Sistemas dinâmicos impulsivos: Fundamentos e Atualidades

Um histórico, conceitos básicos e um tema de pesquisa em desenvolvimento

Jaqueline da Costa Ferreira[1] Michelle Molino[2]

[1]Universidade Federal do Espírito Santo

[2]University of Waterloo

IX Encontro da Pós-Graduação em Matemaática da UFBA
18 a 22 de novembro de 2024

FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA
E INOVAÇÃO DO ESPÍRITO SANTO

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO

*Secretaria da Ciência, Tecnologia,
Inovação e Educação Profissional*

Conceitos

Sistemas dinâmicos impulsivos

Superfícies impulsivas

Um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto.

Luiz Henrique Alves Monteiro.
Sistemas Dinâmicos.
Editora Livraria da Física, ano 2006.

Figure: Leonardo AI

Sistema estático:

- Interruptor ligado $\rightarrow$ Luz acesa.
- Interruptor desligado $\rightarrow$ Luz apagada.

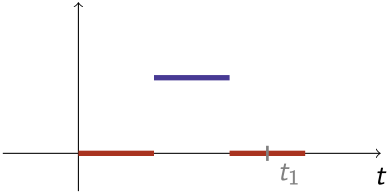
Figure: Leonardo AI

Sistema estático:

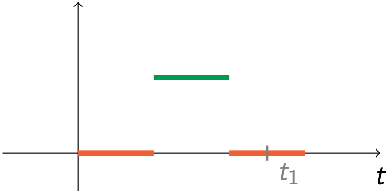
- Interruptor ligado $\to$ Luz acesa.
- Interruptor desligado $\to$ Luz apagada.

Em um sistema estático (sem memória), a resposta em um dado instante depende apenas do estímulo nesse mesmo instante.

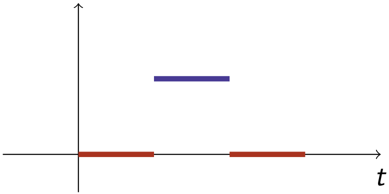
Interruptor:



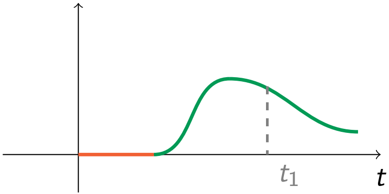
Luz:



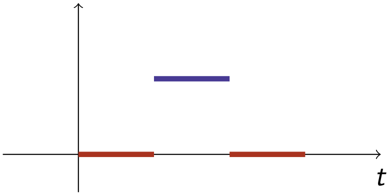
Chama:



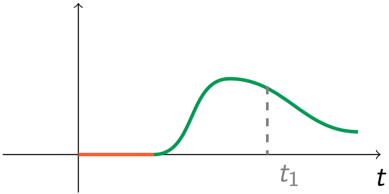
Temperatura da água.



Chama:



Temperatura da água.



Em um sistema dinâmico (com memória), a resposta em um dado instante depende dos valores das entradas passadas.

Um sistema é dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam com o tempo.

Um sistema é dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam com o tempo.

- Sistemas dinâmicos (contínuo no tempo) são expressos por equações diferenciais. Por exemplo: A Lei do Resfriamento de Newton:

$$T' = k(T - Tm), \quad T(0) = T_0$$

- A origem da Teoria dos Sistemas Dinâmicos remonta ao desenvolvimento do Cálculo por Isaac Newton (e Leibniz).

- A origem da Teoria dos Sistemas Dinâmicos remonta ao desenvolvimento do Cálculo por Isaac Newton (e Leibniz).
- E nos estudos em Mecânica Celeste, nos quais se buscava compreender e prever o movimento dos corpos celestes.

- A origem da Teoria dos Sistemas Dinâmicos remonta ao desenvolvimento do Cálculo por Isaac Newton (e Leibniz).
- E nos estudos em Mecânica Celeste, nos quais se buscava compreender e prever o movimento dos corpos celestes.
- Newton que relacionou a gravitação com o comportamento dinâmico do sistema solar: das leis de Newtow podem se escrever as equações que descrevem o movimento, por exemplo, dos planeta. Conhecido como problema dos n corpos .

Uma personagem de mais destaque é

Figure: Henri Poincaré (1854–1912)

- Até o final do século XIX, os estudos de EDOs buscavam fórmulas que permitissem realizar previsões precisas.

- Até o final do século XIX, os estudos de EDOs buscavam fórmulas que permitissem realizar previsões precisas.
- No entanto, essas soluções nem sempre são possíveis de obter e, às vezes, suas expressões são complexas para estudar seu comportamento.

- Até o final do século XIX, os estudos de EDOs buscavam fórmulas que permitissem realizar previsões precisas.
- No entanto, essas soluções nem sempre são possíveis de obter e, às vezes, suas expressões são complexas para estudar seu comportamento.
- Poincaré percebeu que as propriedades qualitativas das soluções poderiam ser investigadas sem que fosse necessário determiná-las explicitamente. Seu trabalho é o primeiro sobre teoria qualitativa de sistemas dinâmicos.

- Até o final do século XIX, os estudos de EDOs buscavam fórmulas que permitissem realizar previsões precisas.
- No entanto, essas soluções nem sempre são possíveis de obter e, às vezes, suas expressões são complexas para estudar seu comportamento.
- Poincaré percebeu que as propriedades qualitativas das soluções poderiam ser investigadas sem que fosse necessário determiná-las explicitamente. Seu trabalho é o primeiro sobre teoria qualitativa de sistemas dinâmicos.
- Poincaré conquistou um prêmio oferecido para quem desse uma prova matemática sobre a estabilidade (ou não) do sistema solar.

Definição

Seja X um espaço métrico e a aplicação contínua $\pi\colon X \times \mathbb{R} \to X$ que satisfaz:

- $\pi(x, 0) = x$
- $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)$

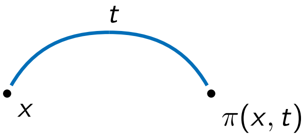
(X, π) é dito um sistema dinâmico.

Definição

Seja X um espaço métrico e a aplicação contínua $\pi\colon X \times \mathbb{R} \to X$ que satisfaz:

- $\pi(x, 0) = x$
- $\pi(\pi(x,t), s) = \pi(x, t+s)$

(X, π) é dito um sistema dinâmico.

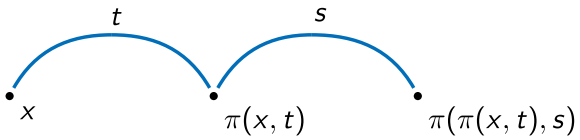


Definição

Seja X um espaço métrico e a aplicação contínua $\pi\colon X \times \mathbb{R} \to X$ que satisfaz:

- $\pi(x, 0) = x$
- $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)$

(X, π) é dito um sistema dinâmico.

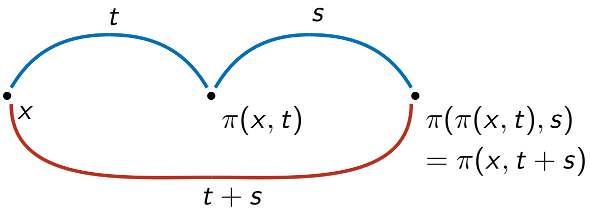


Definição

Seja X um espaço métrico e a aplicação contínua $\pi\colon X \times \mathbb{R} \to X$ que satisfaz:

- $\pi(x, 0) = x$
- $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)$

(X, π) é dito um sistema dinâmico.



Exemplo

Equação diferencial ordinária autônoma

$$y' = F(y), \quad y(0) = y_0,$$

$$\pi(y_0, t) = y(t, 0, y_0)$$

Quando o curso natural de um sistema é alterado por uma mudança brusca de estado, dizemos que ocorreu um impulso.

Quando o curso natural de um sistema é alterado por uma mudança brusca de estado, dizemos que ocorreu um impulso.

Exemplos

- O salto na concentração de uma substância no corpo após da administração de uma dose de alguma droga.

Quando o curso natural de um sistema é alterado por uma mudança brusca de estado, dizemos que ocorreu um impulso.

Exemplos

- O salto na concentração de uma substância no corpo após da administração de uma dose de alguma droga.
- Em um sistema presa-predador quando a densidade da presa atinge um nível limite, são liberados predadores naturais para controlar o ambiente.

Lichun Zhao. Lansun Chen and Qingling Zhang.
The geometrical analysis of a predator-prey model two state impulses.
Math Biosci 2012.

.

1975

ROZCO - Stability in term of Lyapunov discontinous dynamical system

1975

ROZCO - Stability in term of Lyapunov discontinous dynamical system

Kaul - On Impulsive semidynamical system

1990

1975

ROZCO - Stability in term of Lyapunov discontinous dynamical system

1990

Kaul - On Impulsive semidynamical system

1992

Ciesielski - Section in semidynamical system

1975

ROZCO - Stability in term of Lyapunov discontinous dynamical system

1990

Kaul - On Impulsive semidynamical system

1992

Ciesielski - Section in semidynamical system

2004

Ciesielski - On semicontinuity in Impulsive system

1975

ROZCO - Stability in term of Lyapunov discontinous dynamical system

1990

Kaul - On Impulsive semidynamical system

1992

Ciesielski - Section in semidynamical system

2004

Ciesielski - On semicontinuity in Impulsive system

2007

Bonotto - Flows of characteristic 0^+ in impulsive semidynamical systems

1975

ROZCO - Stability in term of Lyapunov discontinous dynamical system

1992

Ciesielski - Section in semidynamical system

2007

Bonotto - Flows of characteristic 0^+ in impulsive semidynamical systems

Kaul - On Impulsive semidynamical system

1990

Ciesielski - On semicontinuity in Impulsive system

2004

Bonotto, Federson
Demuner, Kalita
Souto, Jimenez
Collegari, Bortolan

2007+

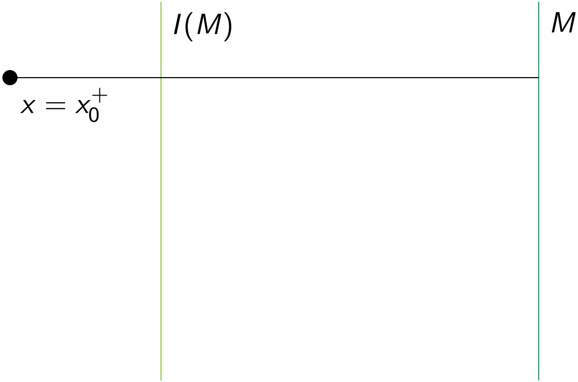
Definição

Um sistema dinâmico impulsivo (X, π, M, I) consiste em um sistema dinâmico (X, π) uma M um subconjunto não vazio fechado de X tal que que o fluxo π seja 'transversal' a M e $I : M \to X$ uma função contínua. O conjunto M é dito conjunto impulsivo e a função I é dita função impulsiva.

$\boxed{\tilde{\pi}(x,t)}$

$\downarrow$

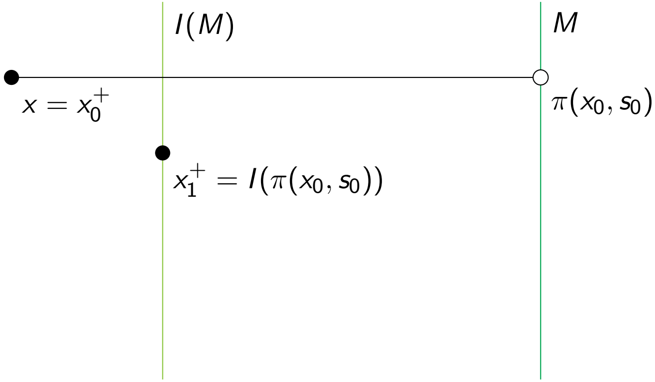
Fluxo impulsivo



$\tilde{\pi}(x,t)$

$\downarrow$

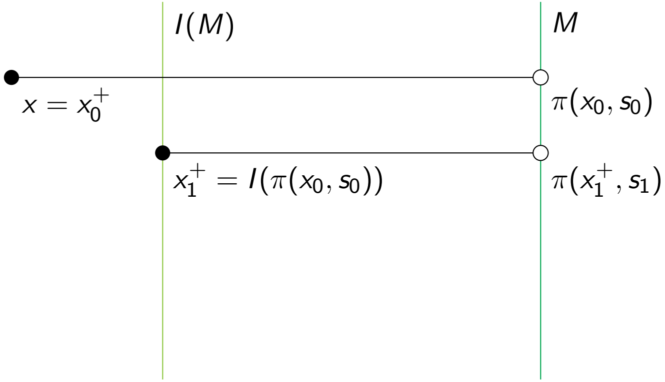
Fluxo impulsivo



$\tilde{\pi}(x, t)$

$\downarrow$

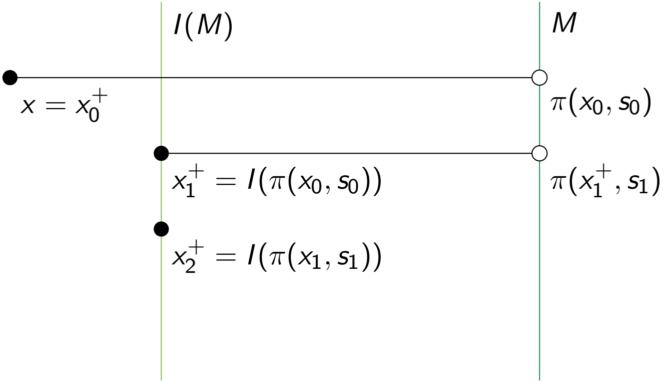
Fluxo impulsivo



$\boxed{\tilde{\pi}(x,t)}$

$\downarrow$

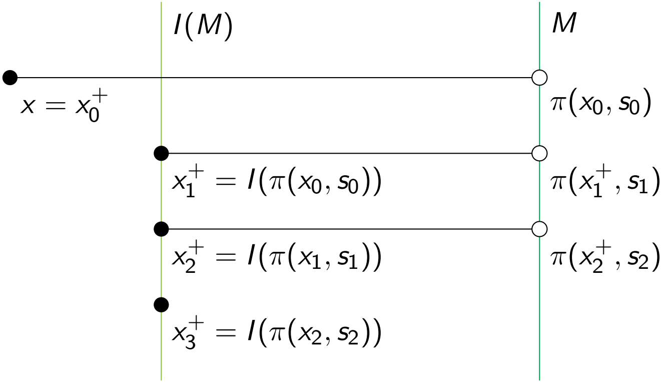
Fluxo impulsivo



$\tilde{\pi}(x,t)$

$\downarrow$

Fluxo impulsivo



$\tilde{\pi}(x, t)$

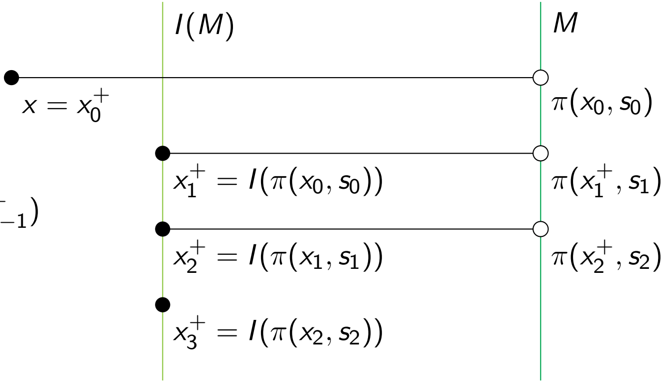
$\downarrow$

Fluxo impulsivo

$$s_n = \phi(x_0^+) + \phi(x_1^+) + \ldots + \phi(x_{n-1}^+)$$

$\downarrow$

Função tempo de impacto



- Também vale:
  - $\tilde{\pi}(x, 0) = x$
  - $\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t), s) = \tilde{\pi}(x, t + s)$

- Também vale:
  - $\tilde{\pi}(x, 0) = x$
  - $\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t), s) = \tilde{\pi}(x, t + s)$
- Os estudos de sistemas dinâmicos impulsivos se concentra em conceitos de atração, conjunto $\omega-$limite e estabilidade em várias perpectivas. Uma delas:

- Também vale:
  - $\tilde{\pi}(x, 0) = x$
  - $\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t), s) = \tilde{\pi}(x, t + s)$
- Os estudos de sistemas dinâmicos impulsivos se concentra em conceitos de atração, conjunto $\omega-$limite e estabilidade em várias perpectivas. Uma delas:

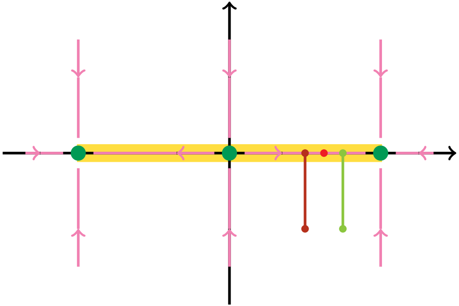
Definição

Um conjunto A é dito um semiatrator para (X, π, M, I) se é compacto e $\tilde{\pi}$-atrai limitados de X. Alem disso A é um atrator global para (X, π, M, I) se o conjunto $A \setminus M$ é $\tilde{\pi}$-invariante ($\tilde{\pi}(B) \subset B$ e $B \subset \tilde{\pi}(B)$).

Bonotto and Kalita.
On attractors of generalized semiflows with impulses.
J. Geom. Anal. 2020.

Exemplo

Considere o semigrupo gerado por $x' = x(1-x)(1+x), \quad y = -y$ e o sistema impulsivo como do desenho.



Karine Ramos Modesto. *Semifluxos Generalizados Impulsivos* . Dissertação de Mestrado PPGMAT-UFES, ano 2024.

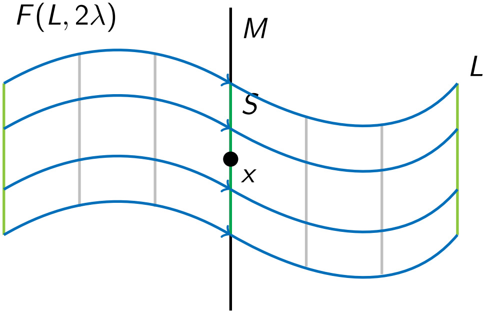
Para se obter atrator global é necessário uma condição adicional do comportamento adequado do fluxo π em M: Condição forte de tubo

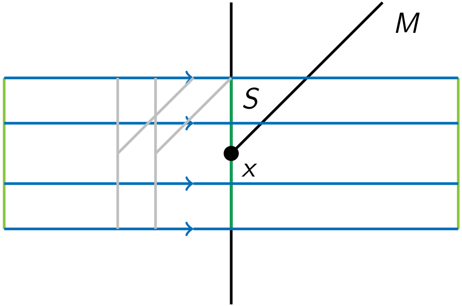
Para se obter atrator global é necessário uma condição adicional do comportamento adequado do fluxo π em M: Condição forte de tubo

Definição

Um conjunto S contendo x é chamado seção por x se existe um $\lambda > 0$ e uma fechado L tal que

- $F(L, \lambda) = S$, onde $F(y, t) = \pi(-t, y)x$
- $F(L, [0, 2\lambda])$ é uma vizinhança de x, dito tubo.
- $F(L, t) \cap F(L, s) = \emptyset$





$M \cap F(L,[0,2\lambda)] = S$ dizemos que x satisfaz STC

Resultado

Se para cada x em M satifaz STC então a função tempo de impacto

$$\phi : X \to (0, \infty]$$

é contínua em $X \setminus M$ e contínua superiormente em M.

Resultado

Se para cada x em M satifaz STC então a função tempo de impacto

$$\phi : X \to (0, \infty]$$

é contínua em $X \setminus M$ e contínua superiormente em M.

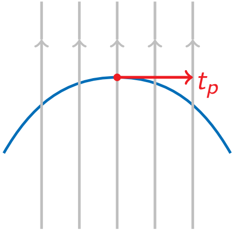
- Este resultado permite mostrar que $\tilde{\omega}(B) \setminus M$ é $\tilde{\pi}$-invariante.

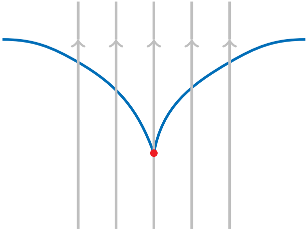
A condição forte de tubo é díficil de verificar em espaços mais gerais e muitas vezes é considerado um conjunto impulsivo abstrado.

A condição forte de tubo é díficil de verificar em espaços mais gerais e muitas vezes é considerado um conjunto impulsivo abstrado.

Bonotto, Bortolan, Caraballo and Collegari
Impulsive surfaces on dynamical systems.
Acta Mathematica Hungarica 2016.

- Considere $x' = f(x)$ para cada $p \in M$ superfície regular se $\vec{n_p} \cdot f(p) \neq 0$ (T) então M satisfaz STC.





(t^3, t^2)

Superfície regular satisfazendo a condição (T)

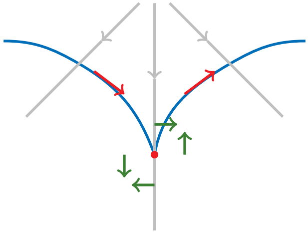
Superfície Singular

Definem e trabalham com campo de vetores tangentes em superfícies com singularidade: na singularidade $t_p = \vec{0}$

Brasselet, Seade, Suwa.
Vector Fields on Singular varieties .
Springer-Verlag, ano 2009.

Thaís Maria Dalbelo.
O índice de Poincaré-Hopf e generalizações no caso singular .
Dissertação de Mestrado USP, ano 2011.

Tentativa: o que acontece no campo em uma vizinhança da singularidade



$$(3y, 2\sqrt[3]{x})$$

FIM