

Geodésica Finsleriana e Geodésica Magnética

Benigno Oliveira Alves (UFBA)

IX Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
EPGMAT

Salvador, Ba, novembro de 2024.

Partícula carrega sob ação de um campo magnético

- ▶ B campo magnético em \mathbb{R}^3 :

$$\operatorname{div}(B) = 0 \text{ Lei de Gauss para o magnetismo}$$

Partícula carregada sob ação de um campo magnético

- ▶ B campo magnético em \mathbb{R}^3 :

$$\operatorname{div}(B) = 0 \text{ Lei de Gauss para o magnetismo}$$

- ▶ $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma partícula carregada com carga e e massa m sob ação de B :

$$\begin{aligned} m\gamma''(t) &= F(\gamma'(t)) \\ &= e(\gamma'(t) \times B(\gamma(t))) \text{ Equação de Lorentz.} \end{aligned}$$

Partícula carregada sob ação de um campo magnético

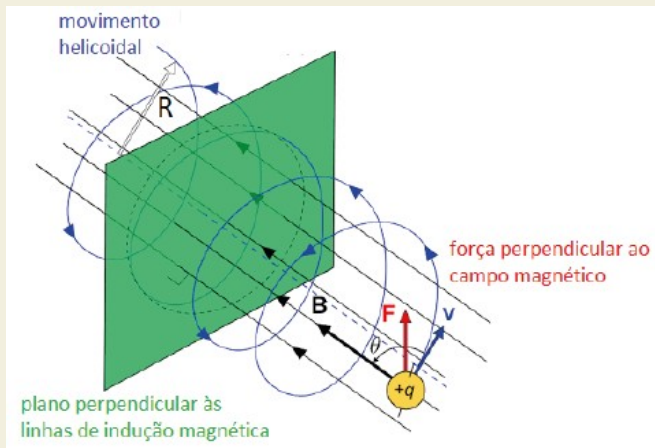


Figura: B campo constante


Plasma físico

Um **campo magneto-hidro-estático (MHE)** em \mathbb{R}^3 é um campo vetorial B tal que

1. $\operatorname{div} B = 0$; e
2. existe uma **função pressão** ρ tal que

$$J \times B = \nabla \rho,$$

onde $J = \operatorname{rot}(B)$.

 MacKay, R. S. (2020). Differential forms for plasma physics. *Journal of Plasma Physics*, 86(1), 925860101.

Campo magnético da Terra

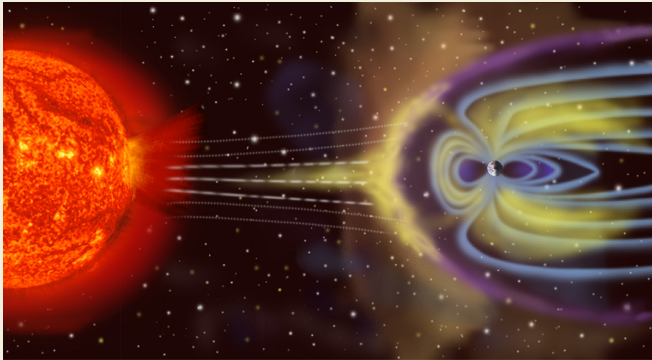


Figura: Interação ventos solares e campo magnético da Terra

Fusão nuclear: Tokamak

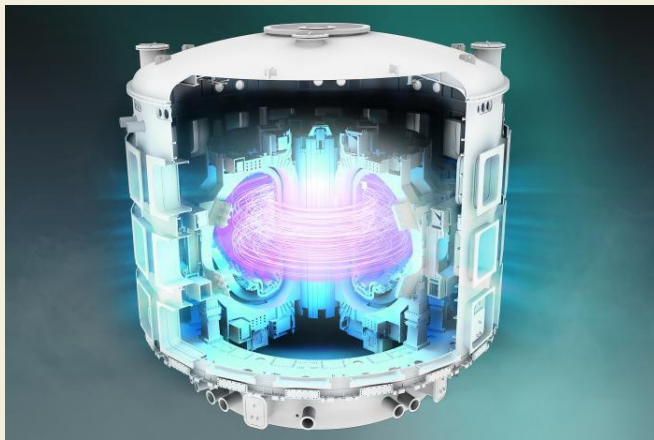


Figura: Reator de Fusão

Theorem

Seja B é um campo MHE com pressão ρ . Se

- ▶ c é valor regular de ρ ; e
- ▶ $T = \rho^{-1}(c)$ é limitado,

então T é um toro.

Campo magnético da Terra

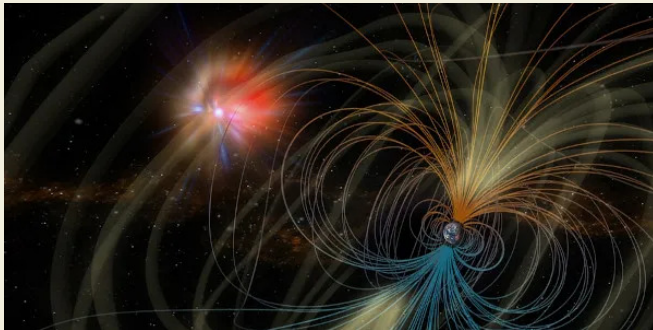


Figura: Campo magnético da Terra

Estrutura magnética

- ▶ B um campo magnético em \mathbb{R}^3
- ▶ γ uma partícula carregada com massa m e carga e

$$\operatorname{div} B = 0 \implies \exists J \text{ tal que} \\ B = \operatorname{rot}(J).$$

Estrutura magnética

- ▶ B um campo magnético em \mathbb{R}^3
- ▶ γ uma partícula carregada com massa m e carga e

$$\operatorname{div} B = 0 \implies \exists J \text{ tal que} \\ B = \operatorname{rot}(J).$$

A trajetória da partícula é reparametrização de um ponto crítico do funcional

$$L(p, v) = \frac{m}{2} \langle v, v \rangle + e \langle J(p), v \rangle,$$

que denominamos por **geodésica magnética**.

Lagrangeana

Uma **lagrangiana** em $\mathcal{U} \subset T\mathbb{R}^n$ é uma função suave

$$L : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Lagrangeana

Uma **lagrangiana** em $\mathcal{U} \subset T\mathbb{R}^n$ é uma função suave

$$L : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Seu **funcional ação** é

$$\mathcal{A}(\gamma) = \mathcal{A}_L(\gamma) = \int_a^b L(\gamma, \gamma') dt$$

onde $\gamma : [a, b] \rightarrow U = \pi(\mathcal{U})$ é curva suave por partes.

Lagrangeana

Example

$$L(v_p) = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|v\|$$

e

$$E(v_p) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle = \frac{1}{2} \|v\|^2$$

são Lagrangianas com respectivos funcionais ação

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'\| dt \text{ (comprimento da curva)}$$

e

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'\|^2 dt \text{ (energia da curva)}$$

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva suave.

Geodésica

Uma curva γ é **geodésica** de uma Lagrangiana L se for ponto crítico de seu funcional ação \mathcal{A}_L .

Geodésica

Uma curva γ é **geodésica** de uma Lagrangiana L se for ponto crítico de seu funcional ação \mathcal{A}_L .

Theorem

Equações de Euler-Lagrange

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma geodésica da Lagrangiana L se, e somente se, satisfizer as *equações de Euler-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma, \gamma') \right) - \frac{\partial L}{\partial p_i}(\gamma, \gamma') = 0. \quad (1)$$

para qualquer $i \in 1, \dots, n$.

Existência e unicidade

Theorem

Suponha que

$$[g_{ij}(p, v)] = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(p, v) \right]$$

seja inversível para qualquer $(p, v) \in \mathcal{U}$ e seja $[g^{ij}(p, v)]$ sua inversa. Então $\gamma = (p_1, \dots, p_n)$ é ponto crítico do funcional ação \mathcal{A}_L se, e somente se,

$$\frac{d^2 p_i}{dt^2} + \sum_j g^{ij} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial p_j} \frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial L}{\partial p_i} \right) = 0. \quad (2)$$

Energia

A **Energia (total)** de uma Lagrangiana L é a Lagrangiana

$$E_L(p, v) = dL_{(p,v)}(0, v) - L(p, v),$$

Energia

A **Energia (total)** de uma Lagrangiana L é a Lagrangiana

$$E_L(p, v) = dL_{(p,v)}(0, v) - L(p, v),$$

Theorem

Conservação da Energia

Se γ é uma geodésica de L , então

$$t \mapsto E_L(\gamma(t), \gamma'(t))$$

é constante.

Energia

A **Energia (total)** de uma Lagrangiana L é a Lagrangiana

$$E_L(p, v) = dL_{(p,v)}(0, v) - L(p, v),$$

Theorem

Conservação da Energia

Se γ é uma geodésica de L , então

$$t \mapsto E_L(\gamma(t), \gamma'(t))$$

é constante.

Example

Seja B função bilinear simétrica. Se $L(v_p) := \sqrt{B(v, v)}$, então

$$E(v_p) = \frac{1}{2}B(v, v).$$

Sistemas mecânicos

$(\mathbb{R}^n, m\langle, \rangle, F)$ é sistema mecânico em \mathbb{R}^n onde

$$F : T\mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n \text{ (Força externa)}$$

tal que $\pi \circ F = \pi$.

Sistemas mecânicos

$(\mathbb{R}^n, m\langle, \rangle, F)$ é sistema mecânico em \mathbb{R}^n onde

$$F : T\mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n \text{ (Força externa)}$$

tal que $\pi \circ F = \pi$.

E o movimento do sistema é dado pela Equação de Newton:

$$m\gamma'' = F(\gamma').$$


Sistemas mecânicos

Example (Campo magnético x partícula carregada)

(\mathbb{R}^n, g, F) dado por $g = m\langle, \rangle$ e

$$F(v_p) = ev \times B(p) \quad (\text{Força de Lorentz})$$

é um sistema mecânico.

 Godinho, L., Natário, J. (2012). An introduction to riemannian geometry. With Applications.

Sistemas mecânicos conservativos

Dizemos que $(\mathbb{R}^n, m\langle, \rangle, F)$ é **conservativo** se

$$F(v_p) = -\nabla U_p,$$

onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a **função potencial**.

Sistemas mecânicos conservativos

Dizemos que $(\mathbb{R}^n, m\langle, \rangle, F)$ é **conservativo** se

$$F(v_p) = -\nabla U_p,$$

onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a **função potencial**.

Nesse caso, o movimento é uma geodésica de

$$L(v_p) = \frac{m}{2}\langle v, v \rangle - U(p).$$

E a energia é

$$E(v_p) = \frac{m}{2}\langle v, v \rangle + U(p)$$

Exemplo: movimento balístico.

$$U(p) = mgp_3$$

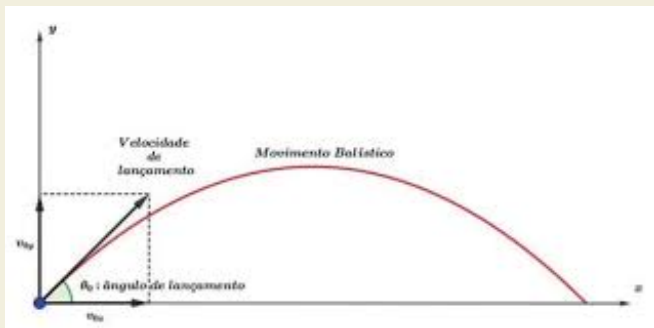
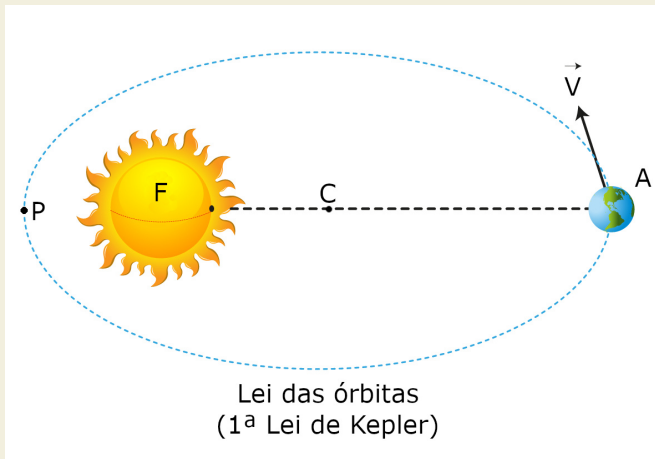


Figura: Movimento balístico

Exemplo: sistema Estrela/Planeta

$$U(p) = -\frac{MmG}{\|p\|}$$



Exemplo: oscilador harmônico

$$U(p) = \frac{\omega^2}{2} \langle p, p \rangle$$

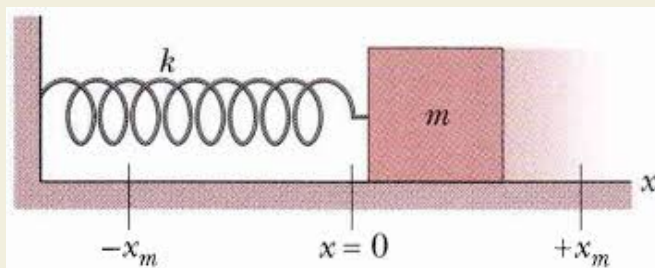


Figura: Massa presa a uma mola.

Sistemas mecânicos conservativos

- ▶ $(\mathbb{R}^n, m\langle, \rangle, -\nabla U)$ sistema mecânico conservativo; e
- ▶ $h \in \mathbb{R}$

Defina em $M_h = \{p; U(p) < h\}$ a **métrica de Jacobi**

$$g_p^J(u, v) := (h - U(p))m\langle u, v \rangle$$

$\forall p \in M_h$ e $u, v \in T_p\mathbb{R}^n$.

Sistemas mecânicos conservativos

- ▶ $(\mathbb{R}^n, m\langle, \rangle, -\nabla U)$ sistema mecânico conservativo; e
- ▶ $h \in \mathbb{R}$

Defina em $M_h = \{p; U(p) < h\}$ a **métrica de Jacobi**

$$g_p^J(u, v) := (h - U(p))m\langle u, v \rangle$$

$\forall p \in M_h$ e $u, v \in T_p\mathbb{R}^n$.

Theorem

O movimento com energia h é uma geodésica da Lagrangeana

$$L^J(v_p) = g_p^J(v, v).$$

Métrica Riemanniana

Uma aplicação suave

$p \in A \subset \mathbb{R}^n \mapsto g_p : T_p\mathbb{R}^n \times T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é produto interno.

Métrica Riemanniana

Uma aplicação suave

$p \in A \subset \mathbb{R}^n \mapsto g_p : T_p\mathbb{R}^n \times T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é produto interno.

γ é **geodésica** de g se for geodésica de

$$E(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$$

Métrica Riemanniana

Uma aplicação suave

$p \in A \subset \mathbb{R}^n \mapsto g_p : T_p\mathbb{R}^n \times T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é produto interno.

γ é **geodésica** de g se for geodésica de

$$E(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$$

E γ é **pré-geodésica** se for reparametrização de uma geodésica, ou equivalentemente, se for geodésica de

$$L(v) = \sqrt{g(v, v)}.$$

Exemplo

No plano superior podemos definir

$$g_{(x,y)}(u, v) = \frac{1}{y} \langle u, v \rangle$$

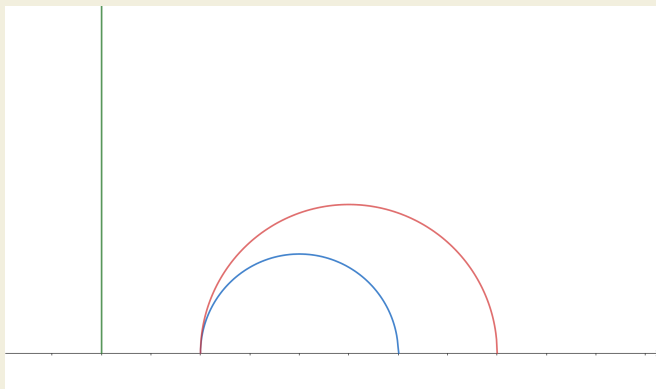


Figura: Geodésicas do modelo do plano superior de Poincaré

Geodésica magnética


Theorem

A geodésica magnética com energia c é geodésica de

$$R(v) = \alpha(v) + \beta(v)$$

onde

- ▶ $\alpha(v) := \sqrt{\frac{m}{2}} \|v\|$ é uma norma; e
- ▶ $\beta(v) = \frac{e}{\sqrt{2c}} \langle J(p), v \rangle$ é uma 1-forma.

-  Herrera, J., and Javaloyes, M. A. (2021). Stationary–Complete Spacetimes with non-standard splittings and pre-Randers metrics. *Journal of Geometry and Physics*, 163, 104120.

Norma de Minkowski

Uma função contínua $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ é uma **é uma norma de pré-Minkowski** se:

Norma de Minkowski

Uma função contínua $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ é uma **é uma norma de pré-Minkowski** se:

1. $F|_{\mathbb{R}^n \setminus 0}$ é suave;

Norma de Minkowski

Uma função contínua $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ é uma **é uma norma de pré-Minkowski** se:

1. $F|_{\mathbb{R}^n \setminus 0}$ é suave;
2. $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ and $\lambda > 0$;

Norma de Minkowski

Uma função contínua $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ é uma **norma de pré-Minkowski** se:

1. $F|_{\mathbb{R}^n \setminus 0}$ é suave;
2. $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ and $\lambda > 0$;

Dizemos que F é uma **norma Finsler** se adicionalmente

3. para qualquer $y \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, o **tensor fundamental**

$$\begin{aligned}g_y(u, v) &:= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(y + tu + sv) \Big|_{t=s=0} \\ &= \text{Hess}\left(\frac{1}{2} F^2\right)_v(u, w), \forall u, w \in T_v \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

é um produto interno.

Norma Euclidiana

Seja $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma norma (Euclidiana). Trivialmente α satisfaz 1. e 2. Além disso, verifica-se que

$$g_v(u, w) = \langle u, w \rangle_\alpha,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ é o produto interno associado a α , implicando que também α satisfaz o item 3.

Norma Randers

Sejam α e β uma norma e um funcional linear em \mathbb{R}^n . A função

$$R = \alpha + \beta$$

é norma pré-Minkowski.

Norma Randers

Sejam α e β uma norma e um funcional linear em \mathbb{R}^n . A função

$$R = \alpha + \beta$$

é norma pré-Minkowski.

Lemma

R é uma norma de Minkowski se, e somente se, $\alpha^*(\beta) < 1$.

Métrica Finsler

Uma **métrica pré-Finsler** (**métrica Finsler**) em $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua

$$F : TU \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

1. $F|_{TU \setminus \mathbf{0}}$ é suave;
2. $F_p := F|_{T_p \mathbb{R}^n}$ é uma norma de pré-Minkowski (Minkowski) em $T_p \mathbb{R}^n$ para qualquer $p \in U$.

Métrica Finsler

Uma **métrica pré-Finsler** (**métrica Finsler**) em $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua

$$F : TU \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

1. $F|_{TU \setminus \mathbf{0}}$ é suave;
2. $F_p := F|_{T_p\mathbb{R}^n}$ é uma norma de pré-Minkowski (Minkowski) em $T_p\mathbb{R}^n$ para qualquer $p \in U$.

O **tensor fundamental** de F associa a cada $v \in TU \setminus \mathbf{0}$ o produto interno

$$g_v : T_p\mathbb{R}^n \times T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

onde $p = \pi(v) \in U$.

Geodésica

Funcional comprimento:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b F(\gamma') dt$$

Funcional energia:

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b F^2(\gamma') dt$$

Geodésica

Funcional comprimento:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b F(\gamma') dt$$

Funcional energia:

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b F^2(\gamma') dt$$

γ é **geodésica** de F se for geodésica da Langrageana

$$E(v) = \frac{1}{2} F^2(v),$$

ou seja, ponto crítico de \mathcal{E} .

Existência e unicidade

Como $g_v = \frac{1}{2}(\text{Hess } F^2)_v$ é não-degenerado, dado $v \in TU$ existe única geodésica $\gamma_v : I_v \rightarrow U$ tal que

$$\gamma'_v(0) = v$$

e I_v é maximal.

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ é uma geodésica se, e somente se,

$$\gamma''_k + \sum_j \gamma'_i \gamma'_j \Gamma_{ij}^k(\gamma') = 0 \text{ (Equação Geodésica),}$$

onde $\Gamma_{ij}^k : T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são os símbolos de Christoffel.

História da Geometria Finsler em Göttingen

- ▶ Riemann

História da Geometria Finsler em Göttingen

- ▶ Riemann
- ▶ Minkowski

História da Geometria Finsler em Göttingen

- ▶ Riemann
- ▶ Minkowski
- ▶ Hilbert

História da Geometria Finsler em Göttingen

- ▶ Riemann
- ▶ Minkowski
- ▶ Hilbert
- ▶ Carathéodory

História da Geometria Finsler em Göttingen

- ▶ Riemann
- ▶ Minkowski
- ▶ Hilbert
- ▶ Carathéodory
- ▶ Courant

História da Geometria Finsler em Göttingen


- ▶ Riemann
- ▶ Minkowski
- ▶ Hilbert
- ▶ Carathéodory
- ▶ Courant
- ▶ Finsler

História da Geometria Finsler em Göttingen

- ▶ Riemann
- ▶ Minkowski
- ▶ Hilbert
- ▶ Carathéodory
- ▶ Courant
- ▶ Finsler
- ▶ Busemann

História da Geometria Finsler em Göttingen

- ▶ Riemann
- ▶ Minkowski
- ▶ Hilbert
- ▶ Carathéodory
- ▶ Courant
- ▶ Finsler
- ▶ Busemann

 Won, D. Y. (2015). On the history of the birth of Finsler geometry at göttingen. *Journal for History of Mathematics*, 28(3), 133-149.

Outros nomes...

- ▶ Zermelo
- ▶ Cartan
- ▶ Chern
- ▶ Shen
- ▶ Javaloyes

ETC...

Algumas Aplicações

- ▶ **Sistemas Ecológicos: Equações de Valterra.**

- 📖 Antonelli, P. L., and Miron, R. (Eds.). (2013). Lagrange and Finsler geometry: applications to physics and biology (Vol. 76). Springer Science and Business Media.

Algumas Aplicações

- ▶ **Sistemas Ecológicos: Equações de Valterra.**

- 📖 Antonelli, P. L., and Miron, R. (Eds.). (2013). Lagrange and Finsler geometry: applications to physics and biology (Vol. 76). Springer Science and Business Media.

- ▶ **Incêndios florestais.**

- 📖 Ángel Javaloyes, M., Pendás-Recondo, E., and Sánchez, M. (2023). A general model for wildfire propagation with wind and slope. *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry*, 7(2), 414-439.

Algumas Aplicações

- ▶ **Sistemas Ecológicos: Equações de Valterra.**

- 📖 Antonelli, P. L., and Miron, R. (Eds.). (2013). Lagrange and Finsler geometry: applications to physics and biology (Vol. 76). Springer Science and Business Media.

- ▶ **Incêndios florestais.**


- 📖 Ángel Javaloyes, M., Pendás-Recondo, E., and Sánchez, M. (2023). A general model for wildfire propagation with wind and slope. *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry*, 7(2), 414-439.

- ▶ **Propagação de onda em meio anisotrópico.**


- 📖 Pendás-Recondo, E. (2024). On the application of Lorentz-Finsler geometry to model wave propagation. arXiv preprint arXiv:2408.03206.

Algumas Aplicações


▶ Sistemas Ecológicos: Equações de Valterra.

 Antonelli, P. L., and Miron, R. (Eds.). (2013). Lagrange and Finsler geometry: applications to physics and biology (Vol. 76). Springer Science and Business Media.

▶ Incêndios florestais.

 Ángel Javaloyes, M., Pendás-Recondo, E., and Sánchez, M. (2023). A general model for wildfire propagation with wind and slope. *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry*, 7(2), 414-439.

▶ Propagação de onda em meio anisotrópico.

 Pendás-Recondo, E. (2024). On the application of Lorentz-Finsler geometry to model wave propagation. arXiv preprint arXiv:2408.03206.

Algumas aplicações

- ▶ Teoria da Informação.


- 📖 Shen, Z. (2006). Riemann-Finsler geometry with applications to information geometry. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 27, 73-94.

Algumas aplicações

▶ Teoria da Informação.

 Shen, Z. (2006). Riemann-Finsler geometry with applications to information geometry. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, 27, 73-94.

▶ Relatividade.

 Javaloyes, M. Á., Sánchez, M., and Villaseñor, F. F. (2022). On the significance of the stress–energy tensor in Finsler spacetimes. *Universe*, 8(2), 93.

Uma questão...

Considere um campo MHE:

- ▶ B campo magnético; e
- ▶ $\rho : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ função pressão.

Imagine uma métrica Finsler Z em U construída para modelar a trajetória do plasma:

$$\nabla \rho = J \times B.$$

Uma questão...

Considere um campo MHE:

- ▶ B campo magnético; e
- ▶ $\rho : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ função pressão.

Imagine uma métrica Finsler Z em U construída para modelar a trajetória do plasma:

$$\nabla \rho = J \times B.$$

Questões: Quais propriedades geométricas possui ρ ?

- ▶ ρ é isoparamétrica?
- ▶ os toros $\rho^{-1}(c)$ são superfícies mínimas?

Obrigado!