Um teorema do tipo Borsuk-Ulam para fibrados com base círculo e fibra toro

Weslem Liberato Silva - UESC

IX Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA

18 a 22 de novembro de 2024

Este trabalho é em parceria com Daciberg Lima Gonçalves (IME-USP) e Vinicius Casteluber Laass (UFBA).

Este trabalho é em parceria com Daciberg Lima Gonçalves (IME-USP) e Vinicius Casteluber Laass (UFBA).

Teorema (Borsuk-Ulam)

Se $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, então existe um ponto $x \in \mathbb{S}^n$ tal que

$$f(A(x)) = f(x),$$

onde $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ é a aplicação antípoda, ou seja, $A(x) = -x$.

Este trabalho é em parceria com Daciberg Lima Gonçalves (IME-USP) e Vinicius Casteluber Laass (UFBA).

Teorema (Borsuk-Ulam)

Se $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, então existe um ponto $x \in \mathbb{S}^n$ tal que

$$f(A(x)) = f(x),$$

onde $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ é a aplicação antípoda, ou seja, $A(x) = -x$.

Para diversas aplicações desse teorema veja: "J. Matousek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Universitext, Springer - Verlag, (2002)."

Definição

Seja M um espaço topológico. Um homeomorfismo $\tau : M \to M$ é dito ser uma involução livre se, $\tau^2 = \tau$ e $\tau(x) \neq x$ para todo x de M.

Definição

Seja M um espaço topológico. Um homeomorfismo $\tau : M \to M$ é dito ser uma involução livre se, $\tau^2 = \tau$ e $\tau(x) \neq x$ para todo x de M.

Exemplo

A aplicação antípoda $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ é uma involução.

Definição

Seja M um espaço topológico. Um homeomorfismo $\tau : M \to M$ é dito ser uma involução livre se, $\tau^2 = \tau$ e $\tau(x) \neq x$ para todo x de M.

Exemplo

A aplicação antípoda $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ é uma involução.

Pergunta

M possui involução, se sim, quantas ?

Definição

Duas involuções τ_1, τ_2 *em* M *são equivalentes se existe um homeomorfismo* h *de* M *tal que* $\tau_1 = h \circ \tau_2 \circ h^{-1}$.

Definição

Duas involuções τ_1, τ_2 em M são equivalentes se existe um homeomorfismo h de M tal que $\tau_1 = h \circ \tau_2 \circ h^{-1}$.

Definição

Sejam M, N espaços topológicos a τ uma involução livre sobre M.

A tripla (M, τ, N) é dita satisfazer a Propriedade de Borsuk-Ulam (PBU) se para toda aplicação contínua $f : M \to N$ existir um ponto $x \in M$ tal que $f(\tau(x)) = f(x)$.

Exemplo

Como consequência do teorema de Borsuk-Ulam, a tripla $(\mathbb{S}^n, A, \mathbb{R}^n)$ *satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam.*

Exemplo

Como consequência do teorema de Borsuk-Ulam, a tripla $(\mathbb{S}^n, A, \mathbb{R}^n)$ *satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam.*

Pergunta

Se trocarmos $\mathbb{S}^n$ *por uma variedade conexa, compacta e sem bordo* M *de dimensão* m*, e* A *por uma involução* τ *sobre* M*, no teorema de Borsuk-Ulam, o que acontece ?*

Exemplo

Como consequência do teorema de Borsuk-Ulam, a tripla $(\mathbb{S}^n, A, \mathbb{R}^n)$ *satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam.*

Pergunta

Se trocarmos $\mathbb{S}^n$ *por uma variedade conexa, compacta e sem bordo* M *de dimensão* m*, e* A *por uma involução* τ *sobre* M*, no teorema de Borsuk-Ulam, o que acontece ?*

Teorema (Gonçalves, D. L., Hayat, C., and Zvengrowski, P. - 2010)

Se $\dim(M) < n$ *então a tripla* $(M, \tau, \mathbb{R}^n)$ *não satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam.*

Teorema (Gonçalves, D. L., Hayat, C., and Zvengrowski, P. - 2010)

Se M é uma variedade conexa, então a tripla $(M, \tau, \mathbb{R})$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam.

Teorema (Gonçalves, D. L., Hayat, C., and Zvengrowski, P. - 2010)

Se M é uma variedade conexa, então a tripla $(M, \tau, \mathbb{R})$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam.

Para cada involução τ de M podemos associar um epimorfismo $\theta_\tau : \pi_1(M/\tau) \to \mathbb{Z}_2$ e uma classe $\omega \in H^1(X/\tau, \mathbb{Z}_2)$.

Teorema (Gonçalves, D. L., Hayat, C., and Zvengrowski, P. - 2010)

Se M é uma variedade conexa, então a tripla $(M, \tau, \mathbb{R})$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam.

Para cada involução τ de M podemos associar um epimorfismo $\theta_\tau : \pi_1(M/\tau) \to \mathbb{Z}_2$ e uma classe $\omega \in H^1(X/\tau, \mathbb{Z}_2)$.

Teorema (Gonçalves, D. L., Hayat, C., and Zvengrowski, P. - 2010)

A tripla $(M, \tau, \mathbb{R}^2)$ tem PBU se e somente se θ_τ não se fatora para $\mathbb{Z}$.

Teorema (Gonçalves, D. L., Hayat, C., and Zvengrowski, P. - 2010)

A tripla $(M, \tau, \mathbb{R}^m)$, *onde* $m = dim(M)$, *tem PBU se e somente se* $\omega^m \neq 0$.

Teorema (Gonçalves, D. L., Hayat, C., and Zvengrowski, P. - 2010)

A tripla $(M, \tau, \mathbb{R}^m)$, *onde* $m = dim(M)$, *tem PBU se e somente se* $\omega^m \neq 0$.

Se M é um superfície então em "Gonçalves, D. L. *The Borsuk-Ulam theorem for surfaces*. Quaestiones Mathematicae, 29, (2006)" foi estudado a propriedade de Borsuk-Ulam para as triplas $(M, \tau, \mathbb{R}^2)$.

Teorema (Gonçalves, D. L., Hayat, C., and Zvengrowski, P. - 2010)

A tripla $(M, \tau, \mathbb{R}^m)$, *onde* $m = dim(M)$, *tem PBU se e somente se* $\omega^m \neq 0$.

Se M é um superfície então em "Gonçalves, D. L. *The Borsuk-Ulam theorem for surfaces*. Quaestiones Mathematicae, 29, (2006)" foi estudado a propriedade de Borsuk-Ulam para as triplas $(M, \tau, \mathbb{R}^2)$.

Se dimensão de M é 3 ou 4, então existem vários trabalhos publicados e em andamento para estudar quando a tripla $(M, \tau, \mathbb{R}^n)$ satisfaz PBU.

Pergunta

E se trocarmos o contradomínio $\mathbb{R}^n$ *por uma outra variedade* N *?*

Pergunta

E se trocarmos o contradomínio $\mathbb{R}^n$ *por uma outra variedade* N *?*

Em "Gonçalves, D. L., and Guaschi, J. *The Borsuk-Ulam theorem for maps into a surface*. Topology and its Applications, 157, (2010)" foi estudado a propriedade de Borsuk-Ulam para as triplas (M, τ, N), onde N é uma superfície.

Pergunta

E se trocarmos o contradomínio $\mathbb{R}^n$ por uma outra variedade N ?

Em "Gonçalves, D. L., and Guaschi, J. *The Borsuk-Ulam theorem for maps into a surface*. Topology and its Applications, 157, (2010)" foi estudado a propriedade de Borsuk-Ulam para as triplas (M, τ, N), onde N é uma superfície.

A técnica usada para estudar as triplas acima envolve os grupos de tranças da superfície N.

Dada $f : M \to N$ e τ involução livre em M, suponha que

$$f(x) \neq f(\tau(x))$$

para todo $x \in M$.

Assim o par $(f(x), f(\tau(x)))$ pertence a $(N \times N - \Delta)$. Portanto f induz um homomorfismo

$$\overline{f} : \pi_1(M) \to P_2(N),$$

pois

$$P_2(N) = \pi_1(N \times N - \Delta).$$

Relação com a teoria de coincidência

Dada duas aplicações $f, g : M \to N$ então o conjunto das coincidências de f e g é dado por

$$Coin(f, g) = \{x \in M | f(x) = g(x)\}.$$

Quando a tripla (M, τ, N) tem PBU é equivalente a dizer que $Coin(f, f \circ \tau) \neq \emptyset$, para toda aplicação $f : M \to N$.

Duas aplicações $f, g : M \to N$ são ditas homotópicas se existe uma aplicação $H : M \times I \to N$ tal que

$$H(x,0) = f(x) \;\; e \;\; H(x,1) = g(x).$$

Duas aplicações $f, g : M \to N$ são ditas homotópicas se existe uma aplicação $H : M \times I \to N$ tal que

$$H(x,0) = f(x) \;\; e \;\; H(x,1) = g(x).$$

Dada duas aplicações homotópicas f, g pode acontecer de

$$Coin(f, f \circ \tau) \neq \emptyset \quad e \quad Coin(g, g \circ \tau) = \emptyset.$$

Isso motivou a seguinte definição:

Definição

Uma classe de homotopia $\delta \in [M, N]$ é dita ter a Propriedade de Borsuk-Ulam (PBU) com respeito a τ se para toda aplicação $f : M \to N$ na classe de δ, existe um ponto $x \in M$ tal que $f(\tau(x)) = f(x)$.

Definição

Uma classe de homotopia $\delta \in [M,N]$ é dita ter a Propriedade de Borsuk-Ulam (PBU) com respeito a τ se para toda aplicação $f : M \to N$ na classe de δ, existe um ponto $x \in M$ tal que $f(\tau(x)) = f(x)$.

Em "Gonçalves, D. L., Guaschi, J. and Laass, V. L. *The Borsuk–Ulam property for homotopy classes of self-maps of surfaces of Euler characteristic zero* J. Fixed Point Theory Appl. (2019)" foi estudado PBU para classes de homotopia nos seguintes casos;

1) $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$

2) $[M,N]$, onde M e N são superfícies, onde N é diferente de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$. Neste contexto foi provado a seguinte proposição:

Proposição (Gonçalves, D. L., Guaschi, J. and Laass, V. L.)

Uma classe de homotopia $\alpha \in [M, m_1; N, n_1]$, não tem PBU com respeito a τ se e somente se, existem homorfismos φ e ψ no diagrama abaixo que o torna comutativo;

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(M, m_1) \arrow[r, dotted, "\varphi"] \arrow[d, "(p_\tau)_\#"'] \arrow[rr, bend left, "\alpha_\#"] & P_2(N) \arrow[r, "(p_1)_\#"] \arrow[d, "\iota"] & \pi_1(N, n_1) \\
\pi_1(M_\tau, p_\tau(m_1)) \arrow[r, dotted, "\psi"] \arrow[dr, "\theta_\tau"'] & B_2(N) \arrow[d, "\pi"] & \\
& \mathbb{Z}_2 &
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

Pergunta

E se dimensão de N for maior ou igual a 3 ?

Pergunta

E se dimensão de N for maior ou igual a 3 ?

Neste caso $P_2(N)$ é trivial, e portanto a técnica acima não ajuda.

Pergunta

E se dimensão de N for maior ou igual a 3 ?

Neste caso $P_2(N)$ é trivial, e portanto a técnica acima não ajuda.

Mas existem um caso especial de 3-variedades onde é possível "recuperar" a técnica acima, que são os fibrados com base $\mathbb{S}^1$ e fibra uma superfície. Trataremos aqui o caso em que a fibra é o toro $\mathbb{T}$.

Seja $\mathbb{T} \to M \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1$ um fibrado com base o círculo e a fibra o toro. Neste caso o espaço total M é dado por:

$$M = MA = \frac{\mathbb{T} \times [0,1]}{(x,0) \sim (A(x),1)}$$

onde A é um homeomorfismo de $\mathbb{T}$, e a aplicação $p : MA \longrightarrow \mathbb{S}^1$ é dada por $p(< x,t >) =< t >\in [0,1]/0 \sim 1 = \mathbb{S}^1$.

Seja $\mathbb{T} \to M \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1$ um fibrado com base o círculo e a fibra o toro. Neste caso o espaço total M é dado por:

$$M = MA = \frac{\mathbb{T} \times [0,1]}{(x,0) \sim (A(x),1)}$$

onde A é um homeomorfismo de $\mathbb{T}$, e a aplicação $p : MA \longrightarrow \mathbb{S}^1$ é dada por $p(< x,t >) =< t >\in [0,1]/0 \sim 1 = \mathbb{S}^1$.

- Neste contexto consideramos aplicações sobre $\mathbb{S}^1$, ou seja, $f : M \to M$ é sobre $\mathbb{S}^1$ se $p \circ f = p$.
- Neste contexto uma homotopia $H : M \times I \to M$ deve satisfazer $p \circ H(-,t) = p$.

Proposição (Gonçalves, D. L., Laass, V. L. e Silva, W. L.)

Uma classe de homotopia $\delta \in [MA, m_1; MA, n_1]_{\mathbb{S}^1}$, não tem PBU com respeito a uma involução livre τ, sobre $\mathbb{S}^1$, se e somente se, existem homomorfismos φ e ψ no diagrama abaixo que o torna comutativo;

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(MA, m_1) \arrow[rr, dotted, "\varphi"] \arrow[rrr, bend left, "\delta_{\#}"] \arrow[dr, "p_{\#}"] \arrow[dd, "(\pi_\tau)_{\#}"'] & & P_2(MA)_{\mathbb{S}^1} \arrow[r, "(p_1)_{\#}"] \arrow[dl, "(p \circ p_1)_{\#}"'] \arrow[dd, "(\pi_{\tau'})_{\#}"] & \pi_1(MA, n_1) \\
& \pi_1(\mathbb{S}^1, p(m_1)) & & \\
\pi_1(M_\tau, \overline{m_1}) \arrow[rr, dotted, "\psi"] \arrow[ur, "\overline{p}_{\#}"] \arrow[dr, "\theta_\tau"'] & & B_2(MA)_{\mathbb{S}^1} \arrow[ul, "\overline{p \circ p_1}_{\#}"'] \arrow[dl, "\theta_{\tau'}"] & \\
& \mathbb{Z}_2. & &
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

Consideremos o pull back $MA \times_{\mathbb{S}^1} MA$ of $p : MA \to \mathbb{S}^1$ by $p : MA \to \mathbb{S}^1$, ou seja,

$$MA \times_{\mathbb{S}^1} MA = \{(x, y) \in MA \times MA; p(x) = p(y)\}.$$

Consideremos o pull back $MA \times_{\mathbb{S}^1} MA$ of $p : MA \to \mathbb{S}^1$ by $p : MA \to \mathbb{S}^1$, ou seja,

$$MA \times_{\mathbb{S}^1} MA = \{(x,y) \in MA \times MA; p(x) = p(y)\}.$$

$$P_2(MA)_{\mathbb{S}^1} = \pi_1(MA \times_{\mathbb{S}^1} MA - \Delta)$$

e

$$B_2(MA)_{\mathbb{S}^1} = \pi_1\left(\frac{MA \times_{\mathbb{S}^1} MA - \Delta}{\tau'}\right)$$

onde $\tau'(x,y) = (y,x)$.

Denotemos por

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix},$$

a matriz do homomorfismo induzido $A_{\#} : \pi_1(\mathbb{T}) \to \pi_1(\mathbb{T})$.

Denotemos por

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix},$$

a matriz do homomorfismo induzido $A_{\#} : \pi_1(\mathbb{T}) \to \pi_1(\mathbb{T})$.

Dada uma aplicação $f : MA \to MA$ sobre $\mathbb{S}^1$ denotemos por

$$[(f|_{\mathbb{T}})_{\#}] = D = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix}.$$

Proposition

A sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{T}) \longrightarrow \pi_1(MA) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 1,$$

cinde. Assim $\pi_1(MA) \cong \pi_1(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z}$*, produto semidireto.*

Proposition

A sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{T}) \longrightarrow \pi_1(MA) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 1,$$

cinde. Assim $\pi_1(MA) \cong \pi_1(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z}$, *produto semidireto.*

Theorem

1. $\pi_1(MA, 0) = \langle \alpha, \beta, c | [\alpha, \beta] = 1, c\alpha c^{-1} = \alpha^{a_1}\beta^{a_2}, c\beta c^{-1} = \alpha^{a_3}\beta^{a_4} \rangle$
2. D *comuta com* A.
3. *O homomorfismo induzido* $f_\# : \pi_1(MA, 0) \longrightarrow \pi_1(MA, 0)$ *é dado por;* $f_\#(\alpha) = \alpha^{b_1}\beta^{b_2}$, $f_\#(\beta) = \alpha^{b_3}\beta^{b_4}$, $f_\#(c) = \alpha^{c_1}\beta^{c_2}c$.

Proposition

Temos uma sequência exata curta

$$1 \longrightarrow P_2(\mathbb{T}) \longrightarrow P_2(MA)_{\mathbb{S}^1} \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow 1,$$

que cinde. Portanto

$$P_2(MA)_{\mathbb{S}^1} \cong P_2(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z},$$

produto semidireto.

Proposition

Temos uma sequência exata curta

$$1 \longrightarrow P_2(\mathbb{T}) \longrightarrow P_2(MA)_{\mathbb{S}^1} \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow 1,$$

que cinde. Portanto

$$P_2(MA)_{\mathbb{S}^1} \cong P_2(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z},$$

produto semidireto.

Analogamente temos;

$$B_2(MA)_{\mathbb{S}^1} \cong B_2(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z}.$$

Para uma presentação de $P_2(\mathbb{T})$ e $B_2(\mathbb{T})$ veja:

"E. Fadell and S. Husseini; *The Nielsen number on surfaces*, Contemp. Math. **21**, 59–98, 1983."

Para uma presentação de $P_2(\mathbb{T})$ e $B_2(\mathbb{T})$ veja:

"E. Fadell and S. Husseini; *The Nielsen number on surfaces*, Contemp. Math. **21**, 59–98, 1983."

Uma classificação das involuções livres, sobre $\mathbb{S}^1$, em *MA* foi dada em:

"M. Sakuma, *Involutions on torus bundle over S^1*, Osaka J. Math. **22**, 163-185, 1985."

Definição

Seja A uma matriz de $GL(2,\mathbb{Z})$. A é dita excepcional, se uma das seguintes condições é satisfeita.

(i) $det(A) = 1$ e $|tr(A)| \leq 2$.

(ii) $det(A) = -1$ e $tr(A) = 0$.

A é dita Anosov, se A não for excepcional.

Definição

Seja A uma matriz de $GL(2,\mathbb{Z})$. A é dita excepcional, se uma das seguintes condições é satisfeita.

(i) $det(A) = 1$ e $|tr(A)| \leq 2$.

(ii) $det(A) = -1$ e $tr(A) = 0$.

A é dita Anosov, se A não for excepcional.

Proposição (Sakuma)

Se A é excepcional e $\beta_1(MA) > 1$, *número de Betti, então A é conjugada a seguinte matriz:* $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Teorema (Gonçalves, D. L., Laass, V. L. e Silva, W. L.)

Seja MA um fibrado $\mathbb{S}^1$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) *Suponha que $n \neq 0$. Dada uma classe de homotopia $\delta = [f] \in [MA, 0; MA, 0]_{\mathbb{S}^1}$ temos que $f_\# : \pi_1(MA, 0) \to \pi_1(MA, 0)$ é dado por; $f_\#(\alpha) = \alpha^r$, $f_\#(\beta) = \alpha^s \beta^r$ e $f_\#(c) = \alpha^u \beta^v c$.*

(1.1) *Se n é ímpar então MA possui uma única involução livre sobre $\mathbb{S}^1$; τ_1. Neste caso δ tem PBU com respeito a τ_1 se e somente se r é par.*

(1.2) *Se n é par então MA tem exatamente duas involuções livres sobre $\mathbb{S}^1$; τ_2 e τ_3.*

- *δ tem PBU com respeito a τ_2 se e somente se r é par.*
- *δ tem PBU com respeito a τ_3 se e somente se r é ímpar.*

(2) Suponha $n = 0$. Neste caso, dada uma classe de homotopia $\delta = [f] \in [MA, 0; MA, 0]_{S^1}$ temos que $f_\# : \pi_1(MA, 0) \to \pi_1(MA, 0)$ é dado por; $f_\#(\alpha) = \alpha^{r_1}\beta^{r_2}$, $f_\#(\beta) = \alpha^{r_3}\beta^{r_4}$ e $f_\#(c) = \alpha^u \beta^v c$.

Neste caso existem exatamente duas involuções livres em MA sobre $\mathbb{S}^1$; τ_4 e τ_5.

- δ não tem PBU com respeito a τ_4.
- δ tem PBU com respeito a τ_5 se e somente se $(r_1, r_2) \neq (0, 0)$, e r_3 e r_4 são ambos pares.

Gonçalves, D. L., Laass, V. C., Silva, W. L.; **The Borsuk-Ulam property for homotopy classes on bundles, parametrized braids groups and applications for surfaces bundles**. To appear in Topology and its Applications, 2024.