

Geometria dos Determinantes e Multivetores Complexos

IX Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA - EPGMAT

André L. G. Mandolesi

Instituto de Matemática e Estatística, UFBA.
andre.mandolesi@ufba.br

21/11/2024

Determinantes Reais

Significado geométrico de determinantes reais é bem conhecido.

Ex: em \mathbb{R}^2 ,

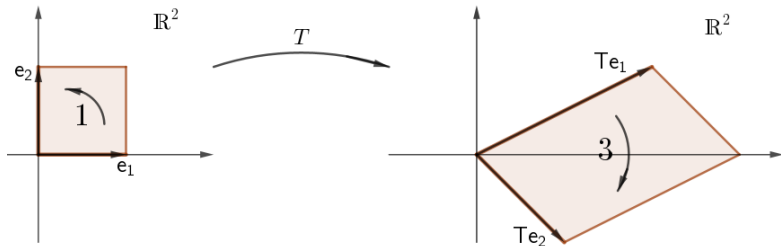
$$e_1 = (1, 0)$$

$$e_2 = (0, 1)$$

$$Te_1 = (2, 1)$$

$$Te_2 = (1, -1)$$

$$\det T = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

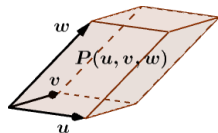


$|\det T|$ é o 2-volume (área) do paralelogramo formado por Te_1 e Te_2 .
Equivalentemente, é o fator pelo qual T expande todas as áreas em \mathbb{R}^2 .
O sinal indica a mudança de orientação.

Vamos lembrar por que isso vale.

$M(v_1, \dots, v_n) \in M(n, \mathbb{R})$ matriz com colunas $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$.

$P(v_1, \dots, v_n) =$ paralelepípedo gerado por v_1, \dots, v_n
 $= \{ \sum_{i=1}^n t_i v_i : 0 \leq t_i \leq 1 \}$.



$\mathcal{V}(v_1, \dots, v_n) = n$ -volume (i.e. n -dimensional) de $P(v_1, \dots, v_n)$.

Transformação linear dada por M leva o hipercubo unitário $P(e_1, \dots, e_n)$, gerado pela base canônica, em $P(v_1, \dots, v_n)$, logo expande todos os n -volumes de \mathbb{R}^n por um fator $\mathcal{V}(v_1, \dots, v_n)$.

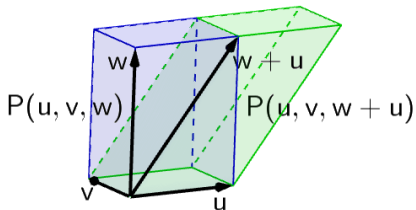
Proposição

$$|\det M(v_1, \dots, v_n)| = \mathcal{V}(v_1, \dots, v_n).$$

Prova.

A ideia é que \mathcal{V} tem as propriedades que caracterizam $|\det M|$:

- $\mathcal{V}(v_1, \dots, v_n) = 0 \Leftrightarrow$ vetores L.D.
- $\mathcal{V}(e_1, \dots, e_n) = 1$ para a base canônica.
- $\mathcal{V}(v_1, \dots, v_n)$ não depende da ordem dos v_i 's.
- $\mathcal{V}(c \cdot v_1, v_2, \dots, v_n) = |c| \cdot \mathcal{V}(v_1, \dots, v_n)$.
- $\mathcal{V}(v_1 + v_i, v_2, \dots, v_n) = \mathcal{V}(v_1, \dots, v_n)$, se $i \neq 1$.



Determinantes Complejos

Ex: em $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$,

$$e_1 = (1, 0) \quad T e_1 = (2 + i, \sqrt{3})$$

$$e_2 = (0, 1) \quad T e_2 = (-5i, 2 - i)$$

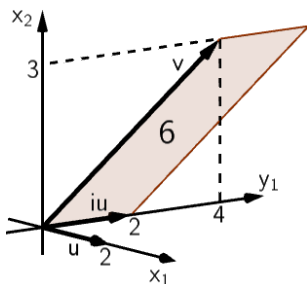
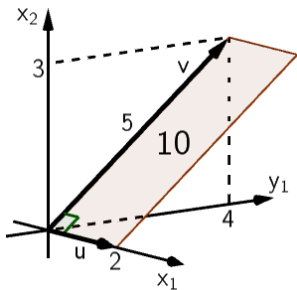
$$\det T = \begin{vmatrix} 2 + i & -5i \\ \sqrt{3} & 2 - i \end{vmatrix} = 5 + 5i\sqrt{3} = 10 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Significado geométrico difícil de visualizar em

$$\mathbb{C}^2 = \{(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)\} \cong \mathbb{R}^4 = \{(x_1, y_1, x_2, y_2)\}.$$

Vamos tentar um exemplo com $y_2 = 0$, para poder representar em \mathbb{R}^3 .

Ex: $\mathbb{C}^2 : u = (2, 0), \quad iu = (2i, 0), \quad v = (4i, 3)$
 $\mathbb{R}^4 : u = (2, 0, 0, 0), \quad iu = (0, 2, 0, 0), \quad v = (0, 4, 3, 0)$



$$\mathcal{V}(u, v) = 10 \neq \mathcal{V}(iu, v) = 6$$

$\mathcal{V}(c \cdot v_1, v_2, \dots, v_n) \neq |c| \cdot \mathcal{V}(v_1, \dots, v_n)$ pois $\cdot c \in \mathbb{C}$ rotacional. Mas $|\det M(c \cdot v_1, v_2, \dots, v_n)| = |c| \cdot |\det M(v_1, \dots, v_n)|$, logo $|\det M| \neq \mathcal{V}$.

Vamos interpretar o determinante complexo num exemplo simples.

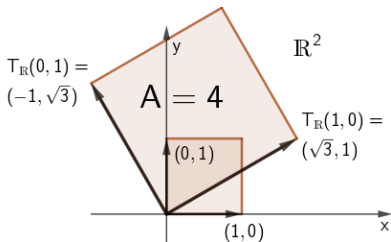
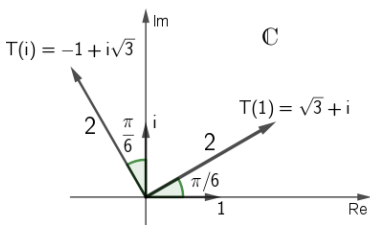
Ex: em $\mathbb{C}^1 = \{z = x + iy\} \cong \mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$,

$$Tz = (\sqrt{3} + i)z$$

$$T_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\det T = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\det T_{\mathbb{R}} = 4$$



Note que $\det T_{\mathbb{R}} = |\det T|^2$. Coincidência?

Proposição

$$\text{Se } Z = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}+iy_{11} & \cdots & x_{1n}+iy_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}+iy_{n1} & \cdots & x_{nn}+iy_{nn} \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{C}),$$

$$\text{e } R = \begin{pmatrix} x_{11} & -y_{11} & \cdots & x_{1n} & -y_{1n} \\ y_{11} & x_{11} & \cdots & y_{1n} & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & -y_{n1} & \cdots & x_{nn} & -y_{nn} \\ y_{n1} & x_{n1} & \cdots & y_{nn} & x_{nn} \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{R}), \text{ então } |\det_{\mathbb{C}} Z|^2 = \det_{\mathbb{R}} R.$$

Prova: Vamos usar o seguinte isomorfismo de corpos:

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ x + iy &\mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se $\det_{\mathbb{C}} Z = a + ib$ então

$$\det_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & -y_{11} \\ y_{11} & x_{11} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} x_{1n} & -y_{1n} \\ y_{1n} & x_{1n} \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} x_{n1} & -y_{n1} \\ y_{n1} & x_{n1} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} x_{nn} & -y_{nn} \\ y_{nn} & x_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \det_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} \phi(z_{11}) & \cdots & \phi(z_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(z_{n1}) & \cdots & \phi(z_{nn}) \end{pmatrix} \\ = \phi(\det_{\mathbb{C}} Z) = \phi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Como as submatrizes comutam,

$$\det_{\mathbb{R}} R = \det_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} x_{11} & -y_{11} & \cdots & x_{1n} & -y_{1n} \\ y_{11} & x_{11} & \cdots & y_{1n} & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & -y_{n1} & \cdots & x_{nn} & -y_{nn} \\ y_{n1} & x_{n1} & \cdots & y_{nn} & x_{nn} \end{pmatrix} = \det_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \\ = |a + ib|^2 = |\det_{\mathbb{C}} Z|^2. \quad \square$$

Outra maneira, equivalente à anterior pois R e \tilde{R} diferem por um número igual de transposições de linhas e colunas, logo $\det_{\mathbb{R}} \tilde{R} = \det_{\mathbb{R}} R$.

Proposição

$$\text{Se } X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R}), \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R}),$$

$$Z = X + iY = \begin{pmatrix} x_{11} + iy_{11} & \cdots & x_{1n} + iy_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} + iy_{n1} & \cdots & x_{nn} + iy_{nn} \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{C}), \text{ e}$$

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{R}), \text{ então } |\det_{\mathbb{C}} Z|^2 = \det_{\mathbb{R}} \tilde{R}.$$

Prova: Se $\mathbf{1}_{n \times n}$ é a identidade, e $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & i\mathbf{1} \\ i\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{C})$, então

$$T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -i\mathbf{1} \\ -i\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad T\tilde{R}T^{-1} = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \bar{Z} \end{pmatrix},$$

$$\det_{\mathbb{R}} \tilde{R} = \det_{\mathbb{C}} \tilde{R} = \det_{\mathbb{C}} (T\tilde{R}T^{-1}) = (\det_{\mathbb{C}} Z)(\det_{\mathbb{C}} \bar{Z}) = |\det_{\mathbb{C}} Z|^2. \quad \square$$

Corolário

$|\det_{\mathbb{C}} M(v_1, \dots, v_n)|^2 = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n)$, onde $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ é o $2n$ -volume do paralelepípedo $P(v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n)$ em \mathbb{R}^{2n} .

Prova:

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} = M(v_1, \dots, v_n) \text{ com } v_j = \begin{pmatrix} z_{1j} \\ \vdots \\ z_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1j} + iy_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} + iy_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

$$\text{Identificando } \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}, \text{ temos } v_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ y_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \\ y_{nj} \end{pmatrix} \text{ e } iv_j = \begin{pmatrix} -y_{1j} \\ x_{1j} \\ \vdots \\ -y_{nj} \\ x_{nj} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Logo, } R = \begin{pmatrix} x_{11} & -y_{11} & \cdots & x_{1n} & -y_{1n} \\ y_{11} & x_{11} & \cdots & y_{1n} & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & -y_{n1} & \cdots & x_{nn} & -y_{nn} \\ y_{n1} & x_{n1} & \cdots & y_{nn} & x_{nn} \end{pmatrix} = M_{\mathbb{R}}(v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n),$$

onde $M_{\mathbb{R}}$ é a matriz formada com esses vetores vistos em \mathbb{R}^{2n} .

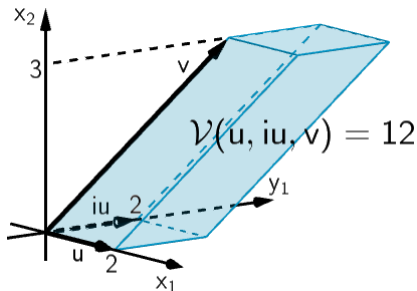
Assim, $|\det_{\mathbb{C}} M(v_1, \dots, v_n)|^2 = \det_{\mathbb{R}} M_{\mathbb{R}}(v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n) = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$. \square

Ex:

$$\mathbb{C}^2 : u = (2, 0), \quad iu = (2i, 0), \quad v = (4i, 3), \quad iv = (-4, 3i)$$

$$\mathbb{R}^4 : u = (2, 0, 0, 0), \quad iu = (0, 2, 0, 0), \quad v = (0, 4, 3, 0), \quad iv = (-4, 0, 0, 3)$$

$$\det_{\mathbb{C}} M(u, v) = \begin{vmatrix} 2 & 4i \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad \det_{\mathbb{R}} M_{\mathbb{R}}(u, iu, v, iv) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 36.$$



$$\mathcal{V}(u, iu, v, iv) = \mathcal{V}(u, iu, v) \cdot 3 = 36, \text{ pois } iv \text{ tem altura } 3 \text{ com } P(u, iu, v).$$

Gramiano

Sejam $v_1, \dots, v_p \in V \subset \mathbb{R}^n$, com $\dim_{\mathbb{R}} V = p$.

$M = M(v_1, \dots, v_p) \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ não é quadrada, não há $\det M$.

Sendo $\langle v_i, v_j \rangle = v_i^T v_j$ o produto interno, a **matriz Gramiana** é

$$G = G(v_1, \dots, v_p) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{p \times p} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_p, v_p \rangle \end{pmatrix} = M^T M.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ não depende da base ortonormal, logo $G = N^T N$ com $N \in M(p, \mathbb{R})$ formada por v_1, \dots, v_p decompostos em base ortonormal de V , e assim

$$\det G = \det(N^T N) = (\det N)^2 = \mathcal{V}(v_1, \dots, v_p)^2.$$

Ex: área de paralelogramo formado por $u = (3, -1, 2)$ e $v = (-2, 2, 0)$,

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = M^T M = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \sqrt{\det G} = 4\sqrt{3}.$$

Sejam $v_1, \dots, v_p \in V \subset \mathbb{C}^n$, com $\dim_{\mathbb{C}} V = p$.

$$M = M(v_1, \dots, v_p) \in M_{n \times p}(\mathbb{C}).$$

Sendo $\langle v_i, v_j \rangle = \bar{v}_i^T v_j$ o produto **Hermitiano**,

$$G = G(v_1, \dots, v_p) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{p \times p} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_p, v_p \rangle \end{pmatrix} = \bar{M}^T M.$$

Proposição

$$\det_{\mathbb{C}} G = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(v_1, iv_1, \dots, v_p, iv_p).$$

Obs: sem quadrado, mas agora é volume $2p$ -dimensional.

Prova: $G = \bar{N}^T N$ com $N \in M(p, \mathbb{C})$ formada por v_1, \dots, v_p em base ortonormal de V , e

$$\det_{\mathbb{C}} G = \det_{\mathbb{C}}(\bar{N}^T N) = |\det_{\mathbb{C}} N|^2 = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(v_1, iv_1, \dots, v_p, iv_p). \quad \square$$

Ex: em \mathbb{C}^3 , sejam $u = (2 + i, 0, 1 + 3i)$ e $v = (1, -i, 1 + i)$.

$$M(u, v) = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 0 & -i \\ 1+3i & 1+i \end{pmatrix}, \quad G = \bar{M}^T M = \begin{pmatrix} 15 & 6-3i \\ 6+3i & 4 \end{pmatrix}, \quad \det_{\mathbb{C}} G = 15.$$

Logo $P(u, iu, v, iv) \subset \mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6$ tem 4-volume $\mathcal{V}_{\mathbb{R}} = \det_{\mathbb{C}} G = 15$.

De fato, como vetores de \mathbb{R}^6 temos

$$M_{\mathbb{R}}(u, iu, v, iv) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_{\mathbb{R}} = M_{\mathbb{R}}^T M_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 15 & -3 & 6 \\ 6 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

e novamente $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(u, iu, v, iv) = \sqrt{\det_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}}} = \sqrt{225} = 15$.

Álgebra Exterior de Grassmann

Álgebra exterior $\wedge \mathbb{F}^n$, onde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , é formada por **multivetores**, combinações lineares de **blades** $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$, com $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{F}^n$.

Produto exterior \wedge é associativo, bilinear, e alternante:

$v \wedge v = 0$, logo $u \wedge v = -v \wedge u$ para $u, v \in \mathbb{F}^n$.

Produto interno/Hermitiano de $A = u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$ e $B = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ é $\langle A, B \rangle = \det(\langle u_i, v_j \rangle)_{p \times p}$.

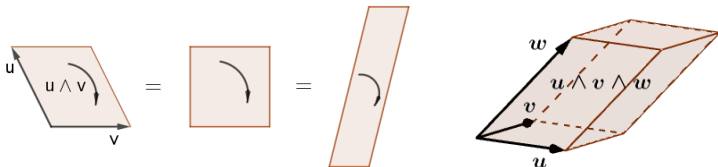
Dada base ortonormal (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{F}^n , outra de $\wedge \mathbb{F}^n$ é formada por blades $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ com $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$.

Proposição

$$\|v_1 \wedge \cdots \wedge v_p\| = \begin{cases} \mathcal{V}(v_1, \dots, v_p) & \text{se } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \sqrt{\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n)} & \text{se } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Prova: $\|B\| = \sqrt{\langle B, B \rangle} = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)} = \sqrt{\det G}$. □

No caso real, $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ é representada por $P(v_1, \dots, v_p)$, mas de forma não única: por ex., $u \wedge v = (u + v) \wedge v$.



Uma blade real $B = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ é caracterizada unicamente por:

- um subespaço orientado $\text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$;
- um valor $\|B\|$ dado a ele (volume, rotação, campo magnético, etc.).

Ex: Em \mathbb{R}^2 , sejam $u = \hat{i} + 2\hat{j}$ e $v = \hat{i} - \hat{j}$.

$$u \wedge v = (\hat{i} + 2\hat{j}) \wedge (\hat{i} - \hat{j}) = \hat{i} \wedge \hat{i} - \hat{i} \wedge \hat{j} + 2\hat{j} \wedge \hat{i} - 2\hat{j} \wedge \hat{j} = -3\hat{i} \wedge \hat{j}.$$

$\|u \wedge v\| = 3 = \text{área do paralelogramo formado por } u \text{ e } v.$

No caso complexo tal representação **não** é adequada, já que $\|B\| \neq \mathcal{V}$.

Ex: $u = (2 + i)e_1 + 7ie_2$ e $v = e_1 + (1 + 5i)e_2$, na base canônica $\{e_1, e_2\}$ de \mathbb{C}^2 .

$$u \wedge v = (2 + i)(1 + 5i)e_1 \wedge e_2 + 7ie_2 \wedge e_1 = (-3 + 4i)e_1 \wedge e_2$$

$$\|u \wedge v\| = |-3 + 4i| = 5 \quad \Rightarrow \quad P(u, iv, v, iv) \text{ tem 4-volume } 25.$$

$$\det_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}}(u, v) = \begin{vmatrix} 54 & 37 \\ 37 & 27 \end{vmatrix} = 89 \quad \Rightarrow \quad P(u, v) \text{ tem área } \sqrt{89} \cong 9.4.$$

Esse paralelogramos não representam $u \wedge v$ de forma óbvia.

Índice de Realidade

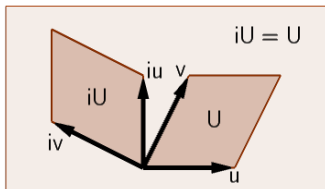
Definição

Subespaço real $U \subset \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ tem **índice de realidade**

$$\rho(U) = \sqrt{\sin \Upsilon_{U, iU}}, \quad \text{onde } iU = \{iu : u \in U\}.$$

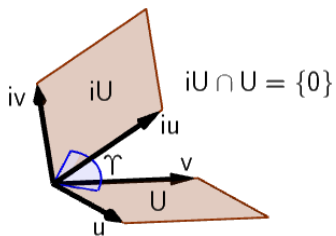
$\rho(U)$ mede como U falha em ser ou conter um subespaço complexo.

Ex: se $U = \text{span}_{\mathbb{R}}\{u, v\}$ então $iU = \text{span}_{\mathbb{R}}\{iu, iv\}$, e podemos ter:

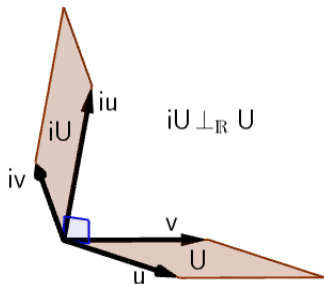


$\rho(U) = 0$, U é **holomórfico**
(é subespaço complexo)

(Se $\dim_{\mathbb{R}} U > 2$, $\rho(U) = 0 \Leftrightarrow$
 U contém subespaço complexo)



$\rho(U) \neq 0$, U é **puramente real**
(não contém subespaço complexo)



$\rho(U) = 1$, U é **totalmente real**
(produto Hermitiano é real em U)

Theorem (Mandolesi, 2024)

Se $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{C}^n$ e $U = \text{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \dots, v_p\} \subset \mathbb{R}^{2n}$,

- $\|v_1 \wedge \dots \wedge v_p\| = \|v_1 \Delta \dots \Delta v_p\| \cdot \rho(U)$.
- $\det_{\mathbb{C}} G(v_1, \dots, v_p) = \det_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_p) \cdot \rho(U)^2$.
- $|\det_{\mathbb{C}} M(v_1, \dots, v_n)| = \mathcal{V}(v_1, \dots, v_n) \cdot \rho(U)$, se $p = n$.

Prova: $\|v_1 \wedge \dots \wedge v_p\|^2 = \mathcal{V}(v_1, iv_1, \dots, v_p, iv_p)$

$$= \|v_1 \Delta iv_1 \Delta \dots \Delta v_p \Delta iv_p\|$$

$$= \|(v_1 \Delta \dots \Delta v_p) \Delta (iv_1 \Delta \dots \Delta iv_p)\|$$

$$= \|v_1 \Delta \dots \Delta v_p\| \cdot \|iv_1 \Delta \dots \Delta iv_p\| \cdot \sin \Upsilon_{U, iU}$$

$$= \|v_1 \Delta \dots \Delta v_p\|^2 \cdot \rho(U)^2$$

$$\det_{\mathbb{C}} G(v_1, \dots, v_p) = \|v_1 \wedge \dots \wedge v_p\|^2 = \|v_1 \Delta \dots \Delta v_p\|^2 \cdot \rho(U)^2$$

$$= \det_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_p) \cdot \rho(U)^2$$

$$|\det_{\mathbb{C}} M(v_1, \dots, v_n)|^2 = \det_{\mathbb{C}}(\bar{M}^T M) = \det_{\mathbb{C}} G(v_1, \dots, v_n)$$

$$= \det_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_n) \cdot \rho(U)^2 = \mathcal{V}(v_1, \dots, v_n)^2 \cdot \rho(U)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Ex: em } \mathbb{C}^2, \quad u &= (2, 0) & \det_{\mathbb{C}} M(u, v) &= 6 \\ v &= (4i, 3) & \mathcal{V}(u, v) &= 10 \end{aligned}$$

$$\text{Logo } U = \text{span}_{\mathbb{R}}\{u, v\} \text{ tem } \rho(U) = \frac{|\det_{\mathbb{C}} M(u, v)|}{\mathcal{V}(u, v)} = 0.6$$

Na base canônica (e_1, \dots, e_4) de \mathbb{R}^4 ,

$$\begin{aligned} u &= 2e_1 & iu &= 2e_2, \\ v &= 4e_2 + 3e_3, & iv &= -4e_1 + 3e_4 \\ u \Delta v &= 8e_1 \Delta e_2 + 6e_1 \Delta e_3 & iu \Delta iv &= 8e_1 \Delta e_2 + 6e_2 \Delta e_4 \\ \|u \Delta v\| &= \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 & \|iu \Delta iv\| &= 10 \end{aligned}$$

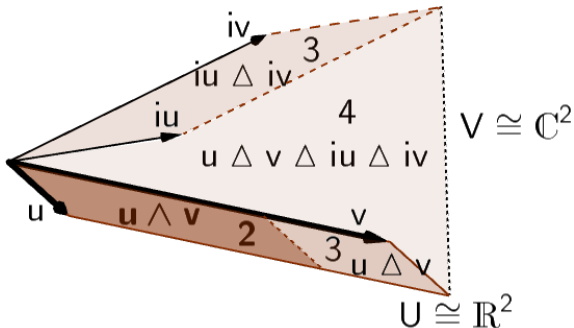
$$u \Delta v \Delta iu \Delta iv = -36e_1 \Delta e_2 \Delta e_3 \Delta e_4$$

$$\sin \Upsilon_{U, iU} = \frac{\|u \Delta v \Delta iu \Delta iv\|}{\|u \Delta v\| \|iu \Delta iv\|} = \frac{36}{10 \cdot 10} = 0.36 \Rightarrow \rho(U) = \sqrt{0.36} = 0.6$$

Na base canônica (f_1, f_2) de \mathbb{C}^2 ,

$$u = 2f_1, v = 4if_1 + 3f_2, u \wedge v = 6f_1 \wedge f_2 \Rightarrow \rho(U) = \frac{\|u \wedge v\|}{\|u \Delta v\|} = \frac{6}{10} = 0.6$$

Ex:



$u \Delta v$ vista como paralelogramo de área $\|u \Delta v\| = 3$ no plano U .

Sendo rotação dele, $iu \Delta iv$ também tem área 3. Mas não gira ortogonalmente a U , e o paralelepípedo 4D $u \Delta v \Delta iu \Delta iv$ tem $\mathcal{V} = 4$.

$u \wedge v$ é vista como $\frac{2}{3}$ da área de $u \Delta v$, pois $\rho(U) = \sqrt{\frac{4}{3 \cdot 3}} = \frac{2}{3}$.

Atribui valor $\|u \wedge v\| = 2$ a $V = \text{span}_{\mathbb{C}}\{u, v\} \cong \text{span}_{\mathbb{R}}\{u, v, iu, iv\}$.

Teoremas de Pitágoras Generalizados

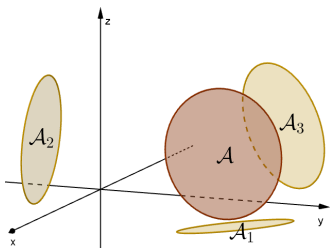
Decompondo uma p -blade $B = \sum_I B_I$ na base ortonormal $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$, cada B_I é a projeção num *subespaço coordenado* de dim p , e $\|B\|^2 = \sum_I \|B_I\|^2$. Logo:

Teorema (Conant-Beyer 1974)

Se \mathcal{V} é volume p -dimensional num subespaço p -dimensional de \mathbb{R}^n ,

$$\mathcal{V}^2 = \sum_I \mathcal{V}_I^2,$$

onde os \mathcal{V}_I 's são suas projeções nos subespaços coordenados de dim p .



$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2$$

Referências

- A.L.G. Mandolesi, *Full Geometric Interpretation of Complex Blades, Determinants and Gramians*, arXiv:2403.17022, 2024.
- A.L.G. Mandolesi, *Asymmetric Metrics on the Full Grassmannian of Subspaces of Different Dimensions*, arXiv:2208.05026, 2022.
- A.L.G. Mandolesi, *Blade products and angles between subspaces*, Adv. Appl. Clifford Algebras 31(69), 2021.
- A.L.G. Mandolesi, *Projection Factors and Generalized Real and Complex Pythagorean Theorems*, Adv. Appl. Clifford Algebras 30(43), 2020.
- D. R. Conant, W. A. Beyer, *Generalized Pythagorean Theorem*, Amer. Math. Monthly, 81(3):262–265, 1974.

