [H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \times H_0^1(0,L)]^3$, o qual é denso em $\mathcal{H}$.

Semigrupo

Em $\mathcal{H}$ definimos o seguinte produto interno,

$$\langle U, \tilde{U}\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L v\overline{\tilde{v}}dx + \alpha\int_0^L u_x\overline{\tilde{u}}_x dx + \rho_1\int_0^L w\overline{\tilde{w}}dx + \rho_2\int_0^L z\overline{\tilde{z}}dx + b\int_0^L \psi_x\overline{\tilde{\psi}}_x$$
$$+ \lambda\int_0^L(\varphi - u)(\overline{\tilde{\varphi}} - \overline{\tilde{u}})dx + k\int_0^L(\varphi_x + \psi)(\overline{\tilde{\varphi}}_x + \overline{\tilde{\psi}})dx.$$

Com $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$, $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e temos $\|U\|^2_{\mathcal{H}} = \langle U, U\rangle_{\mathcal{H}}$.

Para a existência de solução usaremos o seguinte resultado:

Teorema 1 (Lummer-Phillips)

Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso no espaço de Banach X. Se

i) *A é dissipativo, isto é, $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0$, para todo $x \in D(A)$;*

ii) *Existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem $R(\lambda_0 I - A)$, de $\lambda_0 I - A$ é X.*

Então A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X.

Demonstração.

Veja (Pazy, 1983). $\square$

Lema 2

O operador $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Demonstração.

Seja $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)^T \in D(\mathcal{A})$, então segue de cálculo direto que,

$$\Re\mathfrak{e}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma_1 \int_0^L |v_x|^2 dx - \gamma_2 \int_0^L |w_x|^2 dx - \gamma_3 \int_0^L |z_x|^2 dx \leq 0.$$

$\square$

Lema 3
$0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Demonstração.
Seja $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6)^T \in \mathcal{H}$ e considere a equação resolvente
$$-AU = F. \tag{5}$$

Em termos das componentes de U e F, podemos escrever

$$- v = f^1 \text{ em } H_0^1(0,L) \tag{6}$$
$$- \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma_1 v_{xx} = f^2 \text{ em } L^2(0,L) \tag{7}$$
$$- w = f_3 \text{ em } H_0^1(0,L) \tag{8}$$
$$- k(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \gamma_2 w_{xx} = f^4 \text{ em } L^2(0,L) \tag{9}$$
$$- z = f^5 \text{ em } H_0^1(0,L) \tag{10}$$
$$- b\psi_{xx} + \lambda(\varphi_x + \psi) + \gamma_3 z_{xx} = f^6 \text{ em } L^2(0,L) \tag{11}$$

$\square$

Usando 6 - 11, chegamos a

$$-\alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) = \gamma_1 f^1_{xx} + f^2 := g_1 \in L^2(0, L) \tag{12}$$

$$-k(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = \gamma_2 f^3_{xx} + f^4 := g_2 \in L^2(0, L) \tag{13}$$

$$-b\psi_{xx} + \lambda(\varphi_x + \psi) = \gamma_3 f^5_{xx} + f^6 := g_3 \in L^2(0, L) \tag{14}$$

Multiplicando 12 por $\tilde{u} \in H_0^1(0, L)$, 13 por $\tilde{\varphi} \in H_0^1(0, L)$ e 14 por $\tilde{\psi} \in H_0^1(0, L)$, ao integrar por partes, temos

$$-\alpha \int_0^L \tilde{u}_x u_x dx - \int_0^L \lambda \tilde{u}(\varphi - u) dx = \int_0^L \tilde{u} g_1 dx \in L^2(0, L) \quad (15)$$

$$-k \int_0^L \tilde{\varphi}_x(\varphi_x + \psi) dx + \lambda \int_0^L \tilde{\varphi}(\varphi - u) dx = \int_0^L \tilde{\varphi} g_2 dx \in L^2(0, L) \quad (16)$$

$$-b \int_0^L \tilde{\psi}_x \psi_x dx + \lambda \int_0^L \tilde{\psi}(\varphi_x + \psi) dx = \int_0^L \tilde{\psi} g_3 dx \in L^2(0, L) \quad (17)$$

Somando 15, 16 e 17, obtemos um problema variacional

$$B((u,\varphi,\psi);(\tilde{u},\tilde{\varphi},\tilde{\psi})) = L((\tilde{u},\tilde{\varphi},\tilde{\psi})). \tag{18}$$

Onde, $B : [H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)]^2 \to \mathbb{C}$, dado por

$$\begin{aligned} B((u,\varphi,\psi);(\tilde{u},\tilde{\varphi},\tilde{\psi})) =& \alpha \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx + \lambda \int_0^L (\varphi - u)(\tilde{\varphi} - \tilde{u}) dx \\ & + k \int_0^L (\varphi_x + \psi)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) + b \int_0^L \psi_x \tilde{\psi}_x dx \end{aligned}$$

e $L : [H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)] \to \mathbb{C}$, o qual é dado por

$$L((\tilde{u},\tilde{\varphi},\tilde{\psi})) = \int_0^L \tilde{u} g_1 dx + \int_0^L \tilde{\varphi} g_2 dx + \int_0^L \tilde{\psi} g_3 dx$$

Agora, definindo uma norma em $H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)$ por $||(u,\varphi,\psi)||^2 = B((u,\varphi,\psi);(u,\varphi,\psi))$, temos que nesta norma B é contínua e uma forma bilinear coerciva no espaço $H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)$.
Sendo assim, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única $(u,\varphi,\psi) \in H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)$ que é solução de 18, para todo $(\tilde{u},\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) \in H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)$. Pela teoria de equações elípticas (veja [1], cap 1), 12, 13 e 14 nos guiam a $u,\varphi,\psi \in H^2(0,L)$, isto é, $u,\varphi,\rho \in H_0^1 \cap H^2(0,L)$. Por outro lado, segue de 6, 8 e 10 que $v,w,z \in H_0^1(0,L)$. Logo, $U \in D(\mathcal{A})$ e concluímos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Teorema 4 (Existência e Unicidade)
Seja $U_0 \in \mathcal{H}$, *então existe uma única solução fraca U do problema* (4) *satisfazendo*

$$U \in C^0([0,+\infty);\mathcal{H}). \tag{19}$$

Mais ainda, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, *então*

$$U \in C^0([0,+\infty);D(\mathcal{A})) \cap C^1([0,+\infty);\mathcal{H}). \tag{20}$$

Demonstração.
Pela teoria de semigrupo (Pazy, 1983, p. 100), $U(t) = e^{t\mathcal{A}}U_0$ é a única solução de (4) satisfazendo (19) e (20). $\square$

Teorema 5

Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um C_0-semigrupo de contrações no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Suponha que

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}), \text{ o conjunto resolvente de } \mathcal{A}.$$

Então, $S(t)$ é analítico se, e só se,

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \|\beta(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Demonstração.

Veja Liu e Zheng (2011), theorem 1.3.3, p. 5. $\square$

Teorema 6

Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0-semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e só se,

$$\rho(A) \supset \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} = i\mathbb{R}$$

e

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} ||(i\beta - A)^{-1} < \infty$$

Teorema 7

O operador $\mathcal{A}$ gera um C_0-semigrupo de contrações

$$S(t) = e^{At}, t \geq 0$$

no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Demonstração.

Como $\mathcal{A}$ é dissipativo, densamente definido e $0 \in \rho(\mathcal{A})$, a conclusão segue do Teorema 1. $\square$

Queremos mostrar que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.
Temos que se $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ é falso, então existem θ e uma sequência $\beta^n \to \theta, |\beta^n| < |\theta|$, tal que $||(i\beta^n - A)^{-1}||_{L(\mathcal{H})} \to \infty$ e para todo $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que se $n > n_0$, então $||(i\beta^n - A)^{-1}||_{L(\mathcal{H})} > M$.
Assim, existe $0 \neq y^n \in \mathcal{H}$ de modo que

$$\frac{||(i\beta^n - A)^{-1}y^n||_{\mathcal{H}}}{||y^n||_{\mathcal{H}}} > M.$$

Tomando $g^n = (i\beta^n - A)^{-1}y^n$, podemos escrever

$$\frac{||g^n||_{\mathcal{H}}}{||(i\beta^n - A)g^n||_{\mathcal{H}}} > M.$$

$$\frac{||(i\beta^n - A)g^n||_{\mathcal{H}}}{||g^n||_{\mathcal{H}}} < \frac{1}{M}.$$

Sendo assim, segue que $||(i\beta^n - A)U^n||_{\mathcal{H}} < \dfrac{1}{M}$, com $n > n_0$ e $U^n = \dfrac{g^n}{||g^n||} \in D(\mathcal{A}), ||U^n|| = 1$.

Logo, observamos que

$$||(i\beta^n - A)U^n||_{\mathcal{H}} \to 0 \tag{21}$$

Isto é,

$$i\beta^n u^n - v^n \to 0 \text{ em } H_0^1(0, L) \tag{22}$$

$$i\beta^n v^n - \alpha u_{xx}^n + \lambda(\varphi^n - u^n) + \gamma_1 v_{xx}^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{23}$$

$$i\beta^n \varphi^n - w^n \to 0 \text{ em } H_0^1(0, L) \tag{24}$$

$$i\beta^n w^n - k(\varphi_x^n + \psi^n)_x + \lambda(\varphi^n - u^n) + \gamma_2 w_{xx}^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{25}$$

$$i\beta^n \psi^n - z^n \to 0 \text{ em } H_0^1(0, L) \tag{26}$$

$$i\beta^n z^n - b\psi_{xx}^n + k(\varphi^n + \psi^n) - \gamma_2 z_{xx}^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{27}$$

Agora, note que

$$\langle (i\beta^n - A)U^n, U^n\rangle_{\mathcal{H}} = i\beta^n ||U^n||_{\mathcal{H}} - \langle AU^n, U^n\rangle_{\mathcal{H}}$$

Tomando a parte real, temos

$$\mathrm{Re}\langle (i\beta^n - A)U^n, U^n\rangle_{\mathcal{H}} = \gamma_1 \int_0^L |v_x^n|^2 dx + \gamma_2 \int_0^L |w_x^n|^2 dx + \gamma_3 \int_0^L |z_x^n|^2 dx$$

Como U^n é limitado e $(i\beta^n - A)U^n \to 0$, temos que

$$v_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{28}$$

$$w_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{29}$$

$$z_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{30}$$

Aplicando a Desigualdade de Poincaré, temos que

$$v^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{31}$$

$$w^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{32}$$

$$z^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{33}$$

E substituindo 31 em 22, 32 em 24 e 33 em 26, temos que

$$u^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{34}$$

$$\varphi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{35}$$

$$\psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{36}$$

Observe porém que precisamos que

$$u^n \to 0 \text{ em } H_0^1(0, L) \tag{37}$$

$$\varphi^n \to 0 \text{ em } H_0^1(0, L) \tag{38}$$

$$\psi^n \to 0 \text{ em } H_0^1(0, L) \tag{39}$$

Para isto, note que substituindo 31, 34 e 35 em 23, temos que

$$-\alpha u_{xx}^n + \gamma_1 v_{xx}^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{40}$$

Integrando de 0 a x, chegamos a

$$-\alpha(u_x^n - u_x^n(0)) + \gamma_1(v_x^n - v_x^n(0)) \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{41}$$

Mas por 28, segue que

$$-\alpha(u_x^n - u_x^n(0)) \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{42}$$

Como α é constante, segue da desigualdade de Gagliardo-Niremberg que

$$u_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{43}$$

Analogamente, concluímos que $\varphi_x^n, \psi_x^n \to 0$ em $L^2(0, L)$. Sendo assim, temos que $u^n, \varphi^n, \psi^n \to 0$ em $H_0^1(0, L)$. Mas isso implica que $\|U^n\| \to 0$, uma contradição.

Lemma 2

Temos que $\overline{\lim\limits_{|\beta|\to\infty}} \|(i\beta - A)^{-1}\| < \infty$.

Novamente por contradição, chegamos a 17. Entretanto, agora precisamos de mais cuidado pois $\beta^n \to \infty$. Dividindo por β^n,

$$iu^n - \frac{1}{\beta^n} v^n \to 0 \text{ em } H_0^1(0, L) \tag{44}$$

$$iv^n - \frac{1}{\beta^n}[\alpha u_{xx}^n + \lambda(\varphi^n - u^n) + \gamma_1 v_{xx}^n] \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{45}$$

$$i\varphi^n - \frac{1}{\beta^n} w^n \to 0 \text{ em } H_0^1(0, L) \tag{46}$$

$$iw^n + \frac{1}{\beta^n}[-k(\varphi_x^n + \psi^n)_x + \lambda(\varphi^n - u^n) + \gamma_2 w_{xx}^n] \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{47}$$

$$i\psi^n - \frac{1}{\beta^n} z^n \to 0 \text{ em } H_0^1(0, L) \tag{48}$$

$$iz^n + \frac{1}{\beta^n}[-b\psi_{xx}^n + k(\varphi^n + \psi^n) - \gamma_2 z_{xx}^n] \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{49}$$

Ainda, vale que

$$\mathrm{Re}\left\langle \left(i - \frac{1}{\beta^n} A \right) U^n, U^n \right\rangle_{\mathcal{H}}$$
$$= \frac{\gamma_1}{\beta^n} \int_0^L |v_x^n|^2 dx + \frac{\gamma_2}{\beta^n} \int_0^L |w_x^n|^2 dx + \frac{\gamma_3}{\beta^n} \int_0^L |z_x^n|^2 dx$$

Como U^n é limitado e $\left(i - \frac{1}{\beta^n} A \right) U^n \to 0$, então vale que

$$\frac{v_x^n}{\beta^n} \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{50}$$

$$\frac{w_x^n}{\beta^n} \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{51}$$

$$\frac{z_x^n}{\beta^n} \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{52}$$

Aplicando a Desigualdade de Poincaré, temos que

$$\frac{v^n}{\beta^n} \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{53}$$

$$\frac{w^n}{\beta^n} \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{54}$$

$$\frac{z^n}{\beta^n} \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{55}$$

Substituindo 53 em 44, 54 em 46 e 55 em 48, obtemos

$$u^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{56}$$

$$\varphi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{57}$$

$$\psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{58}$$

Agora, multiplicando a equação 45 por v,

$$i\|v\|-\frac{1}{\beta^n}[-\alpha\langle u_{xx}^n, v\rangle+\lambda\langle(\varphi^n-u^n), v\rangle+\gamma_1\langle v_{xx}^n, v\rangle] \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{59}$$

Tomando a parte real, segue que

$$\frac{1}{\beta^n}\alpha\langle u_{xx}^n, v\rangle - \frac{1}{\beta^n}\lambda\langle(\varphi^n - u^n), v\rangle - \frac{1}{\beta^n}\gamma_1\langle v_{xx}^n, v\rangle] \to 0 \text{ em } L^2(0, L)$$

E fazendo integral por partes, isso implica que,

$$\frac{\alpha}{\beta^n}\langle u_{xx}^n, v\rangle \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{60}$$

E usando 60 em 59, chegamos a

$$v^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{61}$$

Sendo assim, temos por 45 que

$$\frac{1}{\beta^n}[\alpha u_{xx}^n + \lambda(\varphi^n - u^n) + \gamma_1 v_{xx}^n] \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{62}$$

Agora, multiplicando por β^n, chegamos a

$$\alpha u^n_{xx} + \lambda(\varphi^n - u^n) + \gamma_1 v^n_{xx} \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{63}$$

Aplicando 56, 57 e a desigualdade de Gagliardo-Niremberg novamente, concluíremos que

$$u^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0, L) \tag{64}$$

Aplicando a mesma ideia para φ e ψ, obtemos novamente que $\|U^n\| \to 0$, contradizendo que $\|U^n\| = 1$.

Teorema 8

O C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}t}, t \geq 0,$ gerado por $\mathcal{A}$ é exponencialmente estável.

OBRIGADO!

- LIU, Z., ZHENG, S.: *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Springer: New York, 2011.
- MUKIAWA, S.E., ENYI, C.D., MESSAOUDI, S.A.: *Stability of thermoelastic Timoshenko beam with suspenders and time-varying feedback*, Adv. Cont. Discr. Mod. **7**, (2023) 1–19. https://doi.org/10.1186/s13662-023-03752-w
- PAZY, A.: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag :New York, 1983.

Bibliografia

- RAPOSO, Carlos; CORREIA, Leandro; RIBEIRO, Joilson; CUNHA, Arthur. *Suspension bridge with internal damping*. Acta Mechanica, [S.L.], p. 1-16, 13 out. 2023. Springer Science and Business Media LLC. http://dx.doi.org/10.1007/s00707-023-03744-7.
- TIMOSHENKO, S.P. : *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. Philosophical Magazine, **41**:744–746,(1921).
- WIKIPEDIA. *Lista das pontes suspensas mais extensas do mundo*. Disponível em: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Lista_das_pontes_suspensas_mais_extensas_do_mundo`. Acesso em: 15 nov. 2023.