Hiperbolicidade Não-uniforme e Medida de Entropia Máxima em Dinâmica Complexa

Carlos Enrique Gerbasi Gomez

Orientador: Carlos Siqueira

Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática e Estatística

Sistema Dinâmico

- Sistemas dinâmicos é a parte da matemática que estuda o cambio.
- Podemos representar um sistema dinâmico como uma tripla (M, T, f) onde M um espaço topológico, o ambiente onde acontece o sistema dinâmico, T é o tempo, e f é uma função, a regra de como muda o sistema dinâmico.

$$f : M \to M$$

- Definimos a orbita de um ponto p como o conjunto

$$O(p) = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{p, f(p), f^2(p), f^{(n)}(p), \dots\},$$

Sistema Dinâmico

- Sistemas dinâmicos é a parte da matemática que estuda o cambio.
- Vamos considerar $M = \hat{\mathbb{C}}$, f como função racional, e estamos interessados em saber o que acontece com $\hat{\mathbb{C}}$ sob iterações de f.

$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$$

- $$O(p) = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{p, f(p), f^2(p), f^{(n)}(p), \dots\},$$
- Queremos ver que acontece com $\hat{\mathbb{C}}$ quando iteramos f.

Conjunto de Julia e Fatou

Seja f uma função holomorfa sobre a esfera de Riemann. A esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ pode ser dividida em dois conjuntos

- O conjunto Fatou, no qual a dinâmica é suave.
- O conjunto de Julia, no qual há uma dependência sensível das condições iniciais e a dinâmica é caótica.

De maneira mais formal podemos definir:

Definição

Dada $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ racional, definimos o conjunto de Fatou F_f como o conjunto dos pontos $z \in \hat{\mathbb{C}}$ onde $\{f^n\}_{n \geq 1}$ é equicontínua.
O conjunto de Julia $J_f := \mathbb{C} \setminus F_f$ é o conjunto dos pontos no qual a família não é equicontínua.

Conjunto de Julia e Fatou

Definição (Julia e Fatou)

Dado uma função holomorfa $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, nos chamaremos *Conjunto de Julia de f* o fecho do conjunto de pontos periódicos repulsores de f, denotado por $J(f)$. O *conjunto de Fatou* de f é denotado por $F(f)$ e dado por $\hat{\mathbb{C}} \backslash J(f)$.

Hiperbolicidade

Definição (Hiperbolicidade)

Dada f uma função racional de grau maior o igual a dois, diremos que f é uma função **hiperbólica** se existe uma métrica conforme

$$\rho = \gamma(z)|dz|,$$

sendo $\gamma(z) > 0$ uma função C^∞, tal que f se expande uniformemente sobre seu conjunto de Julia, ou seja, existe $\lambda > 1$ tal que

$$\|f'(z)\|_\rho > \lambda,$$

para todo $z \in J(f)$.

As funções hiperbólicas podem ser caracterizadas da seguinte forma:

Teorema (Caracterização de funções hiperbólicas)

Seja $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ uma função racional com grau ≥ 2. Então temos que as seguintes condições são equivalentes.

1. f é hiperbólica.
2. O conjunto pós-crítico $P(f)$ é disjunto do seu conjunto de Julia $J(f)$.
3. O conjunto de Julia não contém ciclos parabólicos ou pontos críticos.
4. Se p é um ponto crítico de f, então $f^n(p)$ tende a um ciclo atrator quando $n \longrightarrow \infty$.

O conjunto do Mandelbrot

Definimos a família quadrática de $\hat{\mathbb{C}}$, como o conjunto que consiste em funções da forma $f_c(x) = x^2 + c$.
Qualquer polinômio quadrático, podemos sempre conjugá-lo a algum elemento da família quadrática. Chamaremos conjunto de Mandelbrot, ao conjunto definido por

$$M = \{c : \{f_c^n(0)\} \quad \text{é uma sequência limitada}\}.$$

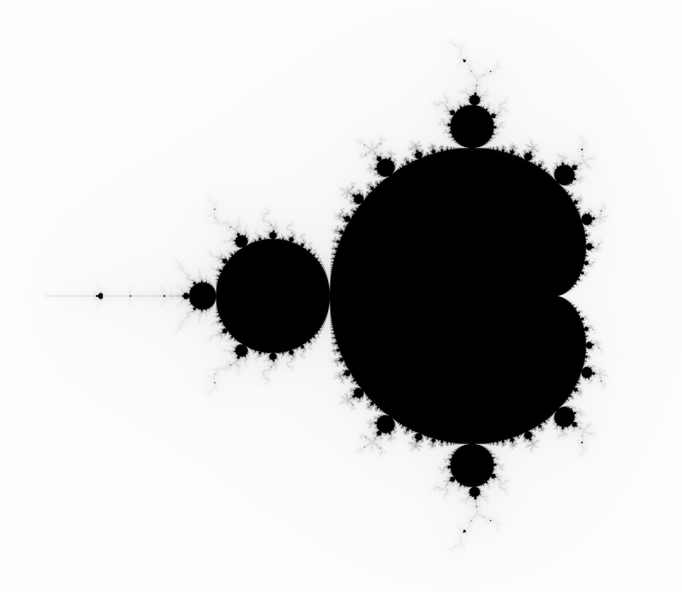


Figure: O conjunto do Mandelbrot

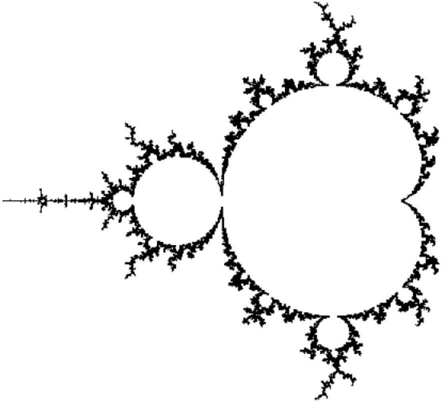
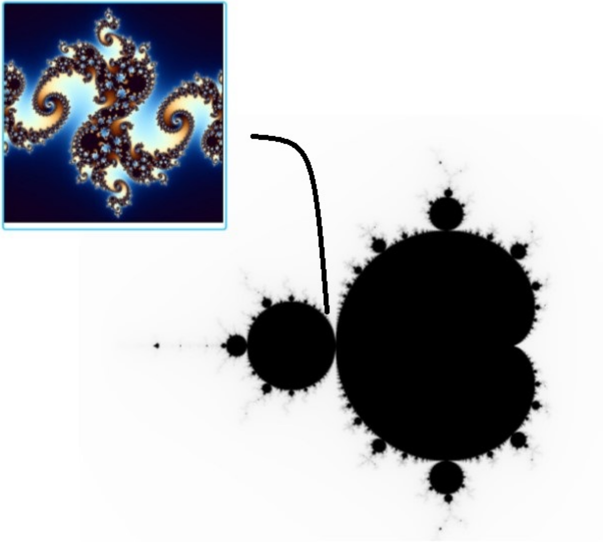
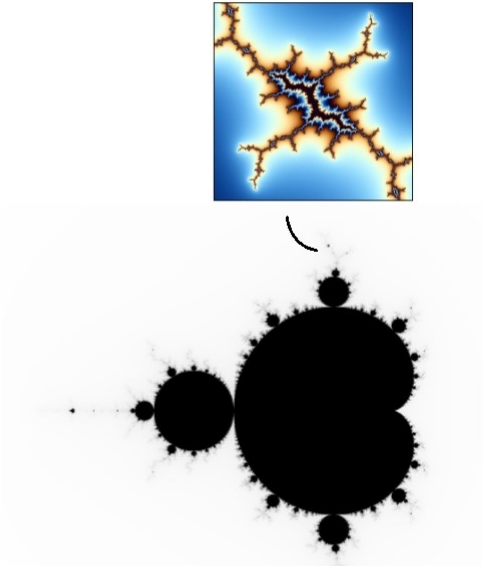


Figure: O Bordo do Mandelbrot

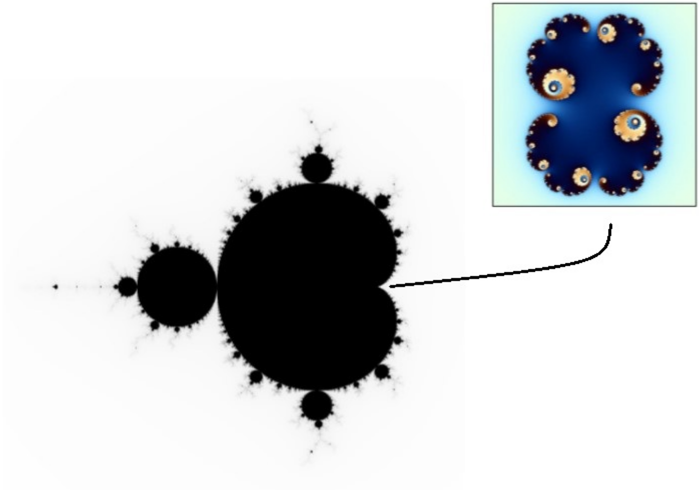
Exemplo de Conjuntos de Julia ($c = -0.79 + 0.15i$)



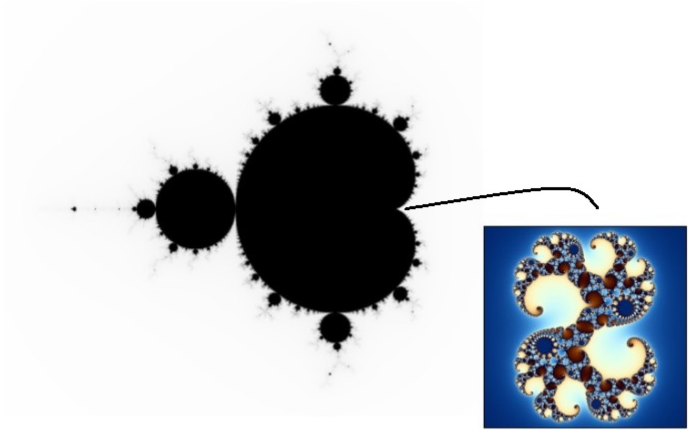
Exemplo de Conjuntos de Julia ($c = -0.162 + 1.04i$)



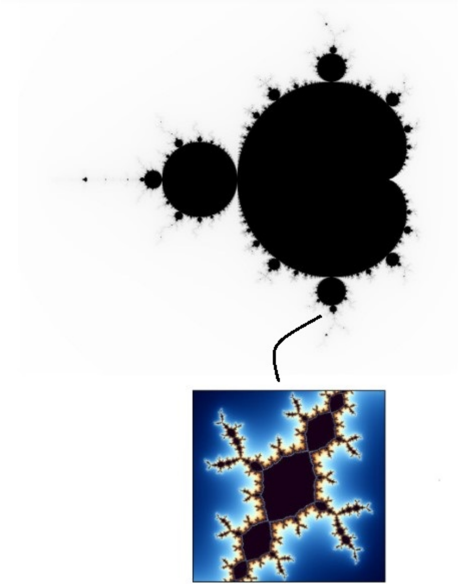
Exemplo de Conjuntos de Julia ($c = 0.3 - 0.01i$)



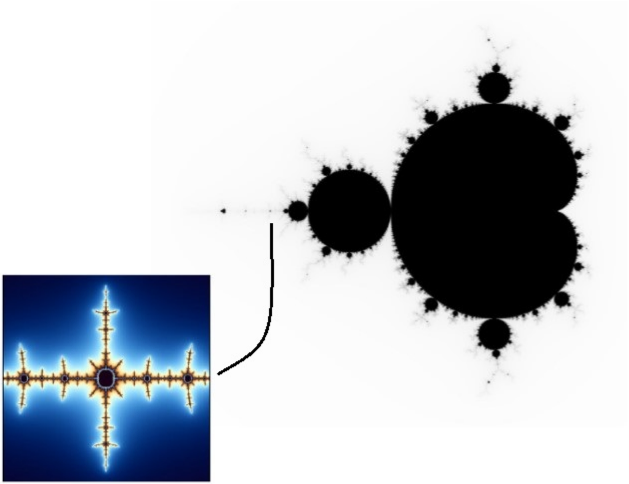
Exemplo de Conjuntos de Julia ($c = 0.28 + 0.008i$)



Exemplo de Conjuntos de Julia ($c = -0.12 - 0.77i$)

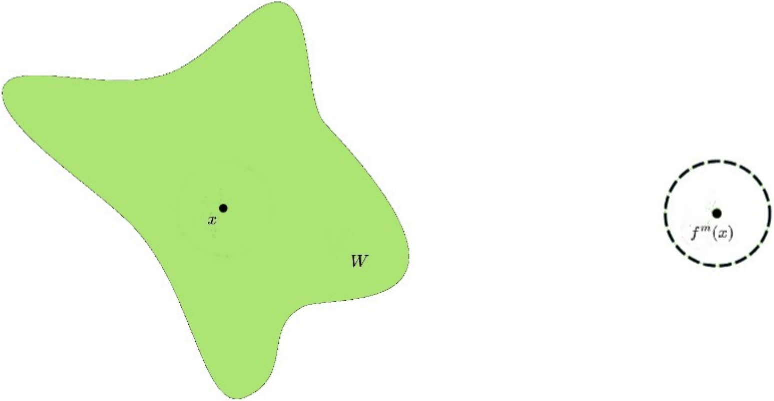


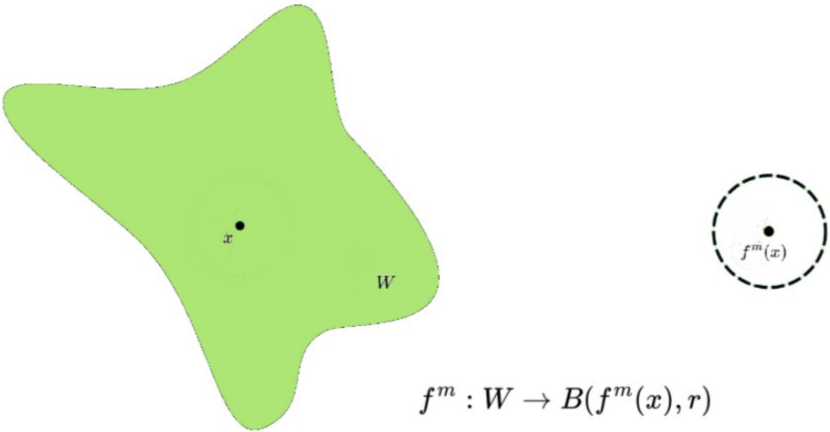
Exemplo de Conjuntos de Julia ($c = -1.476$)



Grau semi-local


x
$f^m(x)$


x
W
$f^m(x)$



$$f^m : W \to B(f^m(x), r)$$

Grau semi-local

Seja f uma função racional com grau maior ou igual a dois. Seja $r > 0$ pequeno e seja $x \in \hat{\mathbb{C}}$. Dado $m \geq 1$, vamos considerar o conjunto $B(f^m(x), r)$ e denotaremos por W à componente conexa de $f^{-m}(B(f^m(x), r))$ que contem a x. Assim, a função

$$f^m : W \to B(f^m(x), r) \tag{1}$$

é um recobrimento ramificado.
Definiremos o **grau semi-local** de f^m em x, com este r pré-fixado, como sendo o grau da função (1).

Semi-hiperbolicidade

Definição (Semi-hiperbolicidade)

Seja f uma função racional com grau maior o igual a dois. Diremos que f é uma função **semi-hiperbólica** se existe um $r > 0$ suficientemente pequeno, e um $D \geq 1$ tal que para todo $m \geq 1$ e todo $x \in J(f)$ o grau semi-local de f^m em x é menor ou igual a D.

Semi-hiperbolicidade

Teorema (Caracterização de funções Semi-Hiperbólicas)

Seja f uma função racional com grau maior ou igual a dois. Então, f é semi-hiperbólica se, e somente se

- f não possui pontos críticos recorrentes em seu conjunto de Julia, isto é, se z_0 é ponto crítico, então $z_0 \notin \omega(z_0)$.
- f não possui ciclos parabólicos em seu conjunto de Julia.

Hiperbolicidade implica semi-hiperbolicidade

Exemplo

Pelo teorema de caracterização de funções hiperbólicas temos que as funções hiperbólicas não contem ciclos parabólicos ou pontos críticos em seu conjunto de Julia.
Em particular, se f é hiperbolica, então f não contem ciclos parabólicos ou pontos críticos recorrentes em seu conjunto de Julia, portanto, pelo teorema anterior, f é semi-hiperbólica.

Parametros de Misiurewicz

Considerando-se a família quadrática $f_c(z) = z^2 + c$, dizemos que c é um parâmetro Misiurewicz se o ponto critico 0 da função $f_c(z) = z^2 + c$ é estritamente pré-periódico, isto é,

$$f_c^m(f_c^n(0)) = f_c^n(0) \quad \text{e} \quad f_c^m(f_c^{n-1}(0)) \neq f_c^{n-1}(0).$$

Teorema [Douady-Hubbard, 1984]

Se c for um parâmetro Misiurewicz da família quadrática $f_c(z) = z^2 + c$, então existe um $n > 0$ tal que $f^n(c) = f^{n+1}(0)$ pertence a uma órbita periódica repulsora de f_c. Além disso,

$$J(f_c) = \{z \in \mathbb{C} : \{f_c^n(z)\} \text{ é limitado}\},$$

de onde segue que o conjunto de Julia cheio possui interior vazio.

Semi-hiperbólico mas não hiperbólico

Se c é um ponto de Misiurewicz a função $f_c(z) = z^2 + c$ não é hiperbólica. Queremos ver que f_c é semi-hiperbólica.

- Como $z = 0$ é estritamente pré-periódico temos que $0 \notin \omega(0)$. Resta mostrar que f_c não tem ciclos parabólicos.
- Suponhamos, por contradição, que $\alpha = \{z_0, z_1, \cdots, z_{m-1}\}$ é um ciclo parabólico de tamanho m.
- Então, temos que a bacia de atração imediata associada ao ciclo de z_0 contém o ponto crítico $z = 0$. Mas c é Misiurewicz, logo $\omega(0) = \alpha$, de onde segue que α é repulsora. Logo α é um ciclo parabólico e repulsor ao mesmo tempo.

Condição Topológica Collect-Eckmann

Definição (Condição Topológica Collect-Eckmann)

Uma função racional f satisfaz a condição TCE se existir um $r > 0$, e constantes $D \geq 1$ e $\theta \in (0, 1)$, tais que, para cada ponto $x \in J(f)$, o conjunto G_x de inteiros $m \geq 1$ para os quais o grau semi-local de f^m em x é menor ou igual a D, satisfaça:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp(G_x \cap \{1, ..., n\}) \geq \theta.$$

Medida de Máxima Entropia e Medidas Duplicadoras

Principio Variacional

Teorema (Principio Variacional)

Seja $f : X \to X$ um endomorfismo de um espaço métrico compacto e seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$P_f(\phi) = \sup_{\mu} \left(h_\mu(f) + \int \phi d\mu \right)$$

onde o supremo é tomado sobre todas as medidas invariantes por f.

Se $\phi = 0$, então definimos $P_f(0)$ como sendo a entropia topológica de f, que denotaremos por $h_{top}(f)$. Uma medida $\mu \in \mathcal{M}(f)$ tal que $h_\mu(f) = h_{top}(f)$ é chamada de **medida de máxima entropia.**

Ricardo Mañé mostrou que as funções racionais com grau maior que 2 têm uma única medida que maximiza a entropia métrica. Alem disso, também é demonstrado que essa medida satisfaz $h_\mu(f) = \ln(d)$.
Por outro lado, temos o seguinte resultado

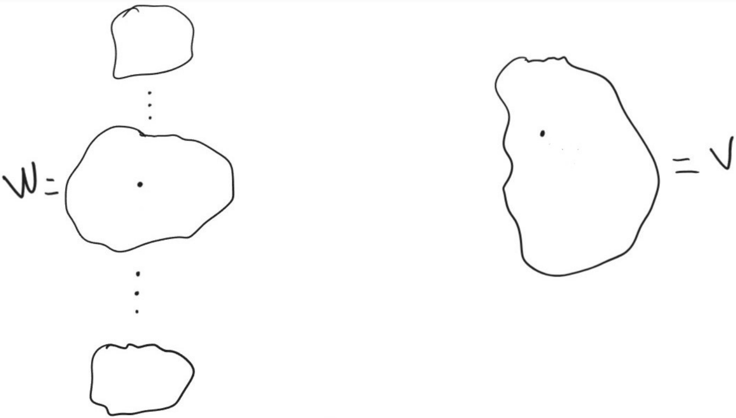
Teorema (Freire-Lopes-Mañé 1983)

Se f é uma função racional com grau $d \geq 2$, então existe uma medida de probabilidade $f-$invariante μ_f tal que:

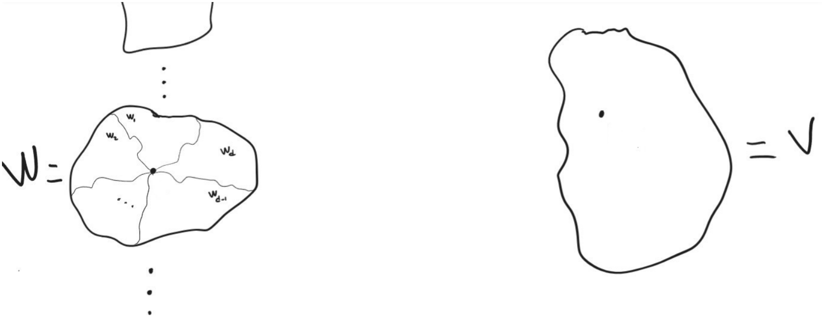
1. O suporte de μ_f é $J(f)$.
2. $\mu_f(f(A)) = d\mu_f(A)$, para todo conjunto de Borel $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ tal que $f|_A$ é injetiva. Além disso, μ_f é a única medida $f-$invariante que satisfaz esta propriedade.
3. A entropia dessa medida é $h_{\mu_f}(f) = \ln(d)$.

Um fato importante que se destaca dos resultados anteriores é que:

- Se V um conjunto aberto conexo de $\hat{\mathbb{C}}$ e $m \geq 1$ um inteiro.
- W uma das componentes conexas de $f^{-m}(V)$.



Podemos considerar a função $f^m : W \to V$, onde seu grau é denotado por D.



Então

$$\rho_f(W) = \frac{D}{grau(f)^m} \rho_f(V).$$

Medidas duplicadoras

Definição (Medida Duplicadora)

Uma medida de Borel ρ em um espaço métrico (X, d) diz-se duplicadora se existem constantes $C_* > 0$ e $r_* > 0$ tais que para cada $x \in X$ e $r \in (0, r_*)$ temos

$$\rho(B(x, 2r)) \leq C_* \rho(B(x, r)).$$

Propriedades das medidas duplicadoras

Lema 1

Seja (X, d) um espaço métrico compacto e seja ρ uma medida duplicadora sobre X. Então existem constantes $C > 0$, $\alpha > 0$ tal que para um $r > 0$ suficientemente pequeno e cada $x \in supp(X)$ temos que

$$\rho(B(x, r)) \geq Cr^{\alpha}.$$

Teoremas principais

Teorema A (Rivera-Letelier 2010)

Uma função racional complexa de grau pelo menos dois é semi-hiperbólica se, e somente se, sua medida de entropia máxima é duplicadora em seu conjunto de Julia.

Teorema B (Rivera-Letelier 2010)

Seja f uma função racional com grau maior ou igual a dois. Seja ρ_f sua medida de máxima entropia. Então f satisfaz a condição TCE se, e somente se, existem constantes $r_0 > 0$, $\alpha > 0$, e $C > 0$ tais que, para quaisquer $x \in J(f)$ e $r \in (0, r_0)$, é verdade que

$$\rho_f(B(x, r)) \geq Cr^{\alpha}.$$

Diminuição Exponencial de Componentes – DEC

Seja f uma função racional de grau maior ou igual a dois. Dizemos que f possui diminuição exponencial de componentes se exitem constantes $r_0 > 0$ e $\lambda > 1$ tais que, para cada $x \in J(f)$, $0 < r < r_0$, e cada inteiro $m \geq 1$, cada componente conexa W de $f^{-m}(B(x, r))$ satisfaz

$$diam(W) \leq \lambda^{-m}.$$

Hiperbolicidade Uniforme em Órbitas Periódicas – HUP

Seja f uma função racional de grau maior ou igual a dois. Dizemos que f possui hiperbolicidade uniforme em órbitas periódicas se existe um $\lambda > 1$ tal que, para qualquer ponto periódico $p \in J(f)$ de período $n \geq 1$, temos

$$|(f^n)'(p)| \geq \lambda^n.$$

Em particular, todos os ciclos periódicos dentro do conjunto de Julia são repulsores.

Refêrencias

[1] P. Haïssinsky and K. M. Pilgrim. *Coarse expanding conformal dynamics*. 2009.

[2] A. F. A. Lopes and R. Mañé. *An invariant measure for rational maps*.Bol. Soc. Bras. Math, 14:45–62, 1983.

[3] R. Mañé *On the uniqueness of the maximizing measure for rational maps*. Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society, 14(1):27–43, 1983.

[4] F. Przytycki, J. Rivera-Letelier, and S. Smirnov. *Equivalence and topological invariance of conditions for non-uniform hyperbolicity in the iteration of rational maps*. Inventiones mathematicae, 151(1):29–63, 2003.

[5] J. Rivera-Letelier. *The maximal entropy measure detects non-uniform hyperbolicity*. Mathematical research letters, 17:851–866, 2010.

Refêrencias

[1] P. Haïssinsky and K. M. Pilgrim. *Coarse expanding conformal dynamics*. 2009.

[2] A. F. A. Lopes and R. Mañé. *An invariant measure for rational maps*.Bol. Soc. Bras. Math, 14:45–62, 1983.

[3] R. Mañé *On the uniqueness of the maximizing measure for rational maps*. Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society, 14(1):27–43, 1983.

[4] F. Przytycki, J. Rivera-Letelier, and S. Smirnov. *Equivalence and topological invariance of conditions for non-uniform hyperbolicity in the iteration of rational maps*. Inventiones mathematicae, 151(1):29–63, 2003.

[5] J. Rivera-Letelier. *The maximal entropy measure detects non-uniform hyperbolicity*. Mathematical research letters, 17:851–866, 2010.

Obrigado!