Sistemas diferenciais exteriores Darboux integráveis

Luiz Felipe de Jesus Borges

Orientador: Diego Catalano Ferraioli

IX Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA

18 de novembro de 2024

Sistemas diferenciais exteriores e distribuições suaves

Definição

Sejam M uma variedade suave e $\mathcal{I} \subset \Lambda^*(M)$ um ideal com respeito ao produto exterior. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um ***sistema diferencial exterior*** *(SDE), ou* ***ideal diferencial****, se $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$.*

Definição

*Sejam M uma variedade suave e $\mathcal{I} \subset \Lambda^*(M)$ um ideal com respeito ao produto exterior. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um **sistema diferencial exterior** (SDE), ou **ideal diferencial**, se $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$.*

Notações

- $\mathcal{I}^k$ é o $C^\infty(M)$-módulo das k-formas contidas em $\mathcal{I}$;
- $I^k = \bigcup_{p \in M} I^k_p$ é o subfibrado vetorial gerado pelas k-formas em $\mathcal{I}^k$;
- I é geralmente utilizado para denotar I^1.

Definição

*Uma **distribuição suave** de dimensão r é um subfibrado vetorial $\mathcal{F} = \bigcup_{p \in M} \mathcal{F}_p \subset TM$ tal que $\dim \mathcal{F}_p = r$ para todo $p \in M$.*

Definição

Uma ***distribuição suave*** *de dimensão r é um subfibrado vetorial $\mathcal{F} = \bigcup_{p \in M} \mathcal{F}_p \subset TM$ tal que $\dim \mathcal{F}_p = r$ para todo $p \in M$.*

Notações

- Denotamos

$$\mathcal{F} = Ann(I),$$

se $I \subset T^*M$ é o subfibrado vetorial tal que

$$I_p = \{\omega_p \in T_p^*M \mid \omega_p(\xi_p) = 0, \forall \xi_p \in D_p\},$$

e vice-versa $\mathcal{F} \subset TM$ é o subfibrado vetorial tal que

$$D_p = \{\xi_p \in T_pM \mid \omega_p(\xi_p) = 0, \forall \omega_p \in I_p\}.$$

Ideais algebricamente gerados

- Denotamos com

$$\{\omega^1, \dots, \omega^s\}_{alg} \subset \Lambda^*(M),$$

o ideal minimal que contém $\{\omega^1, \dots, \omega^s\}$. Um ideal dessa forma é dito ***algebricamente gerado*** por $\{\omega^1, \dots, \omega^s\}$;

Ideais algebricamente gerados

- Denotamos com

$$\{\omega^1, \ldots, \omega^s\}_{alg} \subset \Lambda^*(M),$$

  o ideal minimal que contém $\{\omega^1, \ldots, \omega^s\}$. Um ideal dessa forma é dito ***algebricamente gerado*** por $\{\omega^1, \ldots, \omega^s\}$;

- Denotamos com

$$\{\omega^1, \ldots, \omega^s\}_{diff} \subset \Lambda^*(M),$$

  o ideal minimal que contém $\{\omega^1, \ldots, \omega^s\}$ e os diferenciais exteriores destas formas, i.e. é o ideal diferencial minimal que contém $\{\omega^1, \ldots, \omega^s\}$. Os ideais diferenciais algebricamente gerados por 1-formas são chamados de ***sistemas Pfaffianos***.

Derivadas

- A **primeira derivada** de um subfibrado vetorial $I \subset T^*M$ é o subfibrado vetorial denotado com $I^{(1)}$ e definido da seguinte maneira
$$I^{(1)} := \{\omega \in I \mid d\omega \in I_{alg}\},$$
A **derivada** $k+1$**-ésima** de I é definida por
$$I^{(k+1)} := \left(I^{(k)}\right)^{(1)};$$

Derivadas

- A **primeira derivada** de um subfibrado vetorial $I \subset T^*M$ é o subfibrado vetorial denotado com $I^{(1)}$ e definido da seguinte maneira
$$I^{(1)} := \{\omega \in I \mid d\omega \in I_{alg}\},$$
A **derivada** $k+1$**-ésima** de I é definida por
$$I^{(k+1)} := (I^{(k)})^{(1)};$$

- A **primeira derivada** de um subfibrado vetorial $\mathcal{F} \subset TM$ é o subfibrado vetorial denotado com $\mathcal{F}^{(1)}$ e definido da seguinte maneira
$$\mathcal{F}^{(1)} := \mathcal{F} + [\mathcal{F}, \mathcal{F}],$$
A **derivada** $k+1$**-ésima** de I é definida por
$$\mathcal{F}^{(k+1)} := (\mathcal{F}^{(k)})^{(1)}.$$

Propriedade

Se $\mathcal{F} = Ann(I)$ então $\mathcal{F}^{(k)} = Ann(I^{(k)})$.

Variedades integrais

- Uma ***variedade integral*** de uma distribuição $\mathcal{F} = Ann(I)$ é uma subvariedade imersa $N \subset M$ tal que $T_pN \subset \mathcal{F}_p$, i.e. o pullback pela inclusão satisfaz $i_N^*(I) = \{0\}$. Além disto, N é chamada de variedade integral ***maximal*** se $\dim N = \dim \mathcal{F}$;

Variedades integrais

- Uma ***variedade integral*** de uma distribuição $\mathcal{F} = Ann(I)$ é uma subvariedade imersa $N \subset M$ tal que $T_pN \subset \mathcal{F}_p$, i.e. o pullback pela inclusão satisfaz $i_N^*(I) = \{0\}$. Além disto, N é chamada de variedade integral ***maximal*** se $\dim N = \dim \mathcal{F}$;
- Uma ***variedade integral*** de um SDE $\mathcal{I}$ é uma subvariedade imersa $N \subset M$ tal que $i_N^*(\mathcal{I}) = \{0\}$;

Variedades integrais

- Uma ***variedade integral*** de uma distribuição $\mathcal{F} = Ann(I)$ é uma subvariedade imersa $N \subset M$ tal que $T_pN \subset \mathcal{F}_p$, i.e. o pullback pela inclusão satisfaz $i_N^*(I) = \{0\}$. Além disto, N é chamada de variedade integral ***maximal*** se $\dim N = \dim \mathcal{F}$;
- Uma ***variedade integral*** de um SDE $\mathcal{I}$ é uma subvariedade imersa $N \subset M$ tal que $i_N^*(\mathcal{I}) = \{0\}$;
- Uma distribuição é **completamente integrável** se em todo ponto $p \in M$ existe uma variedade integral maximal que contém p.

Variedades integrais

- Uma ***variedade integral*** de uma distribuição $\mathcal{F} = Ann(I)$ é uma subvariedade imersa $N \subset M$ tal que $T_pN \subset \mathcal{F}_p$, i.e. o pullback pela inclusão satisfaz $i_N^*(I) = \{0\}$. Além disto, N é chamada de variedade integral ***maximal*** se $\dim N = \dim \mathcal{F}$;
- Uma ***variedade integral*** de um SDE $\mathcal{I}$ é uma subvariedade imersa $N \subset M$ tal que $i_N^*(\mathcal{I}) = \{0\}$;
- Uma distribuição é **completamente integrável** se em todo ponto $p \in M$ existe uma variedade integral maximal que contém p.

Teorema de Frobenius

São equivalentes

1. $\mathcal{F} = Ann(I)$ é completamente integrável;
2. $\mathcal{F}$ é involutiva, i.e. $\mathcal{F}^{(1)} = \mathcal{F}$;
3. $I^{(1)} = I$.

Sistemas Darboux integráveis

Definição

Um SDE $\mathcal{I}$ é um ***sistema decomponível*** *de tipo $[r, s]$ se existem subfibrados vetoriais $\hat{I}, \check{I}$ tais que*

(a) $T^*M = \hat{I} + \check{I}$;

(b) *$\mathcal{I}$ é algebricamente gerado pelas formas em $I = \hat{I} \bigcap \check{I}, \Lambda^2 \hat{I}, \Lambda^2 \check{I}$;*

(c) *r é a codimensão de I em $\hat{I}$ e s é a codimensão de I em $\check{I}$, respectivamente.*

Sistemas decomponíveis

Definição

Um SDE $\mathcal{I}$ é um ***sistema decomponível*** *de tipo $[r, s]$ se existem subfibrados vetoriais $\hat{I}, \check{I}$ tais que*

(a) $T^*M = \hat{I} + \check{I}$;

(b) $\mathcal{I}$ *é algebricamente gerado pelas formas em* $I = \hat{I} \bigcap \check{I}, \Lambda^2\hat{I}, \Lambda^2\check{I}$;

(c) r *é a codimensão de* I *em* $\hat{I}$ *e* s *é a codimensão de* I *em* $\check{I}$*, respectivamente.*

Definição

Uma distribuição suave Δ é um ***decomponível*** *de tipo $[s, r]$ se existem duas subdistribuições suaves $\hat{\Delta}, \check{\Delta} \subset \Delta$ tais que*

(a) $\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta}$;

(b) $[\hat{\Delta}, \check{\Delta}] \subset \Delta$;

(c) $s = \dim \hat{\Delta}$ *e* $r = \dim \check{\Delta}$.

Exemplo

Um exemplo de sistema decomponível de tipo $[2,2]$ é o SDE

$$\mathcal{I} = \{du - pdx - qdy, dp \wedge dx, dq \wedge dy\}_{alg},$$

sobre $\mathbb{R}^5$ com coordenadas x, y, u, p, q.

De fato, considerando

$$\hat{I} = \{dx, du - pdx - qdy, dp\}, \quad \check{I} = \{dy, du - pdx - qdy, dq\},$$

temos que

$$I = \hat{I} \bigcap \check{I} = \{du - pdx - qdy\}.$$

Sistemas Darboux integráveis

Definição

Um sistema decomponível $\mathcal{I}$ tal que $T^*M = \hat{I} + \check{I}$ é ***Darboux integrável*** *se*

(a) $\hat{I}^{(\infty)} \bigcap \check{I}^{(\infty)} = \{0\}$ *;*

(b) $\hat{I}^{(\infty)} + \check{I} = \hat{I} + \check{I}^{(\infty)} = T^*M$

Sistemas Darboux integráveis

Definição

*Um sistema decomponível $\mathcal{I}$ tal que $T^*M = \hat{I} + \check{I}$ é **Darboux integrável** se*

(a) $\hat{I}^{(\infty)} \bigcap \check{I}^{(\infty)} = \{0\}$;

(b) $\hat{I}^{(\infty)} + \check{I} = \hat{I} + \check{I}^{(\infty)} = T^*M$

Definição

*Uma distribuição decomponível $\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta}$ é **Darboux integrável** se*

(a) *Δ é completamente não integrável, i.e. $\Delta^{(\infty)} = TM$;*

(b) $\hat{\Delta}^{(\infty)} \bigcap \check{\Delta} = \hat{\Delta} \bigcap \check{\Delta}^{(\infty)} = \{0\}$.

Exemplo

O sistema decomponível de tipo $[2, 2]$

$$\mathcal{I} = \{du - pdx - qdy, dp \wedge dx, dq \wedge dy\}_{alg},$$

é Darboux integrável.

De fato, considerando

$$\hat{I} = \{dx, du - pdx - qdy, dp\}, \quad \check{I} = \{dy, du - pdx - qdy, dq\},$$

temos que

$$\hat{I}^{(\infty)} = \hat{I}^{(1)} = \{dx, dp\},$$

e

$$\check{I}^{(\infty)} = \check{I}^{(1)} = \{dy, dq\}.$$

Teorema

Sejam $\Delta, \hat{\Delta}, \check{\Delta}$ distribuições sobre uma variedade suave M tais que $\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta}$. Se denotarmos $\hat{\Delta} = Ann(\hat{I})$, $\check{\Delta} = Ann(\check{I})$, $I = \hat{I} \cap \check{I}$ e $\mathcal{I} = I_{diff}$, então $\Delta = \text{Ann}(I)$ e as seguintes equivalências são válidas

(i) Δ é decomponível de tipo $[r, s]$ se e só se $\mathcal{I}$ é um sistema decomponível de tipo $[s, r]$;

(ii) Δ é Darboux integrável se e só se $\mathcal{I}$ é Darboux integrável.

Teorema

Sejam $\Delta, \hat{\Delta}, \check{\Delta}$ distribuições sobre uma variedade suave M tais que $\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta}$. Se denotarmos $\hat{\Delta} = Ann(\hat{I})$, $\check{\Delta} = Ann(\check{I})$, $I = \hat{I} \cap \check{I}$ e $\mathcal{I} = I_{diff}$, então $\Delta = \mathrm{Ann}(I)$ e as seguintes equivalências são válidas

(i) Δ é decomponível de tipo $[r, s]$ se e só se $\mathcal{I}$ é um sistema decomponível de tipo $[s, r]$;

(ii) Δ é Darboux integrável se e só se $\mathcal{I}$ é Darboux integrável.

Teorema

Seja $\mathcal{I}$ um SDE decomponível de tipo $[s, r]$ sobre uma variedade suave M. Se $\hat{\Delta} = \mathrm{Ann}(\hat{I})$ e $\check{\Delta} = \mathrm{Ann}(\check{I})$, então as seguintes propriedades são válidas

(i) A distribuição $\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta}$ é decomponível de tipo $[r, s]$;

(ii) Se $\mathcal{I}$ é Darboux integrável então $\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta}$ é Darboux integrável.

Distribuições de Vessiot e Álgebras de Vessiot

Definição

*As **distribuições de Vessiot** de um sistema Darboux integrável $\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta}$, são as restrições*

$$\hat{\mathcal{V}} = \hat{\Delta}\big|_{\hat{N}}, \quad \check{\mathcal{V}} = \check{\Delta}\big|_{\check{N}},$$

onde $\hat{N}$ e $\check{N}$ são as variedades integrais maximais de $\hat{\Delta}^{(\infty)}$ e $\check{\Delta}^{(\infty)}$, respectivamente.

Definição

*As **distribuições de Vessiot** de um sistema Darboux integrável $\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta}$, são as restrições*

$$\hat{\mathcal{V}} = \hat{\Delta}|_{\hat{N}}, \quad \check{\mathcal{V}} = \check{\Delta}|_{\check{N}},$$

onde $\hat{N}$ e $\check{N}$ são as variedades integrais maximais de $\hat{\Delta}^{(\infty)}$ e $\check{\Delta}^{(\infty)}$, respectivamente.

Existência de bases comutantes

Seja $\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta}$ um sistema Darboux integrável. Então, existem $\{\hat{U}_i\}$ e $\{\check{U}_h\}$ bases locais de $\hat{\Delta}$ e $\check{\Delta}$, respectivamente, tais que $[\hat{U}_i, \check{U}_h] = 0$ para quaisquer i, h.

Teorema(Anderson, Fels, Vassiliou - 2009)

Sejam $\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta}$ um sistema Darboux integrável e $K = \hat{\Delta}^{(\infty)} \bigcap \check{\Delta}^{(\infty)}$. Então, existem $\{\hat{S}_i\}$ e $\{\check{S}_j\}$ bases locais de K, obtidas a partir dos comutadores de $\{\hat{U}_l\}$ e $\{\check{U}_h\}$ do teorema anterior, que satisfazem as seguintes propriedades

i. $[\hat{S}_i, \check{S}_j] = 0$;

ii. $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = C_{ij}^k \hat{S}_k$ e $[\check{S}_i, \check{S}_j] = C_{ij}^k \check{S}_k$.

Teorema(Anderson, Fels, Vassiliou - 2009)

Sejam $\Delta = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta}$ um sistema Darboux integrável e $K = \hat{\Delta}^{(\infty)} \bigcap \check{\Delta}^{(\infty)}$. Então, existem $\{\hat{S}_i\}$ e $\{\check{S}_j\}$ bases locais de K, obtidas a partir dos comutadores de $\{\hat{U}_l\}$ e $\{\check{U}_h\}$ do teorema anterior, que satisfazem as seguintes propriedades

i. $[\hat{S}_i, \check{S}_j] = 0$;

ii. $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = C_{ij}^k \hat{S}_k$ e $[\check{S}_i, \check{S}_j] = C_{ij}^k \check{S}_k$.

Definição

*A álgebra de Lie com constantes de estrutura C_{ij}^k é chamada de **álgebra de Vessiot** de Δ.*

Teorema (Anderson, Fels, Vassilou - 2009)

Seja $\mathcal{I}$ um sistema Darboux integrável sobre uma variedade M. Então, existem sistemas Pfaffianos W_1 e W_2 sobre variedades suaves M_1 e M_2, respectivamente, e um grupo de Lie G de simetrias finitas agindo sobre M_1 e M_2 tais que, localmente,

1. $M = {}^{M_1 \times M_2}\big/_{diag(G)}$;
2. $\mathcal{I} = {}^{(\pi_1^*(\mathcal{W}_1)+\pi_2^*(\mathcal{W}_2))}\big/_{diag(G)}$, onde $\mathcal{W}_i = {}^{W_i}/_{G}$;
3. A aplicação quociente $q\colon M_1 \times M_2 \to M$ da ação diagonal $diag(G)$ satisfaz

$$q^*(\mathcal{I}) \subset (\pi_1^*(\mathcal{W}_1) + \pi_2^*(\mathcal{W}_2)),$$

i.e. q é uma **fórmula de superposição**.

Equações Darboux integráveis

Considerando uma EDP

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

hiperbólica, i.e. $F_{u_{xy}}^2 - 4F_{u_{xx}}F_{u_{yy}} > 0$, temos a seguinte

Proposição

Em todo prolongamento $\mathcal{E}^h$ de uma equação hiperbólica $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ a distribuição de Cartan $\mathcal{C}^{h+2}(\mathcal{E})$ é uma distribuição decomponível, que se decompõe em

$$\mathcal{C}^{h+2}(\mathcal{E}) = \hat{\Delta}^h \oplus \check{\Delta}^h,$$

com $\dim \hat{\Delta}^h = \dim \check{\Delta}^h = 2$.

Considerando uma EDP

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

hiperbólica, i.e. $F_{u_{xy}}^2 - 4F_{u_{xx}}F_{u_{yy}} > 0$, temos a seguinte

Proposição

Em todo prolongamento $\mathcal{E}^h$ de uma equação hiperbólica $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ a distribuição de Cartan $\mathcal{C}^{h+2}(\mathcal{E})$ é uma distribuição decomponível, que se decompõe em

$$\mathcal{C}^{h+2}(\mathcal{E}) = \hat{\Delta}^h \oplus \check{\Delta}^h,$$

com $\dim \hat{\Delta}^h = \dim \check{\Delta}^h = 2$.

Definição

Uma equação hiperbólica é Darboux integrável no nível $h + 2$, com $h \geqslant 0$, se $\mathcal{C}^{h+2}(\mathcal{E})$ é Darboux integrável.

Sobre a equação de Liouville

$$\mathcal{E} = \{u_{xy} = e^u\},$$

a distribuição de Cartan se decompõe em

$$\mathcal{C}^2(\mathcal{E}) = \hat{\Delta} \oplus \check{\Delta},$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{\Delta} =& \langle \hat{X}_1 = \partial x + u_x \partial u + u_{xx} \partial u_x + e^u \partial u_y, \hat{X}_2 = \partial u_{xx} \rangle,\\ \check{\Delta} =& \langle \check{X}_1 = \partial y + u_y \partial u + e^u \partial u_x + u_{yy} \partial u_y, \check{X}_2 = \partial u_{yy} \rangle,\end{aligned}$$

e é Darboux integrável. De fato

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}^{(\infty)} =& \langle \partial x + u_x \partial u + u_{xx} \partial u_x + e^u \partial u_y, \partial u, \partial u_x, \partial u_{xx} \rangle,\\ \check{\Delta}^{(\infty)} =& \langle \partial y + u_y \partial u + e^u \partial u_x + u_{yy} \partial u_y, \partial u, \partial u_y, \partial u_{yy} \rangle,\end{aligned}$$

e $\hat{\Delta}^{(\infty)} \cap \check{\Delta} = \hat{\Delta} \cap \check{\Delta}^{(\infty)} = \{0\}$.

Além disto, temos que

$$\boxed{\mathcal{E} = {}^{J^3(\pi_1)\times J^3(\pi_2)}\!/_{diag(SL(2))}, \text{ e } \mathcal{C}^2(\mathcal{E}) = {}^{\mathcal{C}^3(\pi_1)\oplus\mathcal{C}^3(\pi_2)}\!/_{diag(SL(2))},}$$

onde $\pi_1, \pi_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são dados por $\pi_1(x,a) = x, \quad \pi_2(y,b) = y$. De fato, considerando os terceiros prolongamentos dos geradores infinitesimais da ação diagonal

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \partial a + \partial b,\\
Z_2 &= a\partial a + a_1\partial a_1 + a_2\partial a_2 + a_3\partial a_3 + \partial b + b_1\partial b_1 + b_2\partial b_2 + b_3\partial b_3,\\
Z_3 &= a^2\partial a + 2aa_1\partial a_1 + 2(a_1^2 + aa_2)\partial a_2 + 2(2a_1a_2 + a_2^2 + aa_3)\partial a_3\\
&\quad + b^2\partial b + 2bb_1\partial b_1 + 2(b_1^2 + bb_2)\partial b_2 + 2(2b_1b_2 + b_2^2 + bb_3)\partial b_3
\end{aligned}$$

a aplicação quociente é dada por

$$\begin{aligned}
&q(x,a,a_1,a_2,a_3,y,b,b_1,b_2,b_3) =\\
&= \left(x, y, u = \ln\left(2\frac{a_1b_1}{(a+b)^2}\right), D_x(u), D_y(u), D_x^2(u), D_y^2(u)\right).
\end{aligned}$$

Bibliografia principal

[1] I. M. Anderson, M. E. Fels, and P. J. Vassiliou. Superposition formulas for exterior differential systems. *Advances in Mathematics*, 2009.

[2] I. M. Anderson and N. Kamran. The variational bicomplex for hyperbolic second-order scalar partial differential equations in the plane. *Duke Mathematical Journal*, 1997.

[3] B. P. Ashley. *Transformation Groups and the Method of Darboux*. PHD thesis, Utah State University, 2021.

[4] G. Darboux. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 1870.

[5] T. A. Ivey, J. M. Landsberg. *Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems.* Vol. 175. Providence: American Mathematical Society, 2016.

[6] E. Goursat. *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre-Tome 2*. A. Hermann, 1891.

Obrigado