Identidades Polinomiais para as álgebras de Leibniz de dimensão 3: RR_1 e RR_2

Janara Ramos Nascimento

Orientadora: Profa. Dra. Manuela da Silva Souza

Universidade Federal da Bahia - Instituto de Matemática e Estatística

Novembro / 2024

Definições iniciais

Definição

Uma espaço vetorial A é chamado de **álgebra**, se A é munido com uma operação $*$, tal que para todo a, b, c $\in A$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$:

(i) $(a+b) * c = a * c + b * c$;

(ii) $a * (b+c) = a * b + a * c$;

(iii) $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha c)$.

A álgebra A pode ser dita:

- comutativa
- associativa
- com unidade

SCIENDI FUNDAMEN
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA | UFBA

Exemplos:

(1) O conjunto $M_n(\mathbb{K})$ das matrizes $n \times n$ com entradas em um corpo $\mathbb{K}$ é uma álgebra associativa com unidade que não é comutativa para $n \geq 2$. A sua unidade é a matriz identidade I_n.

Exemplos:

(1) O conjunto $M_n(\mathbb{K})$ das matrizes $n \times n$ com entradas em um corpo $\mathbb{K}$ é uma álgebra associativa com unidade que não é comutativa para $n \geq 2$. A sua unidade é a matriz identidade I_n.

(2) O espaço vetorial $\mathbb{K}[x]$ dos polinômios na variável x com coeficientes em $\mathbb{K}$, munido do produto usual de polinômios, é uma álgebra associativa, comutativa com unidade.

Definição

Dizemos que A é uma **álgebra de Lie** se, para cada a, b, c $\in A$, vale

(i) aa = 0, (*propriedade anticomutativa*);

(ii) (ab)c + (bc)a + (ca)b = 0, (*identidade de Jacobi*).

Definimos o **comutador de Lie** por:

$$\begin{array}{rcl} [,] : A \times A & \longrightarrow & A \\ (a, b) & \mapsto & ab - ba \end{array}$$

Definição

Uma álgebra L sobre um corpo $\mathbb{K}$ é chamada **álgebra de Leibniz** se satisfaz a seguinte identidade, chamada de *identidade de Leibniz*:

$$(xy)z = (xz)y + x(yz), \forall\, x, y, z \in L$$

Exemplo:

Seja L uma álgebra bidimensional com uma base $\{x, y\}$ e o produto dado da seguinte forma:

$$yy = xy = 0,\ yx = y \text{ e } xx = y.$$

Então L é uma álgebra de Leibniz, mas não é uma álgebra de Lie.

Definição

Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ um conjunto infinito e enumerável e $\mathcal{D}(X)$ a álgebra livre de Leibniz, livremente gerada por X. Dizemos que um um polinômio

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}(X)$$

é uma identidade polinomial para a álgebra de Leibniz L, se

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \text{ para quaisquer } a_1, \ldots, a_n \in L.$$

Definição

Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ um conjunto infinito e enumerável e $\mathcal{D}(X)$ a álgebra livre de Leibniz, livremente gerada por X. Dizemos que um um polinômio

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}(X)$$

é uma identidade polinomial para a álgebra de Leibniz L, se

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \text{ para quaisquer } a_1, \ldots, a_n \in L.$$

Exemplos:

(1) O polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2)x_3 - x_1(x_2 x_3)$ é identidade polinomial para toda álgebra associativa.

(2) O polinômio $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_2 x_1$ é uma identidade polinomial para toda álgebra comutativa.

Definição

Um ideal *I* de $\mathcal{D}(X)$ é chamado de *T-ideal* se é invariante por todos os endomorfismos de $\mathcal{D}(X)$.

O conjunto ***T(A)*** das identidades polinomiais de uma álgebra é um T-ideal.

Definição

Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ base de L. Definimos as álgebras RR_1 e RR_2 como os produtos nos elementos da base, dados por:

$$RR_1 : e_1 e_3 = -2e_1, \ e_2 e_2 = e_1, \ e_2 e_3 = -e_2, \ e_3 e_2 = e_2; \tag{1}$$

$$RR_2 : e_1 e_3 = \alpha e_1, e_2 e_3 = -e_2, \ e_3 e_2 = e_2, \ com\ \alpha \in \mathbb{K}. \tag{2}$$

e os demais produtos são iguais a zero.

Definição

Um polinômio f é dito:

- **homogêneo** em x_i se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i;
- **multihomogêneo** quando é homogêneo em todas as variáveis;
- **multilinear** se é multihomogêneo com multigrau $(1, 1, \ldots, 1)$.

Definição

Um polinômio f é dito:

- **homogêneo** em x_i se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i;
- **multihomogêneo** quando é homogêneo em todas as variáveis;
- **multilinear** se é multihomogêneo com multigrau $(1, 1, \ldots, 1)$.

Exemplos:

(1) O polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 x_2)x_2)x_3 + (((x_1 x_1)x_2)x_2)x_3$ é homogêneo em x_2 e x_3.

(2) O polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_1 x_2)x_2 x_3 + (x_1 x_2 x_2)x_3 x_1$. é multihomogêneo de multigrau (2, 2, 1)

(3) O polinômio $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_2 x_1$ é multilinear.

Polinômio multilinear de grau 3 na álgebra livre de Leibniz:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \eta_1(x_1x_2)x_3 + \eta_2(x_1x_3)x_2 + \eta_3(x_2x_1)x_3 + \eta_4(x_2x_3)x_1 + \eta_5(x_3x_1)x_2 + \eta_6(x_3x_2)x_1$$

As álgebras RR_1 e RR_2 não possuem identidades multilineares de grau 2.

Para RR_1, temos:

- A álgebra RR_1 não possui identidades multilineares de grau 3;

Identidades polinomiais encontradas até agora:

- O polinômio $(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6)$;
- O polinômio $(x_1 \circ x_2)(x_3x_4)$;
- O polinômio $(x_1x_2)(x_3x_4) - (x_3x_4)(x_1x_2)$;
- O polinômio $(x_1x_2x_5)(x_3x_4) - (x_1x_2)(x_3x_4x_5)$.

Definição

Definimos o polinômio **standard de Leibniz** de grau 3 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_3(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\sigma} (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)}) x_{\sigma(3)} \\ &= (x_1 x_2) x_3 - (x_1 x_3) x_2 + (x_2 x_1) x_3 \\ &- (x_2 x_3) x_1 + (x_3 x_1) x_2 - (x_3 x_2) x_1 \end{aligned}$$

Para RR_2, temos:

- RR_2 possui identidade multilinear de grau 3 e toda identidade de grau 3, é um múltiplo da Standard S_3;
- RR_2 possui a identidade metabeliana $(x_1x_2)(x_3x_4)$ como identidade polinomial;
- O polinômio definido como

$$\sum_{\substack{\sigma\in S_2\{1,2\}\\ \tau\in S_2\{3,4\}}} (-1)^{\sigma}(-1)^{\tau}((x_{\sigma(1)}x_{\tau(3)})x_{\sigma(2)})x_{\tau(4)} := \tilde{x}_1\tilde{\tilde{x}}_2\tilde{x}_3\tilde{\tilde{x}}_4$$

é uma identidade polinomial para RR_2.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica 0. Então

(1) $T(RR_2) = \langle S_3, (x_1x_2)(x_3x_4), \tilde{x}_1\tilde{\tilde{x}}_2\tilde{x}_3\tilde{\tilde{x}}_4 \rangle^T$

(2) Uma base de $\frac{P_m}{P_m \cap Id(RR_2)}$, para $m \geq 4$, é dada por

- $\begin{cases} x_2x_3x_1x_4\cdots x_m \\ x_1x_ax_{j_1}\cdots x_{j_{m-2}} \\ x_ax_1x_{j_1}\cdots x_{j_{m-2}} \end{cases}$

onde $j_1 < \ldots < j_{m-2}$ e $a = 2, \ldots, m$.

- V. DRENSKY. **Free algebras and PI-algebras**. SpringerVerlarg, Singapore, 2000.
- A. GIAMBRUNO and M. ZAICEV. **Polinomial identities and asymptotic methods**. American Mathematical Society, USA, 2005.
- A. F. MELO JUNIOR. **Identidades polinomiais para as álgebras de Leibniz de dimensão menor ou igual a 3**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, 2017.
- I. RIKHSIBOEV and I. RAKHIMOV. **Classification on three dimensional complex leibniz algebras**. AIP Conference Proceedings, 2012.

Obrigada!