Folheação Semi-Riemanniana

Jair Carneiro de Oliveira
Benigno Oliveira Alves
Universidade Federal da Bahia

IX Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
18/11/2024

Conteúdo

Folheação Regular

Definição

Seja $\mathcal{F} = \{L_p\}_{p \in M}$ uma partição de M por subvariedades imersas e conexas de dimensão k. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma ***folheação regular*** *k-dimensional se for localmente dada como pré-imagem de uma submersão. As subvariedades L_p são chamadas de folhas.*

Exemplo

Se $\pi : M \to B$ é uma submersão, então

$$\mathcal{F}_\pi = \{L_p := \pi^{-1}(\pi(p)); p \in M\}$$

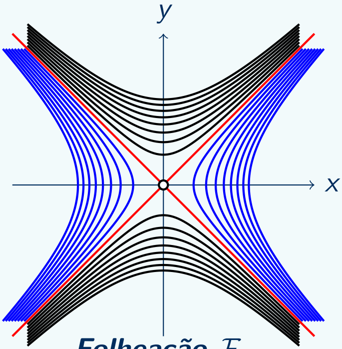
é uma folheação.

Exemplo

Considere a submersão $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\pi(q) = x_1^2 - x_2^2. \tag{1}$$

O conjunto $\mathcal{F}_\pi = \{L_p := \pi^{-1}(\pi(p)); p \in \mathbb{R}^2\}$ *é uma folheação regular.*



Folheação $\mathcal{F}_\pi$

Submersão Semi-Riemanniana

Definição

Sejam (M, g) e (B, h) variedades semi-Riemannianas. Dizemos que $\pi : (M, g) \to (B, h)$ é uma ***submersão semi-Riemanniana*** *se*

1. *Para todo $p \in B$ temos que $\pi^{-1}(p)$ é não degenerado, ou seja,*

$$g\big|_{T_q\pi^{-1}(p)\times T_q\pi^{-1}(p)}$$

   é não degenerado $\forall q \in \pi^{-1}(p)$.

2. *Para todo $u, v \in \mathcal{H}_p := (T_p\pi^{-1}(p))^{\perp}$ temos*

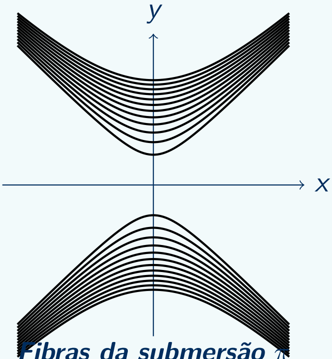
$$g_p(u, v) = h(d\pi_p(u), d\pi_p(v)).$$

Exemplo

Seja $M = \{p \in \mathbb{L}^2; \langle p, p\rangle_1 < 0\}$*. A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \pi : (M, \langle .,. \rangle_1) & \rightarrow & (\mathbb{R}^*_-, h) \\ p & \mapsto & \langle p, p\rangle_1 \end{array}$$

é uma submersão semi-Riemanniana onde $h_r(t_1, t_2) = \dfrac{1}{4r} t_1 t_2$.



Fibras da submersão π

Folheação Semi-Riemanniana

Definição

Uma folheação semi-Riemanniana é uma folheação regular que é localmente dada por submersões semi-Riemanniana.

Observação

No caso Riemanniano temos o resultado que uma submersão $\pi : (M, g) \to (B, h)$ será uma submersão Riemanniana se, e somente se, qualquer geodésica que é ortogonal a uma folha segue sendo ortogonal a outras folhas que ela intercepta.

Folheação Transnormal

Definição

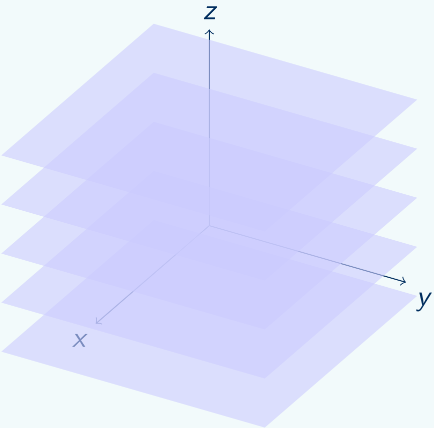
*Uma folheação $\mathcal{F} = \{L_p\}$ em uma variedade semi-Riemanniana (M, g) é chamada de **folheação transnormal** se para toda geodésica $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma'(0) \in \mathcal{H}$, então*

$$\gamma'(t) \in \mathcal{H}_{\gamma(t)} \ \forall t \in I.$$

onde $\mathcal{H}_p := (T_pL_p)^\perp$.

Exemplo

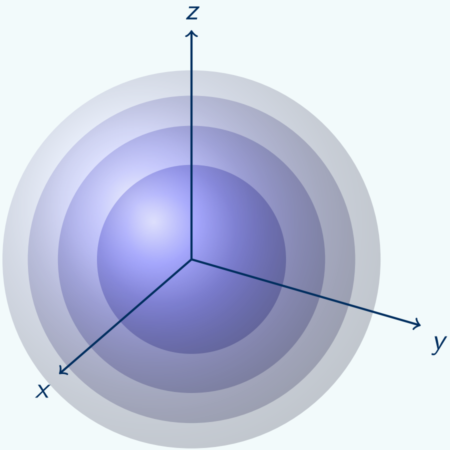
A folheação em $\mathbb{R}^3$ dada por planos paralelos é uma folheação transnormal.



Folheação do $\mathbb{R}^3$ dada por planos paralelos

Exemplo

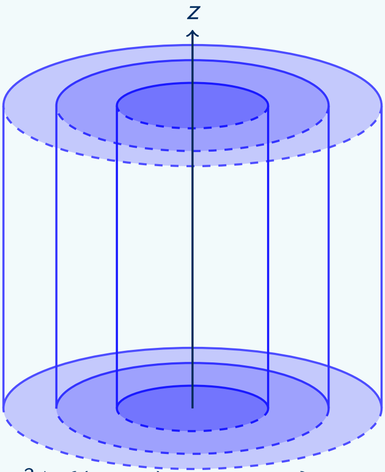
Folheação do $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dada por esferas.



Folheação do $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dada por esferas

Exemplo

Folheação do $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z); x = y = 0\}$ *dada por cilindros.*



Folheação do $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z); x = y = 0\}$ ***dada por cilindros.***

Teorema (DOLGONOSOVA, A. Yu; ZHUKOVA, N. I, 2018)

Seja $\mathcal{F} = \{L_p\}$ uma folheação regular de uma variedade semi-Riemanniana (M, g) cujas as folhas são não degeneradas. Então $\mathcal{F}$ é uma folheação semi-Riemanniana se, e somente se, $\mathcal{F}$ é transnormal.

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação regular. Então $\mathcal{F}$ é transnormal se, e somente se,

$$\mathcal{L}_U g(X, Y) = 0$$

para quaisquer $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ e $U \in \Gamma(\mathcal{V})$.

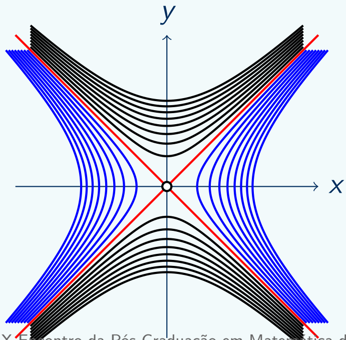
Problema de Pesquisa

Exemplo

Considere a submersão $\pi : \mathbb{L}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\pi(q) = x_1^2 - x_2^2. \tag{2}$$

O conjunto $\mathcal{F}_\pi = \{L_p := \pi^{-1}(\pi(p)); p \in \mathbb{L}^2\}$ *é uma folheação transnormal mas não é uma folheação semi-Riemanniana.*



Problema de Pesquisa

Proposição (Folheação Homogênea)

As órbitas regulares de uma ação isométrica semi-Riemanniana constitui uma folheação transnormal.

Proposição

Qualquer folheações por hipersuperfícies tipo luz no espaço tempo (por exemplo ondas gravitacionais) são transnormais.

É possível generalizar o conceito de folheação e submersão semi-Riemanianas incluindo folheação transnormal que admita folhas não degeneradas?

Referências Bibliográficas

DOLGONOSOVA, A. Yu; ZHUKOVA, N. I. Pseudo-Riemannian foliations and their graphs. **Lobachevskii Journal of Mathematics**, v. 39, p. 54-64, 2018.

O'NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity.** Pure and Applied Mathematics/Academic Press, Inc, 1983.

ALEXANDRINO, Marcos M.; ALVES, Benigno O.; JAVALOYES, Miguel Angel. On singular Finsler foliation. **Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)**, v. 198, n. 1, p. 205-226, 2019.

OBRIGADO!